

Лекція 8

Опис дискретних сигналів

Подібно опису лінійних дискретних систем, дискретні сигнали описуються в трьох областях: часовій, частотній та z -області.

У часовій області дискретний сигнал описується послідовністю (гратчастою функцією) $x(nT)$ - $x(n)$.

В z -області дискретний сигнал описується своїм z -зображенням $X(z)$, яке визначається за допомогою Z -перетворення

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (1)$$

По відомому z -зображенню сигнал $x(n)$ знаходиться за допомогою зворотного Z -перетворення)

$$x(n) = Z^{-1} \{X(z)\}. \quad (2)$$

Приклад 1

Визначити z -зображення сигналу

$$x(nT) = \begin{cases} e^{\alpha nT}, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (3)$$

Розв'язок. Підставивши $x(nT)$ в формулу Z -перетворення (1), маємо ряд типу

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{\alpha T} z^{-1})^n \quad (4)$$

де $q = e^{\alpha T} z^{-1}$, звідки отримаємо z- зображення

$$x = \frac{1}{1 - e^{\alpha T} z^{-1}}. \quad (5)$$

і область його збіжності

$$|e^{\alpha T} z^{-1}| < 1 \Rightarrow e^{\alpha T} |z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > e^{\alpha T}. \quad (6)$$

яка визначається радіусом збіжності $R = e^{\alpha T}$.

1. Опис дискретних сигналів в частотній області

У частотній області дискретний сигнал $x(nT)$ описується своїм Фур'є зображенням $X(e^{j\omega T})$, яке визначається за допомогою перетворення Фур'є

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega T n} \quad (7)$$

або для нормованих часу і частоти

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-j\hat{\omega} n} \quad (8)$$

Фур'є-зображення $X(e^{j\omega T})$ дискретного сигналу називають його комплексним спектром (спектром).

Перетворення Фур'є однозначно пов'язує дискретний сигнал $x(nT)$ з його спектром $X(e^{j\omega T})$ і справедливо тільки в області абсолютної збіжності ряду (7)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)e^{-j\omega Tn}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)| < \infty, \quad (9)$$

яку називають областю збіжності Фур'є-зображення.

За відомому спектру сигнал $x(nT)$ знаходиться за допомогою зворотного перетворення Фур'є

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega Tn} d\omega \quad (10)$$

Комплексну функцію $X(e^{j\omega T})$ можна виразити через її модуль і аргумент

$$X(e^{j\omega T}) = |X(e^{j\omega T})| e^{j \arg\{X(e^{j\omega T})\}}. \quad (11)$$

Модуль $X(e^{j\omega T})$ називають амплітудним спектром, а аргумент $\arg\{X(e^{j\omega T})\}$ – фазовим спектром дискретного сигналу.

Приклад 2

Визначити амплітудний і фазовий спектри дискретного сигналу $x(nT)$ (3).

Розв'язок. Підставивши $x(nT)$ в формулу перетворення Фур'є (7), маємо ряд типу

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha nT} e^{-j\omega nT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\alpha - j\omega)nT}, \quad (12)$$

де $q = e^{(\alpha - j\omega)nT}$, звідки отримаємо Фур'є-зображення (спектр)

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1 - e^{(\alpha - j\omega)T}} \quad (13)$$

і область його збіжності

$$\left| e^{(\alpha-j\omega)T} \right| < 1 \Rightarrow e^{\alpha T} \left| e^{j\omega T} \right| < 1 \Rightarrow e^{\alpha T} < 1 \Rightarrow \alpha > 0 \quad (14)$$

З порівняння умов збіжності Z-перетворення (6) і перетворення Фур'є (14) ясно, що перетворення Фур'є справедливо для більш вузького класу дискретних сигналів, ніж Z-перетворення.

Згідно з визначенням, амплітудний і фазовий спектри рівні:

$$|X(e^{j\omega T})| = \frac{1}{\sqrt{[1 - e^{\alpha T} \cos((\omega T))]^2 + [e^{\alpha T} \sin((\omega T))]^2}}$$

$$\arg\{X(e^{j\omega T})\} = -\arctg \frac{e^{\alpha T} \sin((\omega T))}{1 - e^{\alpha T} \cos((\omega T))}$$

Порівнюючи Z-перетворення (1) з перетворенням Фур'є (7), то зрозуміло їх взаємозв'язок, з якої випливає, що за умови абсолютної збіжності відповідних рядів спектр $X(e^{j\omega T})$ дискретного сигналу $x(nT)$ збігається з його z-зображення $X(z)$, якщо область значень змінної z на комплексній z -площині обмежена точками на одиничному колі $e^{j\omega T}$:

$$X(e^{j\omega T}) = X(z)_{z=e^{j\omega T}}. \quad (15)$$

Це дозволяє при відомому z-зображенні сигналу шляхом підстановки $z = e^{j\omega T}$ автоматично отримати його его спектр.

Приклад 3

Відомо z-зображення $X(z)$ (5) дискретного сигналу $x(nT)$ (3). Визначити його спектр.

Розв'язок. Виконавши підстановку $z=e^{j\omega T}$ в (5), автоматично отримуємо спектр сигналу (13).

2. Властивості спектрів дискретних сигналів

Перелічимо основні властивості спектрів дискретних сигналів:

1. Безперервність.

Спектр $X(e^{j\omega T})$ а також його модуль і аргумент - безперервні (або кусочно-безперервні) функції частоти за визначенням.

2. Періодичність.

Спектр $X(e^{j\omega T})$, а також його модуль і аргумент - періодичні функції частоти з періодом, рівним частоті дискретизації $\omega_d = \frac{2\pi}{T}$.

Доказ. Періодичність зазначених функцій випливає з періодичності їх аргументів $e^{j\omega T}$ з періодом по ω , рівним ω_d .

Залежно від використовуваної шкали частот період спектра дорівнює

$$f \Rightarrow f_d;$$

$$\omega \Rightarrow \omega_d;$$

$$\omega \Rightarrow 2\pi.$$

Частина спектра, розташована в основній смузі частот, називається основним спектром.

3. Спектр дійсного сигналу.

Якщо $x(nT)$ - дійсний сигнал, то модуль його спектра - парна функція частоти, а аргумент - непарна:

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega T})| &= |X(e^{-j\omega T})| \\ \arg\{X(e^{j\omega T})\} &= -\arg\{X(e^{-j\omega T})\}. \end{aligned}$$

Доказ. Представимо перетворення Фур'є (10.7) в вигляді

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega T n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cos(\omega n T) - j \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \sin(\omega n T), \quad (16)$$

або коротко

$$X(e^{j\omega T}) = \text{Re} - j\text{Im}, \quad (17)$$

де Re - парна функція частоти, а Im - непарна, оскільки в першому випадку маємо суму косинусів (парних функцій), а в другому - суму синусів (непарних функцій).

Змінимо знак змінної $\omega = -\omega$ в (16)

$$X(e^{-j\omega T}) = \text{Re} + j\text{Im}. \quad (18)$$

Запишемо модулі і аргументи спектрів (17) и (18):

$$|X(e^{j\omega T})| = |X(e^{-j\omega T})| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}. \quad (19)$$

$$\arg\{X(e^{j\omega T})\} = \arctg\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right)$$

$$\arg\{X(e^{-j\omega T})\} = \arctg\left(\frac{-\text{Im}}{\text{Re}}\right) = -\arctg\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right). \quad (20)$$

$$\arg\{X(e^{j\omega T})\} = -\arg\{X(e^{-j\omega T})\}.$$

Звідси видно, що при зміні знаку змінної, модуль спектру не змінюється, отже, він є парною функцією частоти, а аргумент, зберігшись незмінним по абсолютній величині, змінився за знаком, отже, він є непарною функцією частоти.

4. Лінійність.

Якщо дискретний сигнал $x(nT)$ дорівнює лінійної комбінації сигналів

$$x(nT) = a_1x_1(nT) + a_2x_2(nT) + \dots$$

то його спектр $X(e^{j\omega T})$ на основі (7) дорівнює лінійної комбінації спектрів даних сигналів

$$X(e^{j\omega T}) = a_1X_1(e^{j\omega T}) + a_2X_2(e^{j\omega T}) + \dots$$

5. Зрушення (зсув, перенесення, зміщення) спектра.

Множення дискретного сигналу $x(nT)$ на комплексну експоненту $e^{j\omega_0 nT}$ приводить до зрушення його спектра по осі частот ω вправо на величину ω_0 , що символічно зручно записати в такий спосіб:

$$\begin{aligned} x(nT) &\Rightarrow X(e^{j\omega T}); \\ x(nT) e^{j\omega_0 nT} &\Rightarrow X[e^{j(\omega - \omega_0)T}] \end{aligned} \quad (21)$$

Доказ. Підставивши в праву частину перетворення Фур'є (10.7) сигнал $x(nT)e^{j\omega_0 nT}$, маємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{j\omega_0 nT} \cdot e^{-j\omega nT} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j(\omega - \omega_0)nT} = X[e^{j(\omega - \omega_0)T}].$$

Аналогічно, множення дискретного сигналу $x(nT)$ на комплексну експоненту $e^{j\omega_0 nT}$ призводить до зрушення його спектра по осі частот ω вліво на величину ω_0 , що символічно можна записати в такий спосіб:

$$\begin{aligned} x(nT) &\Rightarrow X(e^{j\omega T}) \\ x(nT)e^{-j\omega_0 nT} &\Rightarrow X[e^{j(\omega + \omega_0)T}] \end{aligned} \quad (22)$$

В обох випадках і модуль, і аргумент спектру комплексного сигналу втратили властивості парності і непарності відповідно.

Дійсно, виконаємо перетворення Фур'є (7) комплексного сигналу $x(nT)e^{j\omega_0 nT}$:

$$\begin{aligned} X[e^{-j(\omega - \omega_0)T}] &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT} e^{j\omega_0 nT} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j(\omega - \omega_0)nT} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cos(\omega - \omega_0)nT - j \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \sin(\omega - \omega_0)nT \end{aligned}$$

і запишемо модуль і аргумент спектру:

$$|X[e^{j(\omega - \omega_0)T}]| = \sqrt{\left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cos(\omega - \omega_0)nT \right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \sin(\omega - \omega_0)nT \right]^2}$$

$$\arg\{X[e^{j(\omega - \omega_0)T}]\} = \operatorname{arctg} \frac{-\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \sin(\omega - \omega_0)nT}{\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cos(\omega - \omega_0)nT}$$

Змінивши знак змінної $\omega = -\omega$, отримаємо такі вирази для модуля і аргументу:

$$|X[e^{-j(\omega+\omega_0)T}]| = \sqrt{\left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cos(\omega + \omega_0)nT \right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \sin(\omega + \omega_0)nT \right]^2};$$

$$\arg\{X[e^{-j(\omega+\omega_0)T}]\} = \arctg \frac{\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \sin(\omega + \omega_0)nT}{\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cos(\omega + \omega_0)nT}.$$

Оскільки і модуль, і аргумент спектру при зміні знаку змінної ω змінили своє значення, ці функції не є і ні парними, і ні непарними (порівняйте з (19) і (20)).

6. Зрушення сигналу $x(nT)$ на m відліків вправо (затримка сигналу).

Затримка сигналу $x(nT)$ на m відліків призводить до множення його спектра $X(e^{j\omega T})$ на комплексну експоненту $e^{-j\omega_0 nT}$, що символічно зручно записати в такий спосіб:

$$x(nT) \Rightarrow X(e^{j\omega T});$$

$$x[(n-m)T] \Rightarrow X(e^{j\omega T})e^{-j\omega mT}. \quad (23)$$

Доказ. Це властивість випливає з теореми про затримку і зв'язку z-зображення зі спектром дискретного сигналу (15):

$$Z\{x[(n-m)T]\} = X(z)z^{-m} = X(e^{j\omega T})e^{-j\omega T} =$$

$$= |X(e^{j\omega T})|e^{j \arg\{X(e^{j\omega T})\}}e^{-j\omega mT} = |X(e^{j\omega T})|e^{j \arg\{X(e^{j\omega T})\} - j\omega mT}$$

Відзначимо, що затримка сигналу призводить до зміни тільки фазового спектра (аргументу), який отримує лінійне збільшення

$$\arg\{X(e^{j\omega T})\} - \omega mT.$$

7. Рівність (теорема) Парсеваля.

Рівність Парсеваля встановлює зв'язок між енергією дискретного сигналу, обчисленої в часовій і частотній областях:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)|^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} |X(e^{j\omega T})|^2 d\omega, \quad (24)$$

де: $\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)|^2$ - енергія сигналу, що обчислена у часовій області;

$\frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} |X(e^{j\omega T})|^2 d\omega$ - енергія сигналу, що обчислена у частотній області

Якщо обробка сигналу проводиться в частотній області, рівність Парсеваля дозволяє обчислювати енергію сигналу безпосередньо по його амплітудному спектру, не вдаючись до зворотного перетворення Фур'є.

Доказ. Помножимо праву і ліву частини перетворення Фур'є (7) на комплексно-зв'язані функції (позначені символом '*'):

$$X(e^{j\omega T})X(e^{-j\omega T}) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega Tn} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^*(nT)e^{j\omega Tn} \right].$$

З урахуванням властивостей комплексних функцій

$$|X(e^{j\omega T})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)|^2 + \sum_{\substack{n \neq m \\ n=0}}^{\infty} x(nT)x^*(mT)e^{-j\omega T(n-m)}$$

Помножимо обидві частини рівності на $T/2\pi$ і проінтегруємо в межах періоду:

$$\begin{aligned} \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} |X(e^{j\omega T})|^2 d\omega &= \sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)|^2 \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} d\omega + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)x^*(mT) \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{-j\omega T(n-m)} d\omega \end{aligned}$$

Обчисливши найпростіші інтеграли в правій частині:

$$\frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} d\omega = 1 \text{ и } \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} d\omega e^{-j\omega T(n-m)} d\omega = 0,$$

отримаємо рівність Парсеваля (24).

3. Зв'язок між спектрами аналогового і дискретного сигналів

Нехай є аналоговий сигнал $x_a(t)$ і сигнал $x(nT)$, отриманий в результаті його дискретизації. Визначимо зв'язок між їх спектрами. Аналоговий сигнал $x_a(t)$ і його спектр (фур'є-зображення) (фур'є-зображення в (11) являє собою комплексну спектральну щільність) при $X_a(\omega) = 0$ пов'язані перетворенням Фур'є:

$$X_a(j\omega) = \int_0^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (25)$$

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (26)$$

Замінімо в (26) неперервний час дискретним $t \Rightarrow nT$:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega$$

а обчислення інтеграла на інтервалі $[-\infty; \infty]$ - тотожним обчисленням

нескінченної суми інтегралів $\sum_{m=-\infty}^{\infty}$ на рівних інтервалах

$$\Delta(\omega) = \omega_d = \frac{2\pi}{T}.$$

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)\frac{\pi}{T}}^{(2m+1)\frac{\pi}{T}} X_a(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega,$$

де m – номер інтервалу $\omega_d = \frac{2\pi}{T}$ (рис.1).

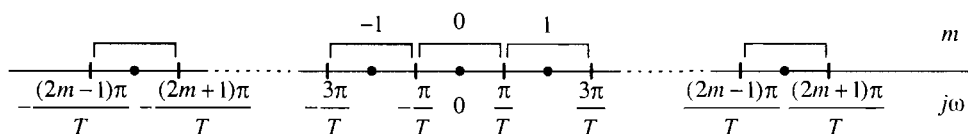


Рис. 1. Нескінченна послідовність інтервалів

Інтеграл $\int_{(2m-1)\frac{\pi}{T}}^{(2m+1)\frac{\pi}{T}}$ з змінними межами, але незалежною від m

підінтегральною функцією $X_a(j\omega)$, можна замінити інтегралом з

фіксованими межами $\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}$, але залежною від m підінтегральною функцією

$X_a[j(\omega + m\frac{2\pi}{T})]$, яка являє собою спектр аналогового сигналу, зрушений по

осі частот на $m\omega_d = m\frac{2\pi}{T}$, де $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$, (див. рис. 10.1). При заміні

$$\omega \Rightarrow \omega + m\frac{2\pi}{T}$$

остання рівність набуде вигляду

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_a \left[j \left(\omega + m\frac{2\pi}{T} \right) \right] e^{j(\omega + m\frac{2\pi}{T})nT} d\left(\omega + m\frac{2\pi}{T} \right)$$

Звідки з урахуванням

$$e^{j\left(\omega + m\frac{2\pi}{T}\right)nT} = e^{j\omega nT};$$

$$d\left(\omega + m\frac{2\pi}{T}\right) = d\omega,$$

отримаємо

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_a \left[j \left(\omega + m\frac{2\pi}{T} \right) \right] e^{j\omega nT} d\omega$$

Змінимо порядок підсумовування і інтегрування

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a \left[j \left(\omega + m\frac{2\pi}{T} \right) \right] e^{j\omega nT} d\omega$$

і порівняємо отриманий вираз зі зворотним перетворенням Фур'є (10). На підставі рівності лівих і, відповідно, правих частин знаходимо шуканий зв'язок між спектрами аналогового і дискретного сигналів:

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a \left[j \left(\omega + m \frac{2\pi}{T} \right) \right] \quad (27)$$

з якої випливає, що спектр дискретного сигналу дорівнює (з точністю до постійного множника $1/T$) сумі спектрів аналогового сигналу, що зсунутий по осі частот на всі можливі частоти, кратні частоті дискретизації $m\omega_d = m \frac{2\pi}{T}$, де $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$,

Іншими словами, спектр дискретного сигналу є нескінченна сума копій спектрів аналогового сигналу, що зсунуті один щодо одного на частоту дискретизації ω_d .

Дослідимо вплив частоти дискретизації ω_d на співвідношення між спектрами (27), вважаючи, що спектр $X_a(j\omega)$ аналогового сигналу обмежений верхньою частотою $\omega_b = 2\pi f_b$.

На рис. 2, а-г наведені умовні графіки амплітудних спектрів:

- аналогового сигналу з фінітним спектром (рис. 2, а);
- дискретного сигналу при частотах дискретизації: $\omega_d = 2\omega_b$ (рис. 2, б), $\omega_d > 2\omega_b$ (рис. 2, в) і $\omega_d < 2\omega_b$ (рис. 2, г).

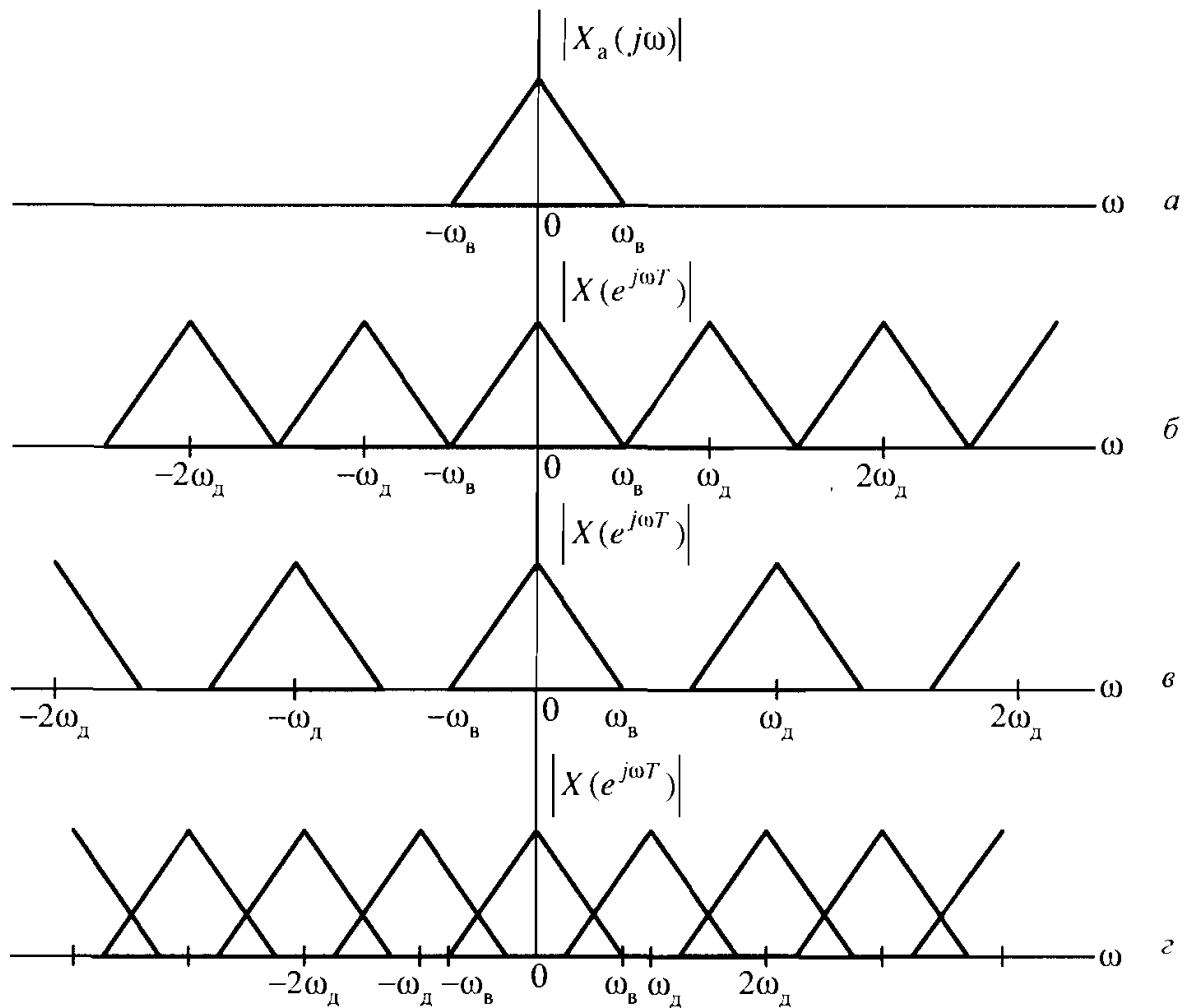


Рис. 2 Амплітудні спектри: аналогового сигналу (а); дискретного сигналу:

$$\omega_{\text{д}} = 2 \omega_{\text{в}} \text{ (б)}, \quad \omega_{\text{д}} > 2 \omega_{\text{в}} \text{ (в)} \quad \text{і} \quad \omega_{\text{д}} < 2 \omega_{\text{в}} \text{ (г)}$$

Наведені графіки дозволяють зробити наступні висновки:

1. Якщо частота дискретизації $\omega_{\text{д}} \geq 2\omega_{\text{в}}$, то в основній смузі $[0; \frac{\omega_{\text{д}}}{2}]$ спектри аналогового і дискретного сигналів збігаються.

2. Якщо частота дискретизації $\omega_{\text{д}} < 2\omega_{\text{в}}$, відбувається накладення спектрів, зване елайсінгом, тому в основній смузі частот $[0; \frac{\omega_{\text{д}}}{2}]$ спектр дискретного сигналу являє собою спотворений спектр аналогового сигналу. У часовій області ефект накладення означає незворотну втрату можливості точного відновлення аналогового сигналу за його відліками.

Дані висновки узгоджуються з теоремою Котельникова: аналоговий сигнал з фінітним спектром повністю визначається послідовністю своїх відліків, взятих з інтервалом $T \leq \frac{1}{2f_n}$ (з частотою $f_{\partial} \geq 2f_n$), де f_n – верхня частота спектру аналогового сигналу.

Реальні сигнали кінцевої тривалості теоретично мають нескінченний спектр. Отже частота дискретизації $f_{\partial} \rightarrow \infty$ і при будь-якому кінцевому значенні принципово існує елайсінг. Практично, однак, завжди можна визначити найвищу частоту спектра f_n оброблюваного сигналу таким чином, щоб енергією сигналу, що відповідає відсіченій частині спектра можна знехтувати. Попереднє обмеження спектру сигналу, що обробляється, виконується за допомогою антиелайсінгового аналогового фільтра. Наприклад, при формуванні стандартного телефонного сигналу вихідний мовний сигнал пропускається через смуговий антиелайсінговий фільтр з смугою пропускання 0,3-0,4 кГц. Нижня межа обумовлена необхідністю усунення постійної складової і придушенням гармонік промислових частот, а верхня - заданою якістю сприйняття мовного сигналу (збереженням повної розбірливості, тембру голосу і т.п.). Мінімально допустимою частотою дискретизації буде $f_{\partial} = 6,8$ кГц, а в якості стандартної обрана $f_{\partial} = 8$ кГц.