Лабораторна робота №7
Дослідження властивостей перетворення Фур'є дискретних сигналів.

<u>Теоретичні відомості</u>

Перетворення Фур'є – одна з основних властивостей дослідження неперіодичних сигналів.

Розглянемо функцію $f(t) \in L^2(0,2\pi)$, т.е.

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Можна показати, що така 2π-періодична функція може бути представлена як суперпозиція цілочисельних розтягування базисної функції e^{it},тобто

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{1}$$

де

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \tag{2}$$

Компоненти $g_n = c_n e^{int}$ утворюють ортонормовану систему функцій, тобто

$$\begin{aligned} \langle g_n, g_m \rangle &= 0, \quad \forall n, m : n \neq m \\ \langle g_n, g_n \rangle &= 1, \quad \forall n \end{aligned} \tag{3}$$

Ряд (1) називається рядом Фур'є.

Для ілюстрації вживання розкладання в ряд Фур'є розглянемо формування меандра.

Меандр – це послідовність прямокутних імпульсів з шпаруватістю, рівною двом .

У спектрі меандра присутні лише непарні гармоніки.

$$s(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{3}\cos\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{5}\cos\left(5\frac{2\pi}{T}t\right) - \ldots\right) \tag{4}$$

Гармоніки утворюючі меандр мають амплітуду обернено пропорційну до номера відповідної гармоніки.

Розглянемо часткові суми ряду (4). Нижче приведена програма для Matlab.

```
N=8;
t=-1:0.01:1;
A=1;
T=1;
nh=(1:N)*2-1;
```

```
harmonics=cos(2*pi*nh'*t/T);
Am=2/pi./nh;
Am(2:2:end)=-Am(2:2:end);
s1=harmonics.*repmat(Am',1,length(t));
s2=cumsum(s1);
for k=1:N
   subplot(4,2,k)
   plot(t, s2(k,:))
end
```

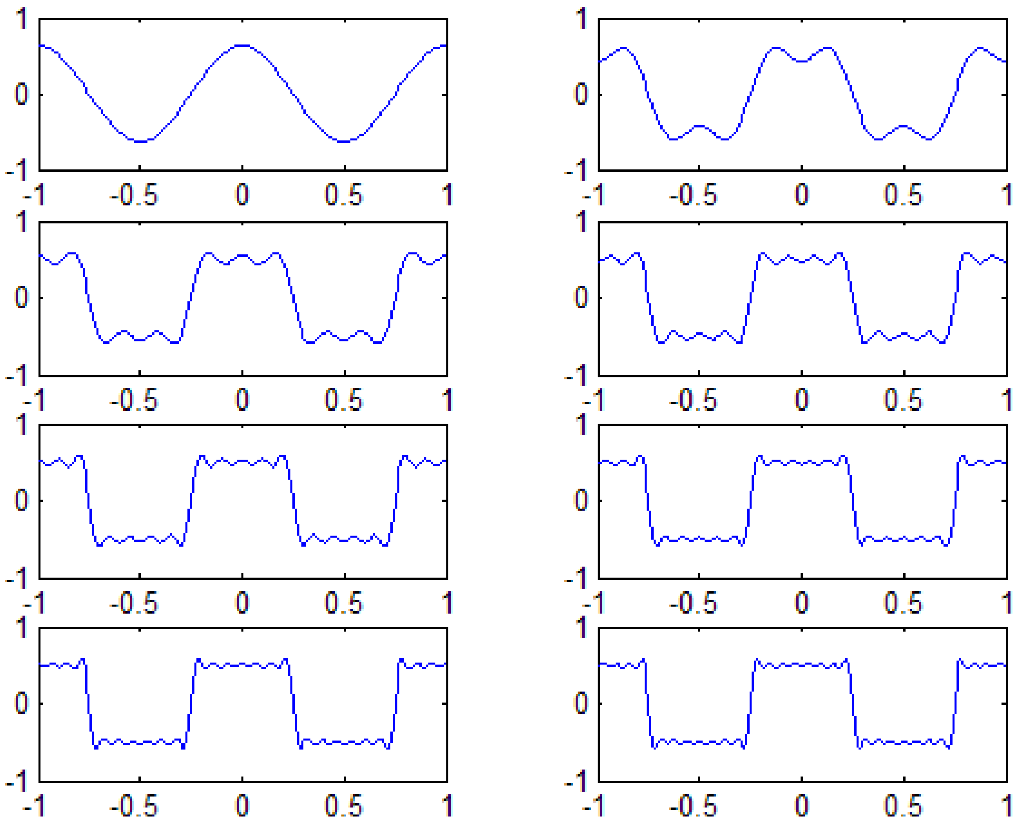

Рис. 7.1

Ряд Фур'є застосовний для розкладання періодичних функцій.

Розглянемо неперіодичну функцію $f(t) \in L^2$, якщо її потрібно представити у формі подібної (1.8), приймемо, що дана функція періодична з періодом $T = \infty$.

По аналогії з рядом Фур'є можна ввести поняття перетворення Фур'є.

Функція

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{5}$$

називається прямим перетворенням Фур'є функції $f(t)$.

По отриманому Фур'є-образу, внаслідок ортонормованості системи функцій $e^{i\omega t}$, функція $f(t)$ може бути точно відновлена за допомогою зворотного перетворення Фур'є

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{6}$$

Перетворення Фур'є має ряд корисних властивостей, знання яких дозволяє передбачати вигляд спектру сигналу.

1. Лінійність

якщо $f(t)=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$, то $F(\omega)=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)$

2. Теорема про зсув

Розглянемо перетворення Фур'є функції $f(t)$ зсунутої в часі на τ, тобто $f(t-\tau)$. Хай $F(\omega)$ - перетворення Фур'є $f(t)$, а $F_\tau(\omega)$ - перетворення Фур'є.

Тоді $F_\tau(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)}d(t-\tau)e^{-j\omega t}=F(\omega)e^{-j\omega t}$

Більше того $|F_\tau(\omega)|=|F(\omega)e^{-j\omega t}|=|F(\omega)||e^{-j\omega t}|=|F(\omega)|$, тобто амплітуди спектрів сигналу і його зсунутої копії рівні.

3. Теорема про добуток

Нехай $f(t)=f_1(t)f_2(t)$ і відповідній $F(\omega)$ - Фур′є образ функції $f(t)$, $F_1(\omega)$ - $f_1(t)$, $F_2(\omega)$ - $f_2(t)$.

Тоді $F(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\lambda)F_2(\omega-\lambda)d\lambda$

4. Теорема про згортку.

Згортка грає важливу роль з теорії ЦОС.

Хай $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2(t-\tau)d\tau$.

При цьому $F_1(\omega)$ є перетворення Фур'є функції $f_1(t)$, а $F_2(\omega)$ - $f_2(t)$.

Тоді $F(\omega)=F_1(\omega)F_2(\omega)$.

5. Теорема Парсеваля

Повна енергія сигналу і його спектру рівні, тобто

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$$

Спектр сигналу, обмеженого в часі

Дослідник ніколи не має справи з сигналом в повній його реалізації від $-\infty$ до $+\infty$. Сигнали розглядаються в якомусь тимчасовому проміжку.

Розглянемо сигнал, заданий функцією $f(t)$, визначеною на всій тимчасовій осі і його частину $f_1(t)$, визначену на інтервалі $\left[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]$.

Сигнал $f_1(t)$ можна розглядати як сигнал $f(t)$ помножений на прямокутне вікно шириною Т ($\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$), тобто

$f_1(t) = f(t)\cdot u(t)$.

Використовуючи властивість 3 – теорему про добуток, передбачаючи що $F(\omega)$ і $F_u(\omega)$ - спектри сигналу $f(t)$ і вікна $u(t)$ відповідно, маємо:

$$F_1(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)F_u(\omega-\lambda)d\lambda \tag{7}$$

$$F_u(\omega) = T\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \tag{8}$$

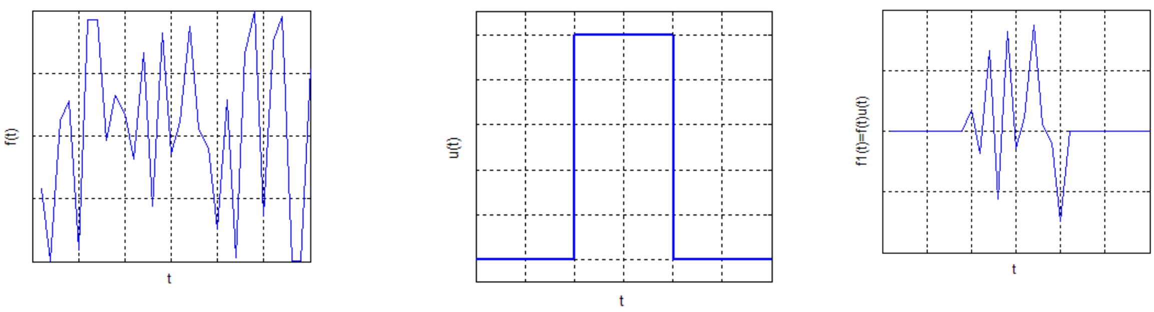

Рис. 7.2

Таким чином:

$$F_1(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)T\frac{\sin\frac{(\omega-\lambda)T}{2}}{\frac{(\omega-\lambda)T}{2}}d\lambda \tag{9}$$

Формула (9) показує, що спектр при обмеженні його в часі розширюється.

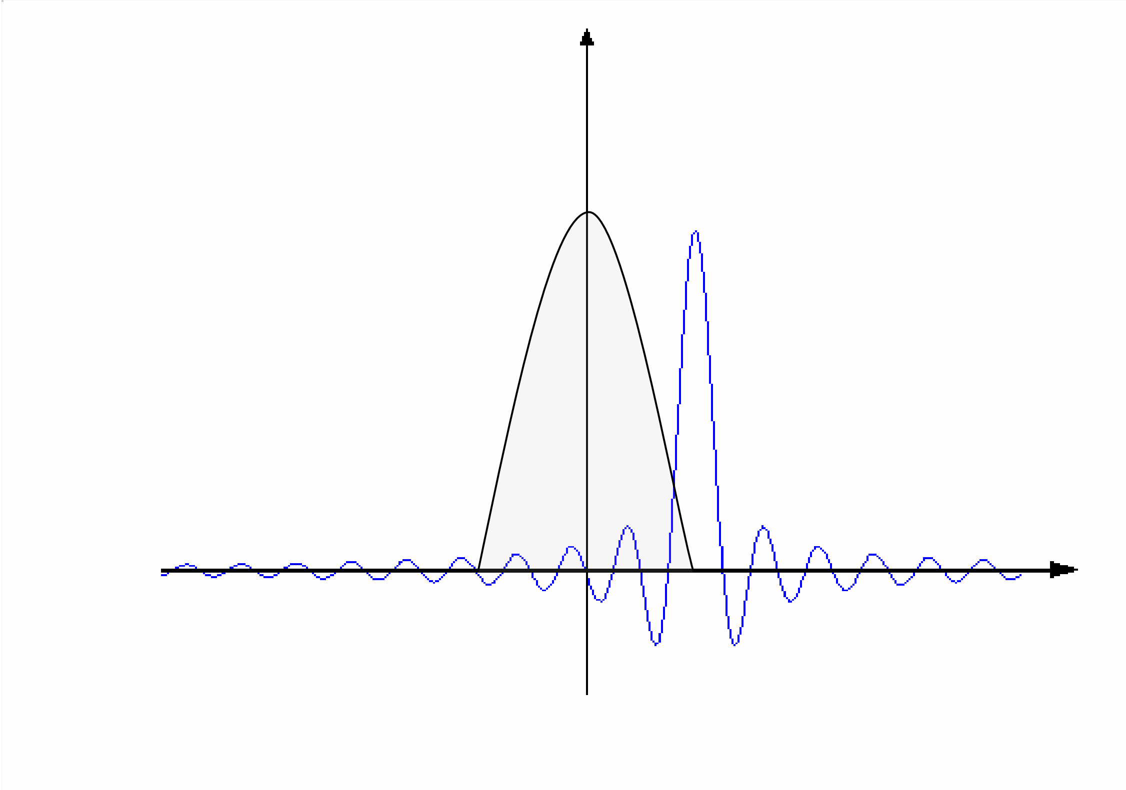

Рис. 7.3

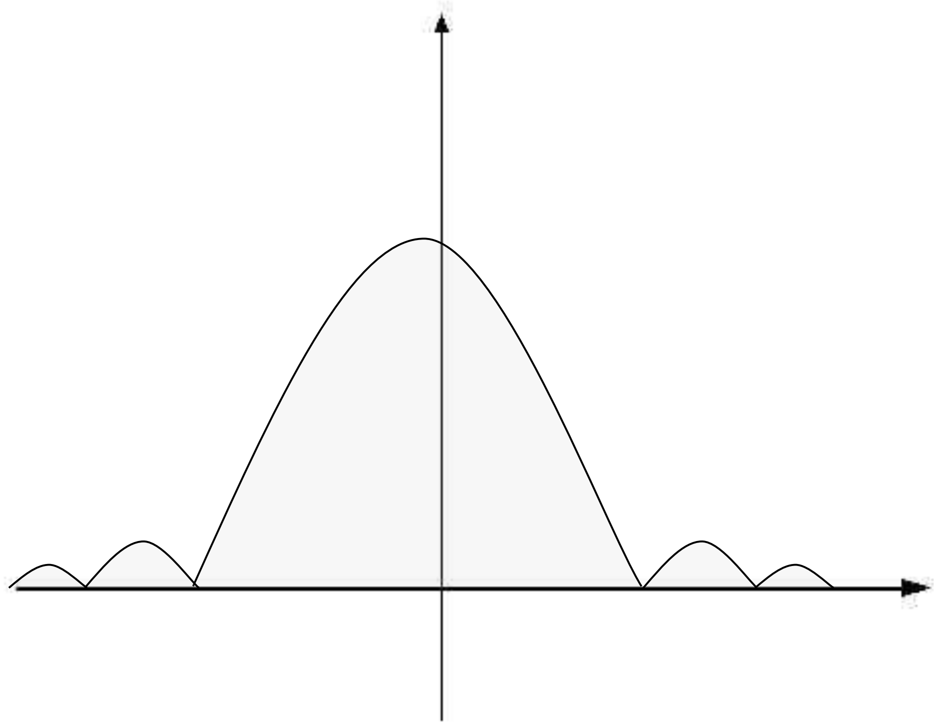

Рис. 7.4

Використання командного режиму

Для обчислення коефіцієнтів перетворення Фур'є методом БПФ використовується команда FFT, що має наступний синтаксис:

FX = FFT(X) – обчислює БПФ з числом крапок рівним довжині сигналу X

FX = FFT(X,n) – обчислює N – точкове перетворення сигналу X.

FX – комплексні (!) коефіцієнти.

Генерація вікон виробляється наступною функцією

w = window(fhandle,n,winopt)

fhandle – вікно із списку, записане через @

n – довжина вікна

winopt – особливі параметри (опція)

Список вікон

bartlett
barthannwin
blackma
blackmanhar
bohmanwin
chebwin
flattopwin
gausswin
hamming
hann
kaiser
nuttallwin
parzenwin
rectwin
tukeywin
triang

Window	winopt Description	winopt Value
blackman	sampling flag string	'periodic' or 'symmetric'
chebwin	sidelobe attenuation relative to mainlobe	numeric
flattopwin	sampling flag string	'periodic' or 'symmetric'
gausswin	alpha value (reciprocal of standard deviation)	numeric
hamming	sampling flag string	'periodic' or 'symmetric'
hann	sampling flag string	'periodic' or 'symmetric'
kaiser	beta value	numeric
tukeywin	ratio of taper to constant sections	numeric

Приклад:

```
N = 65;
w = window(@blackmanharris,N);
w1 = window(@hamming,N);
w2 = window(@gausswin,N,2.5);
plot(1:N,[w,w1,w2]); axis([1 N 0 1]);
legend('Blackman-Harris','Hamming','Gaussian');
```

GUI SpTool

У пакеті Signal Processing Toolbox передбачений графічний інтерфейс користувача, що полегшує його роботу.
Розглянемо вживання Sptool для вирішення завдань аналізу. Для запуску використовується команда sptool.

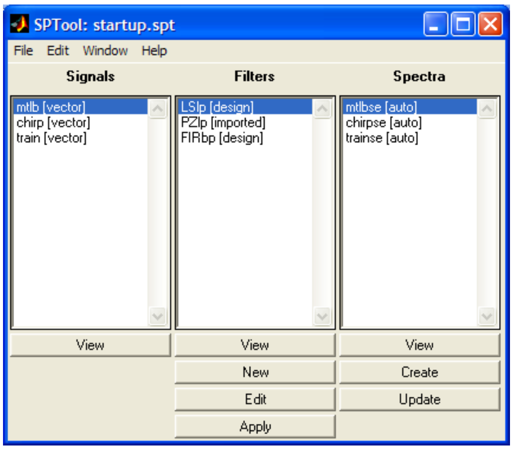

Рис. 7.5 Головне вікно SpTool

Головне вікно розділене на 3 частини: Сигнали (Signals), Фільтри (Filters), Спектри (Spectra).
Для завантаження сигналу в GUI використовується пункт меню File/import.

1. Вибрати джерело сигналу (Source): з робочої області або з диска. Якщо вибраний імпорт з робочої області, то в полі Workspace Contents відображуватиме поточний вміст робочої обаласті.
2. Далі в полі Import As. вказуємо, що змінна буде імпортована як сигнал (Signal).
3. Вказуємо, яка змінна буде імпортована, вказуємо частоту дискретизації (Sampling Frequency) або вказуємо яка змінна буде прийнята за fs.
4. Вказуємо ім'я сигналу, що імпортується, в полі Name.
5. Натискаємо OK...

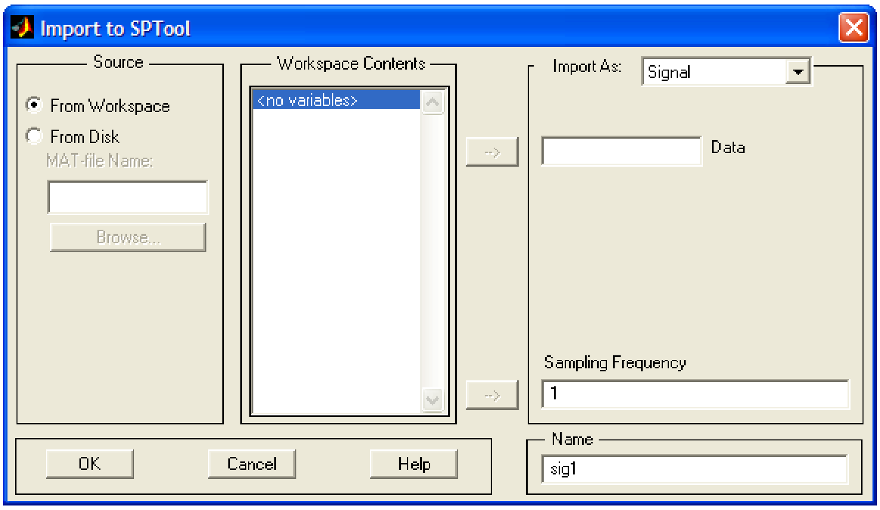

Рис. 7.6 Вікно імпорту

Для видалення сигналу (так само як і будь-якого об'єкту) необхідно вибрати пункт меню Edit/clear/<Імя сигналу>. У даному пункті меню відображуються всі виділені об'єкти.

Для перегляду сигналу потрібно:

1. Виділити сигнал в списку Signal
2. Натискувати кнопку View.

З'явитися Signal Browser, робота в якому інтуїтивно зрозуміла.

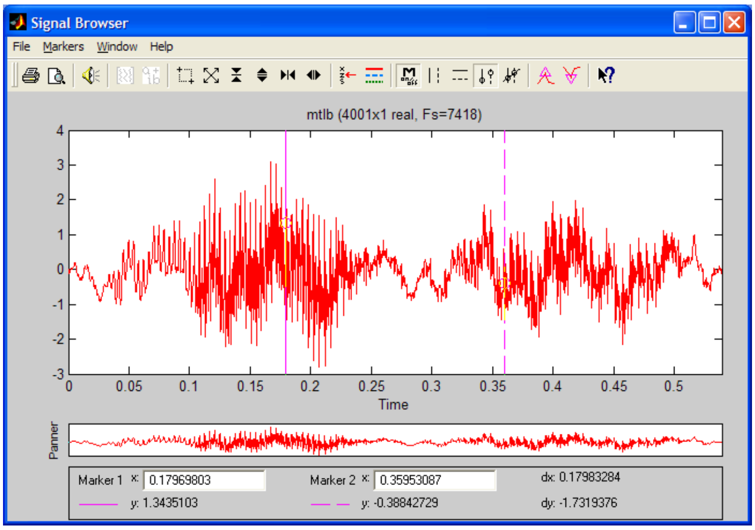

Рис. 7.7 Signal Browser

Sptool дозволяє використовувати різні методи спектрального аналізу. В даній лабораторній роботі нас цікавить лише перетворення Фур'є. Для створення Фур'є-спектру необхідне:

1. Виділити досліджуваний сигнал в блоці Signals,
2. У блоці Spectra натискувати кнопку Create

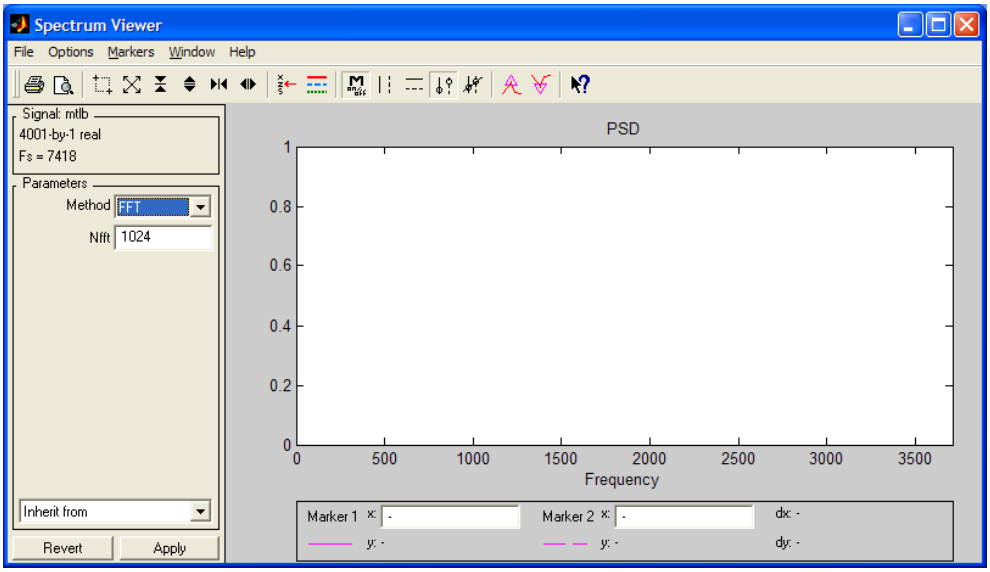

Рис. 7.8

3. У блоці Parameters в полі Method вибрати FFT (ШПФ),
4. У полі NFFT вказати число точок FFT.
5. Натискувати кнопку Apply.

У меню Options можна вказати додаткові налаштування відображення спектру.

Вікна та їх властивості. GUI WinTool

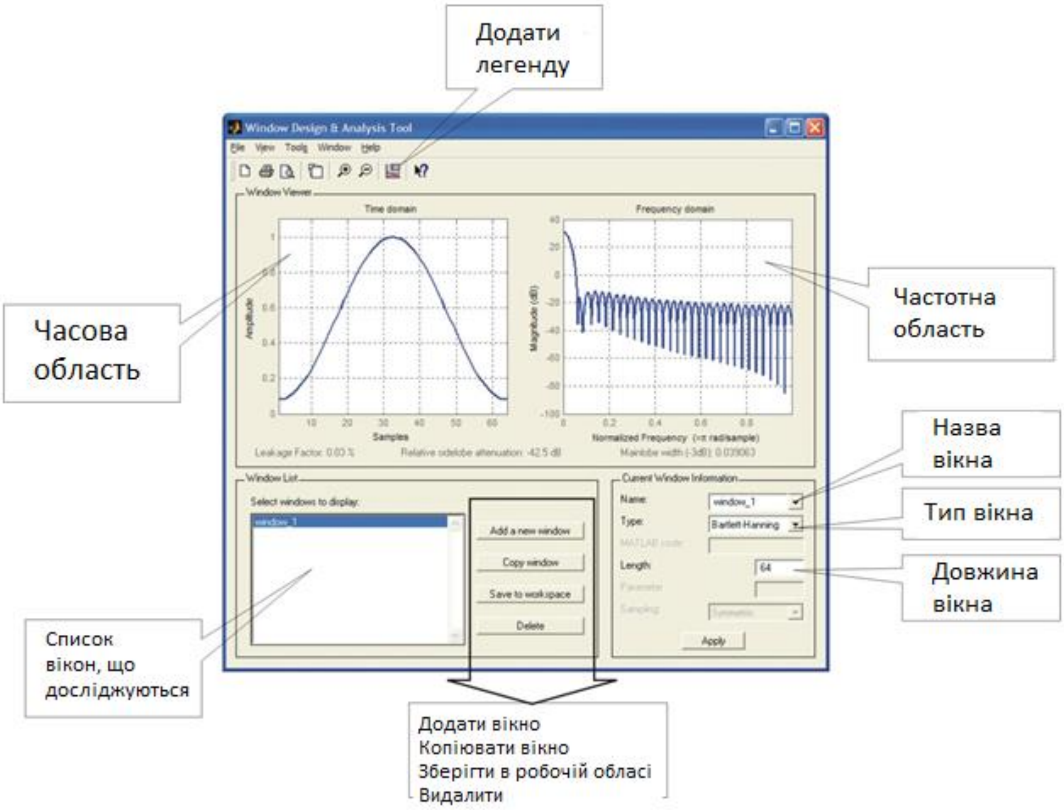

Рис. 7.9

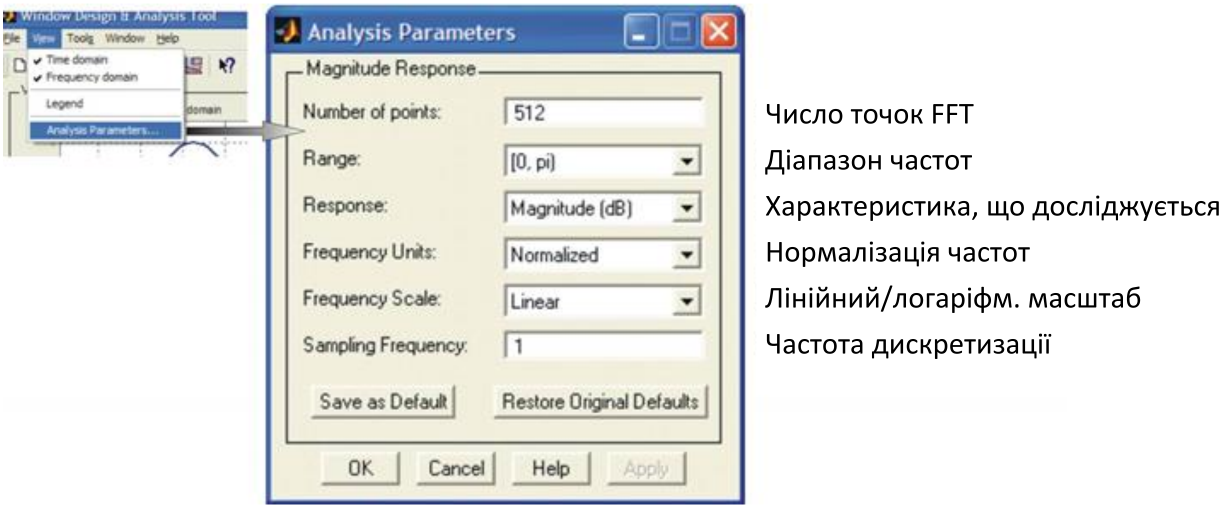

Рис. 7.10

Порядок виконання роботи

При виконанні допускається використовувати додаткові засоби Matlab, такі як графічні оболонки (наприклад Sptool), окрім випадків, вказаних в завданні.

1. Ознайомитися з теоретичним введенням і додатковими матеріалами до лабораторної роботи.
2. Дослідження періодичних сигналів
   2.1 Виконати генерацію сигналів відповідно до завдання при різних частотах і довжині реалізації. Частота дискретизації 1024 Гц .
   2.2 Розробити програму для здобуття спектру потужності сигналу.
   2.3 Отримати спектр потужності сигналу при різних Nfft. 2.4 Оформити графічний матеріал.
3. Дослідження вікон.
   3.1 Використовуючи Window Design & Analysis Tool (Wintool) з пакету Matlab Signal Processing Toolbox розглянути властивості різних вікон
   3.2 Помістити в звіт інформацію про основні вікна (тимчасову і частотну реалізацію (у лінійному і логарифмічному масштабах) вікон, смугу основної пелюстки, максимальну амплітуду бічних пелюсток (у дБ), швидкість спаду бічних пелюсток (дБ/октава).
4. Дослідження спектру сигналів, обмежених в часі.
   4.1 Виконати генерацію сигналів відповідно до завдання при різних частотах. Частота дискретизації 1024 Гц.
   4.2 Виконати генерацію вікон
   4.3 Знайти спектр потужності сигналу з різними вікнами що мають різну довжину. Порівняти отриманий результат з теоретичним.
   4.4 Визначити як різні вікна впливають на властивості ДПФ
   4.5 Оформити графічний матеріал. Зробити висновки
5. Дослідження розтікання спектру. (див. додаток)

6. Досліджувати ефект підміни частот.
   6.1 Частота дискретизації 512 Гц. Частоти сигналу узяти із завдання.
   6.2 Розрахувати аналітично спостережувані частоти.

№ завдання	Варіанти				
	1	2	3	4	5
2	$\sin(2\pi f)$				
	$\sin(2\pi f_1)+\sin(2\pi f_2)$				
3					

Контрольні питання

1. Як впливає вибір вікна на спектр сигналу?
2. Пояснити причини підміни частот.

```
td=0:15;  %час дискретного сигналу
ta=0:1:16;% час аналогового сигналу
T1=4;     %період першого сигналу
T2=6;     %період другого сигналу
x1d=sin(2*pi*td/T1); %дискретний сигнал
x1a=sin(2*pi*ta/T1); %аналоговий сигнал
y1=fft(x1d); %спектр дискретного сигналу
x2d=sin(2*pi*td/T2);
x2a=sin(2*pi*ta/T2);
y2=fft(x2d);
subplot(221);
stem(td,x1d);
hold on
plot(ta,x1a,'--');
hold off
xlim([0 16])
subplot(222);
stem(td,abs(y1));
subplot(223);
stem(td,x2d);
hold on
plot(ta,x2a,'--');
hold off
xlim([0 16])
subplot(224);
stem(td,abs(y2));
```