Лекція 8

Опис дискретних сигналів

x(nT) - x(n).

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (1)$$

.

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}. \quad (2)$$

Приклад 1

Визначити z-зображення сигналу

$$x(nT) = \begin{cases} e^{\alpha nT}, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}. \quad (3)$$

Розв'язок. Підставивши *x(nT)* в формулу Z-перетворення (1), маємо ряд типу

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{\alpha T} z^{-1})^n \quad (4)$$

.

де $q = e^{\alpha T} z^{-1}$, звідки отримаємо z- зображення

$$x = \frac{1}{1 - e^{\alpha T} z^{-1}}. \quad (5)$$

і область його збіжності

$$|e^{\alpha T} z^{-1}| < 1 \twoheadrightarrow e^{\alpha T}|z^{-1}| < 1 \twoheadrightarrow |z| > e^{\alpha T}. \qquad (6)$$

яка визначається радіусом збіжності $R = e^{aT}$.

1. Опис дискретних сигналів в частотній області

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega Tn} \qquad (7)$$

.

або для нормованих часу і частоти

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-j\hat{\omega}n} \qquad (8)$$

.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| x(nT) e^{-j\omega Tn} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)| < \infty, \qquad (9)$$

.

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega Tn} d\omega \qquad (10)$$

.

$$X(e^{j\omega T}) = \left| X(e^{j\omega T}) \right| e^{j \arg\left\{ X(e^{j\omega T}) \right\}}. \qquad (11)$$

.

Модуль $X(e^{j\omega T})$ називають амплітудним спектром, а аргумент $\arg\{X(e^{j\omega T})\}$ – фазовим спектром дискретного сигналу.

Приклад 2

Визначити амплітудний і фазовий спектри дискретного сигналу *x(nT)* (3).

Розв'язок.

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha nT} e^{-j\omega nT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\alpha - j\omega)nT}, \qquad (12)$$

де $q = e^{(\alpha - j\omega)nT}$, звідки отримаємо Фур'є-зображення (спектр)

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1 - e^{(\alpha - j\omega)T}} \qquad (13)$$

і область його збіжності

$$\left|e^{(\alpha - j\omega)T}\right| < 1 \Rightarrow e^{\alpha T}\left|e^{j\omega T}\right| < 1 \Rightarrow e^{\alpha T} < 1 \Rightarrow \alpha > 0 \qquad (14)$$

Згідно з визначенням, амплітудний і фазовий спектри рівні:

$$|X(e^{j\omega T})| = \frac{1}{\sqrt{[1 - e^{\alpha T}\cos((\omega T)]^2 + [e^{\alpha T} sin((\omega T)]^2}}$$

$$\arg\{X(e^{j\omega T})\} = -arctg\frac{e^{\alpha T} sin((\omega T)}{1 - e^{\alpha T}\cos((\omega T)}.$$

$$X(e^{j\omega T}) = X(z)_{z=e^{j\omega T}}. \qquad (15)$$

Приклад 3

Відомо z-зображення *X(z)* (5) дискретного сигналу а *x(nT)* (3). Визначити його спектр.

Розв'язок. Виконавши підстановку $z=e^{j\omega T}$ в (5), автоматично отримуємо спектр сигналу (13).

2. Властивості спектрів дискретних сигналів

1. *Безперервність*.

Спектр $X(e^{j\omega T})$ а також його модуль і аргумент - безперервні (або кусочно-безперервні) функції частоти за визначенням.

2. *Періодичність*.

Спектр $X(e^{j\omega T})$, а також його модуль і аргумент - періодичні функції частоти з періодом, рівним частоті дискретизації $\omega_д = \frac{2\pi}{T}$.

f =>$f_д$;

ω => $\omega_д$:

ω => 2π.

3. *Спектр дійсного сигналу*.

Якщо *x(nT)* - дійсний сигнал, то модуль його спектра - парна функція частоти, а аргумент - непарна:

$$|X(e^{j\omega T})| = |X(e^{-j\omega T})|$$

$$\arg\{X(e^{j\omega T})\} = -\arg\{X(e^{-j\omega T})\}.$$

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega Tn} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\cos(\omega nT) - j\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\sin(\omega nT), \quad (16)$$

.

$$X(e^{j\omega T}) = \mathrm{Re} - jIm. \quad (17)$$

ω = -ω в (16)

$$X(e^{-j\omega T}) = \mathrm{Re} + jIm. \quad (18)$$

$$|X(e^{j\omega T})| = |X(e^{-j\omega T})| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + 1m^2}. \quad (19)$$

$$\arg\{X(e^{j\omega T})\} = \mathrm{arctg}(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}})$$

$$\arg\{X(e^{-j\omega T})\} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}}\right) = -\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}}). \qquad (20)$$

$$\arg\{X(e^{j\omega T})\} = -\arg\{X(e^{-j\omega T})\}.$$

4. *Лінійність*.

$$x(nT) = a_1 x_1(nT) + a_2 x_2(nT) + \cdots$$

$$X(e^{j\omega T}) = a_1 X_1(e^{j\omega T}) + a_2 X(e^{j\omega T}) + \cdots.$$

5. *Зрушення* (зсув, перенесення, зміщення) спектра.

Множення дискретного сигналу *x(nT)* на комплексну експоненту $e^{j\omega_0 nT}$ приводить до зрушення його спектра по осі частот ω вправо на величину ω_0, що символічно зручно записати в такий спосіб:

$$x(nT) => X(e^{j\omega T});$$

$$x(nT)\, e^{j\omega_0 nT} => X[e^{j(\omega-\omega_0)T}] \qquad (21)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x\,(nT))\, e^{j\omega_0 nT}.e^{-j\omega Tn} = \sum_{n=0}^{\infty} x\,(nT)e^{-j(\omega-\omega_0)nT} = X[e^{j(\omega-\omega_0)T}].$$

$$x(nT) => X(e^{j\omega T})$$

$$x(nT)e^{-j\omega_0 nT} \Rightarrow X[e^{j(\omega+\omega_0)T}] \qquad (22)$$

$$X[e^{-j(\omega-\omega_0)T}] = \sum_{n=0}^{\infty} x\,(nT)e^{-j\omega nT}e^{j\omega_0 nT} = \sum_{n=0}^{\infty} x\,(nT)e^{-j(\omega-\omega_0)T} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x\,(nT)\cos\,(\omega-\omega_0)nT - j\sum_{n=0}^{\infty} x\,(nT)sin(\omega-\omega_0)nT$$

$$|X[e^{j(\omega-\omega_0)nT}]| = \sqrt{[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\cos(\omega-\omega_0)nT]^2 + [\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)sm(\omega-\omega_0)nT]^2}$$

$$\arg\{X[e^{j(\omega-\omega_0)T}]\} = \text{arctg}\frac{-\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)sm(\omega-\omega_0)nT}{\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\cos(\omega-\omega_0)nT}$$

Змінивши знак змінної ω = -ω, отримаємо такі вирази для модуля і аргументу:

$$\left|X[e^{-j(\omega+\omega_0)T}]\right| = \sqrt{\left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\cos(\omega+\omega_0)nT\right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\sin(\omega+\omega_0)nT\right]^2};$$

$$\arg\left\{X[e^{-j(\omega+\omega_0)T}]\right\} = \text{arctg}\frac{\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\sin(\omega+\omega_0)nT}{\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\cos(\omega+\omega_0)nT}.$$

6. *Зрушення сигналу x(nT)* на m відліків вправо (затримка сигналу).

Затримка сигналу *x(nT)* на *m* відліків призводить до множення його спектра $X(e^{j\omega T})$ на комплексну експоненту $e^{-j\omega_0 nT}$, що символічно зручно записати в такий спосіб:

$$x(nT) \Rightarrow X(e^{j\omega T});$$
$$x[(n-m)T] \Rightarrow X(e^{j\omega T})e^{-j\omega mT}. \qquad (23)$$

$$Z\{x[(n-m)T]\} = X(z)z^{-m} = X(e^{j\omega T})e^{-j\omega T} =$$
$$= |X(e^{j\omega T})|e^{j\ \arg\{X(e^{j\omega T})\}}e^{-j\omega mT} = |X(e^{j\omega T})|e^{j\ \arg\arg\{X(e^{j\omega T})\}-j\omega mT}$$

$$\arg\left\{X(e^{j\omega T})\right\} - \omega mT.$$

7. *Рівність* (теорема) Парсеваля.

Рівність Парсеваля встановлює зв'язок між енергією дискретного сигналу, обчисленої в часовій і частотній областях:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|x(nT)\right|^2=\frac{T}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}\left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2 d\omega, \qquad (24)$$

.

де: $\sum_{n=0}^{\infty}\left|x(nT)\right|^2$ - енергія сигналу, що обчислена у часовій області;

$\frac{T}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}\left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2 d\omega$ - енергія сигналу, що обчислена у частотній області

$$X(e^{j\omega T})X(e^{-j\omega T})=[\sum_{n=0}^{\infty}x\,(nT)e^{-j\omega Tn}][\sum_{n=0}^{\infty}x^{\star}\,(nT)e^{j\omega Tn}].$$

$$|X(e^{j\omega T})|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|\,x(nT)|^2+\sum_{\substack{n\neq m\\ n=0}}^{\infty}x\,(nT)x^{\star}(nT)e^{-j\omega T(n-m)}$$

$$\frac{T}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\,X(e^{j\omega T})|^2 d_{\omega}=\sum_{n=0}^{\infty}|\,x(nT)|^2\,\frac{T}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d_{\omega}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}x\,(nT)x^{\star}(mT)\frac{T}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}e^{-j\omega T(n-m)}\quad d\omega$$

$$\frac{T}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}d_{\omega}=1\ \text{и}\ \frac{T}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}d_{\omega}\,e^{-j\omega T(n-m)}d\omega=0,$$

3. Зв'язок між спектрами аналогового і дискретного сигналів

$$X_a(j\omega) = \int_0^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega t} dt \; ; \qquad (25)$$

.

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega t} d\omega . \qquad (26)$$

.

$t \Rightarrow nT$:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega$$

$$\Delta(\omega) = \omega_д = \frac{2\pi}{T} .$$

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)\frac{\pi}{T}}^{(2m+1)\frac{\pi}{T}} X_a(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega,$$

де m – номер інтервалу $\omega_д = \frac{2\pi}{T}$ (рис.1).

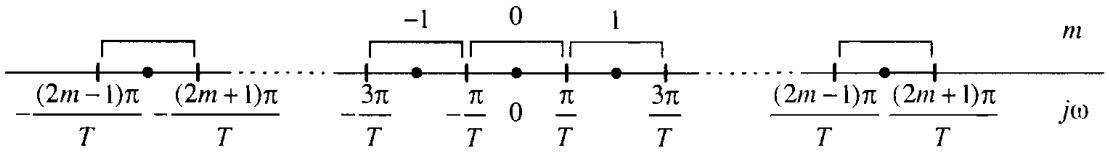


Рис. 1. Нескінченна послідовність інтервалів

$\int_{(2m-1)\frac{\pi}{T}}^{(2m+1)\frac{\pi}{T}}$ замінемо $\int_{\frac{-\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}$,

$X_a[j(\omega + m\frac{2\pi}{T})]$, $m\omega_д = m\frac{2\pi}{T}$, де $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$,

$$\omega => \omega + m\frac{2\pi}{T}$$

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_a \left[j\left(\omega + m\frac{2\pi}{T} \right) \right] e^{J(\omega + m\frac{2\pi}{T})nT} d(\omega + m\frac{2\pi}{T})$$

$$e^{j\left(\omega + m\frac{2\pi}{T}\right)nT} = e^{j\omega nT};$$

$$d\left(\omega + m\frac{2\pi}{T} \right) = d\omega,$$

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_a \left[j\left(\omega + m\frac{2\pi}{T} \right) \right] e^{j\omega nT} d\omega$$

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a \left[j\left(\omega + m\frac{2\pi}{T} \right) \right] e^{j\omega nT} d\omega$$

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a \left[j\left(\omega + m\frac{2\pi}{T} \right) \right]. \qquad (27)$$

$m\omega_д = m\frac{2\pi}{T}$, де $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$,

$\omega_в = 2\pi f_в$.

: $\omega_д = 2\,\omega_в$ $\omega_д > 2\,\omega_в$ $\omega_д < 2\,\omega_в$

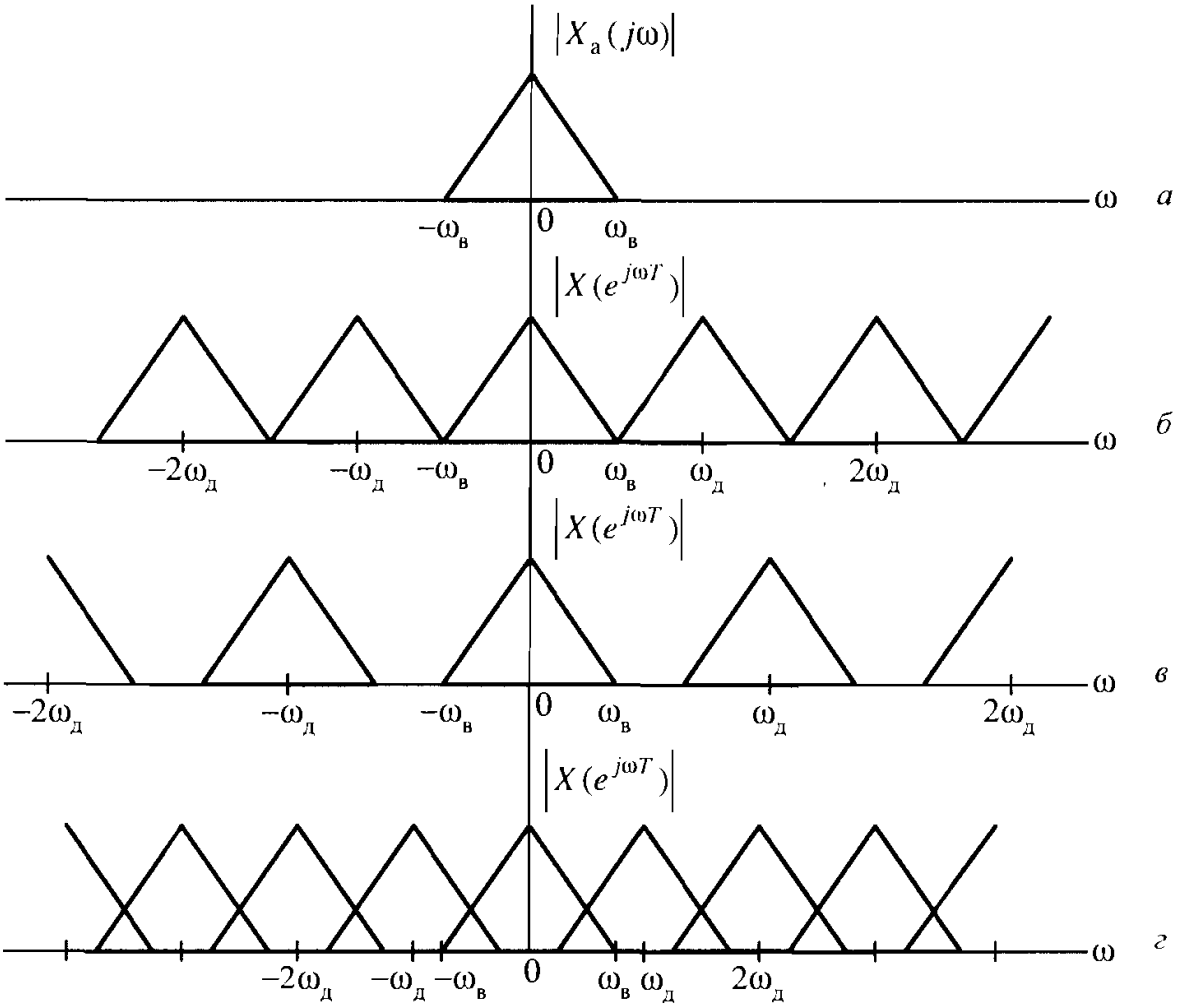


Рис. 2 Амплітудні спектри: аналогового сигналу (а); дискретного сигналу: $\omega_д = 2\,\omega_в$ (б), $\omega_д > 2\,\omega_в$ (в) і $\omega_д < 2\,\omega_в$ (г)

1. Якщо частота дискретизації $\omega_д \geq 2\omega_в$,, то в основній смузі $[0;\frac{\omega_д}{2}]$ спектри аналогового і дискретного сигналів збігаються.

2. Якщо частота дискретизації $\omega_д < 2\,\omega_в$,, відбувається накладення спектрів, зване елайсінгом, тому в основній смузі частот $[0;\frac{\omega_д}{2}]$ спектр дискретного сигналу являє собою спотворений спектр аналогового сигналу.

$T \leq \frac{1}{2f_н}$ (з частотою $f_д \geq 2f_в$), де $f_в$ – верхня частота спектру аналогового сигналу.