Лекція 7

Структурні схеми цифрових фільтрів

Структурна схема (структура) ЦФ відображає алгоритм обчислення реакції. В часовій області співвідношення вхід/вихід при відомих параметрах ЦФ описується різницевим рівнянням (РР)

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i\, x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k\, y(n-k) \qquad (1)$$

Дане рівняння вирішується методом прямої підстановки при нульових початкових умовах. Таким чином, алгоритм обчислення реакції задається безпосередньо різницевим рівнянням, і в цьому сенсі структура ЦФ відображає різницеве рівняння.

Алгоритм обчислення реакції РР (1) заснований на виконанні трьох тип операцій з відліками сигналу:

- затримки на період дискретизації Т;
- множення на константу;
- алгебраїчного додавання.

На структурній схемі їм стає у відповідність три види елементів:

- елемент затримки (рис. 1, а);
- помножувач (рис. 1, б);
- суматор (рис. 1, в).

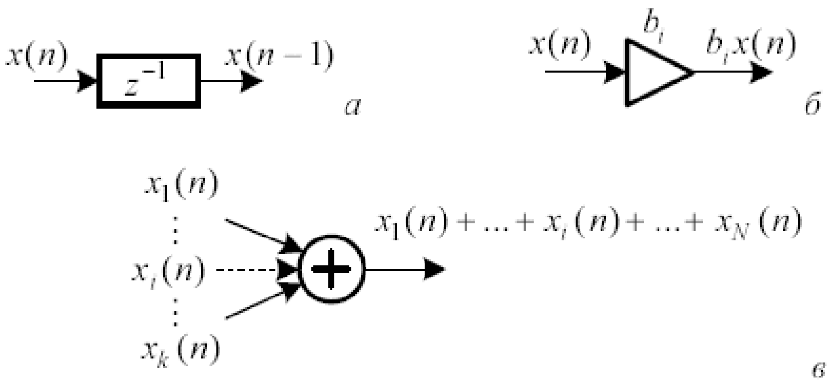

Рис. 1. Елементи структурної схеми ЦФ: елемент затримки (а), помножувач (б), суматор (в)

Умовне зображення елементу затримки пов'язано з тим, що затримка сигналу на період дискретизації Т відображається в z-області множенням z-зображення даного сигналу на z^{-1}:

$x(nT) \; \rightarrow X(z)$;

$x(nT - T) \; \rightarrow X(z)z^{-1}$.

Фізично елемент затримки являє собою регістр, який зберігає один попередній (затриманий) відлік сигналу.

Структура ЦФ може бути реалізована апаратно або програмно. У першому випадку - у вигляді спеціалізованого цифрового пристрою на інтегральних логічних елементах, у другому - у вигляді програми на комп'ютері або цифровому процесорі обробки сигналів (ЦПОСІ). Розвиток технології ЦПОСІ зробило програмну реалізацію переважаючою.

Різницевому рівнянню (1) відповідає передаточна функція (2).

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-1}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \qquad (2)$$

Однак передаточна функція може мати і інші, еквівалентні види математичного уявлення і, отже, різницеві рівняння можуть мати різні види, які відображаються різними структурами ЦФ. Ось чому структура ЦФ визначається видом передаточної функції.

З цих позицій розглянемо структури рекурсивних і не рекурсивних ЦФ.

1. Структури рекурсивних ЦФ

Рекурсивним ЦФ відповідають три основних види математичного уявлення ПФ H (z):

- дрібно-раціональний:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-1}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}$$

• добуток множників другого порядку:

$H(z) = \prod_{k=1}^{K} H_k(z) = \prod_{k=1}^{K} \left(\frac{b_{0k}+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}\right)$);

• сума дробів другого порядку:

$H(z) = \sum_{k=1}^{K} H_k(z) = \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{b_{0k}+b_{1k}z^{-1}}{1+a_{1k}z^{-1}}\right)$, які визначають три основні структури:

• пряму;

• каскадну;

• паралельну;

1.1. Пряма структура

Пряма структура визначається передаточною функцією $H(z)$ (2), представленою в дрібно-раціональному вигляді (в загальному вигляді):

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}$$

і відображає різницеве рівняння (1)

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i X(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k)$$

На рис. 2 приведена пряма структура ЦФ 2-го порядку, що описується передаточною функцією $H(z) = \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$ і різницевим рівнянням

$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2).$).

.

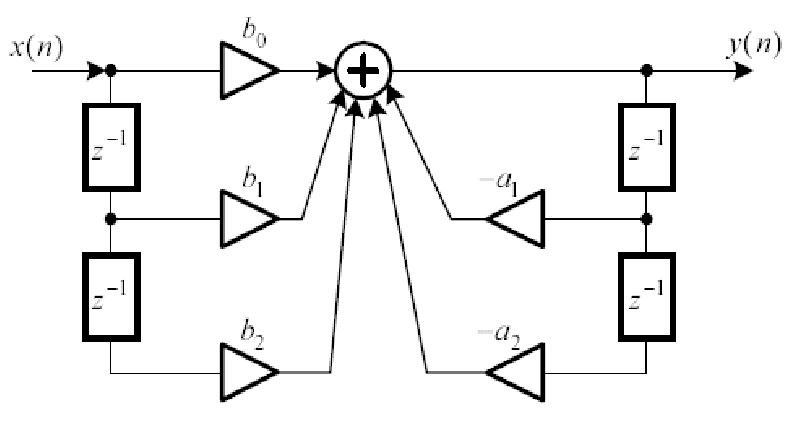

Рис. 2. Пряма структура ЦФ 2-го порядка

У загальному випадку пряма структура містить [(N - 1) + (M - 1)] елементів затримки, з них: (N - 1) - для попередніх відліків реакції. Розглянемо канонічні структури, що дозволяють звести число елементів затримки до мінімуму. Структуру називають канонічною, якщо число елементів затримки в ній мінімально і одно порядку передаточної функції - max {(M - 1), (N - 1)}. Розглянемо три різновиди таких структур.

1.2. Пряма канонічна структура 1

Пряма канонічна структура 1 визначається еквівалентним поданням передаточної функції $H(z)$ (2) у вигляді добутку передаточних функцій

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} = \frac{V(z)}{X(z)} \cdot \frac{Y(z)}{V(z)} = H_1(z) H_2(z), \qquad (3)$$

одна з яких описує частину ЦФ

$$H_1(z) = \frac{V(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}},$$

а друга – нерекурсивну

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}$$

Передаточним функціям $H_1(z), H_2(z)$, згідно їх визначенню, відповідають різницеві рівняння:

$$v(n) = x(n) - \sum_{k-1}^{M-1} a_k v(n-k) \qquad (4)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i v(n-i); \qquad (5)$$

які відображаються прямими структурами.

На рис.3, а показана пряма структура ЦФ 2-го порядку у вигляді послідовного з'єднання рекурсивної (4) і нерекурсивної (3) частин. В цьому випадку ПФ (3) і (4) приймають вид

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}(b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}); \tag{6}$$

$$v(n) = x(n) - \ a_1v(n-1) - a_2v(n-2); \tag{7}$$

$$y(n) = b_0v(n) + \ b_1v(n-1) + b_2v(n-2); \tag{8}$$

Об'єднання двох ліній затримки в одну (на підставі рівності вхідного і вихідного сигналів в точці А) призводить до прямої канонічної структурі 1 (рис. 3, б).

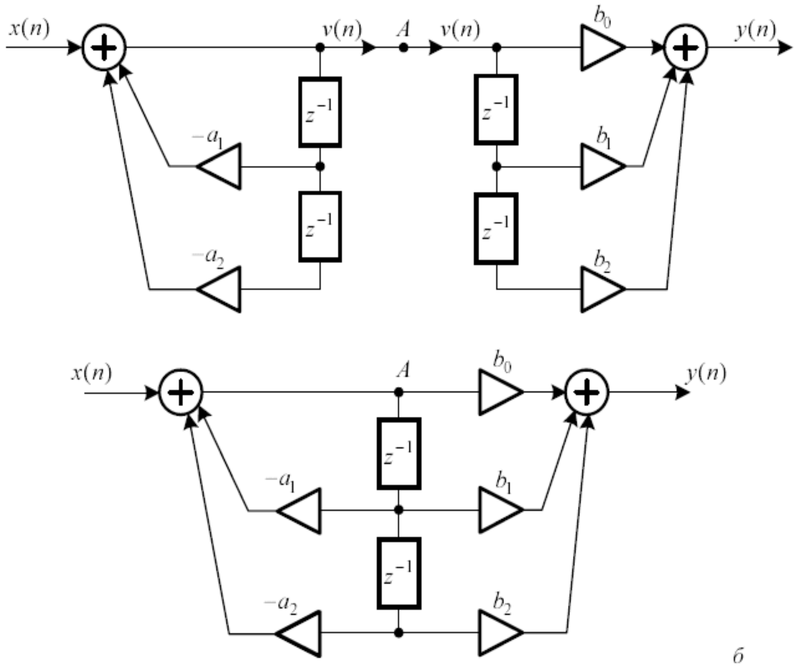

Рис. 3. Пряма канонічна структура 1 ЦФ 2-го порядку:
послідовне з'єднання рекурсивної і нерекурсивною частин (а);
об'єднання двох ліній затримки в одну (б)

1.3. Канонічна структура 2

Канонічна структура 2 визначається іншим еквівалентним поданням передаточної функції $H(z)$ (2), яке можна отримати шляхом ділення чисельника на знаменник за правилом ділення многочленів при $N = M$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} = b_0 + \frac{\sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} =$$

(9)

$$= H_{\text{нр}}(z) + H_{\text{р}}(z) \ = \frac{Y_{\text{нр}}}{X(z)} + \ \frac{Y_{\text{нр}}}{X(z)}$$

в результаті чого H (z) представляється у вигляді суми передаточних функцій, що описують нерекурсивну (з індексом 'нр'))

$$H_{\text{нр}}(z) = \frac{Y_{\text{нр}}}{X(z)} + \ b_0 \tag{10}$$

і рекурсивну (з індексом ‘р’)

$$H_{\text{р}}(z) \ = \frac{Y_{\text{р}}}{X(z)} = \frac{\sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \tag{11}$$

частини ЦФ.

Передаточній функції $H_{\text{нр}}(z)$ (10) відповідає різницеве рівняння

$$y_{\text{нр}}(n) = \ b_0 x(n) \tag{12}$$

Для того щоб отримати РР, відповідне $H_{\text{р}}(z)$), представимо її, подібно (2), у вигляді добутку двох передаточних функцій

$$H_{\text{р}}(z) \ = \frac{Y_{\text{р}}(z)}{X(z)} = \frac{V(z)}{X(z)} \cdot \frac{Y_p(z)}{X(z)} = H_{\text{р}1}(z) H_{\text{р}2}(z)$$

$$= \ \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k}$$

і запишемо рівняння (4) и (5):

$$v(n) = x(n) - \sum_{k-1}^{M-1} a_k v(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k-1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) v(n-k)$$

сукупність яких відображається прямою канонічною структурою 1. В результаті передаточній функції *H(z)* (9)

$$H(z) \; = H_{\text{нр}}(z) + H_{\text{р1}}(z) H_{\text{р2}}(z) = b_0 + \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k} (13)$$

відповідає система різницевих рівнянь

$$\begin{cases} y(n) = y_{\text{нр}}(n) + y_{\text{р}}(n) = \; b_0 x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k} \, v(n-k); \\ v(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k v(n-k), \end{cases} \quad (14)$$

Відображається канонічною структурою 2.

На рис.4 приведена канонічна структура 2 ЦФ 2-го порядку. В цьому випадку ПФ (13) і система РР (11) приймають вид:

$$H(z) = \; b_0 + \; \frac{1}{1+a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} [(b_1 - b_0 a_1) z^{-1} + (b_2 - b_0 a_2) z^{-2}]; \quad (15)$$

$$\begin{cases} y(n) = b_0 x(n) + (b_1 - b_0 a_1) v(n-1) + (b_2 - b_0 a_2) v(n-2); \\ v(n) = x(n) - a_1 V(n-1) - a_2 v(n-2). \end{cases} \quad (16)$$

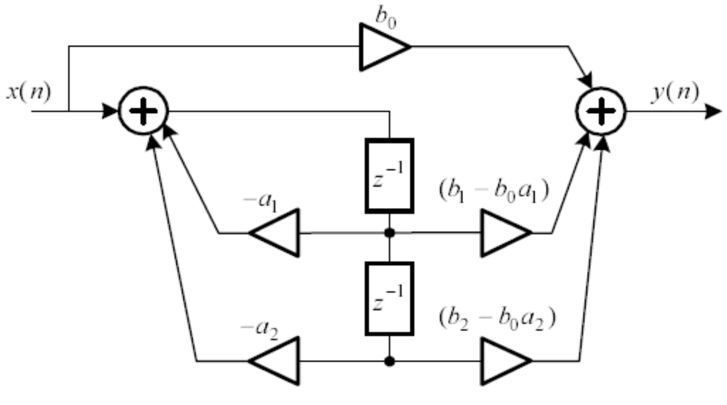

Рис. 7.4. Канонічна структура 2 ЦФ 2-го порядку

1.4 Канонічна структура 3

Канонічна структура 3 визначається ще одним еквівалентним поданням передаточної функції *H(z)* (2), яке отримують у такий спосіб:

• вважаючи N = M, помножимо ліву і праву частини (2) на $1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}$:

$$H(z)\left(1+\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{-i}}{\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}\left(1+\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}\right);$$

- скоротимо загальні множники в чисельнику і знаменнику справа:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{-i} - H(z)\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}\,;$$

- уявимо передаточну функцію у вигляді розкладання (в сходовій формі [6]):

$$\begin{cases} H(z) = b_0 + z^{-1}H_1(z) \\ H_1(z) = [b_1 - a_1 H(z)] + z^{-1}H_2(z) \\ \dots \\ H_{M-1}(z) = b_{M-1} - a_{M-1}H_1(z) \end{cases}$$

таким чином, що $H(z)$ визначається послідовною підстановкою від низу до верху.

Отримаємо систему різницевих рівнянь, що відповідає даній ПФ, для чого:

- помножимо ліву і праву частини все рівності (15) на X (z):

$$\begin{cases} H(z)X(z) = b_0 + z^{-1}H_1(z)X(z) \\ H_1(z)X(z) = [b_1 - a_1 H(z)]X(z) + z^{-1}H_2(z)X(z); \\ \dots \\ H_{M-1}(z)X(z) = b_{M-1}X(z) - a_{M-1}H_1(z)X(z); \end{cases}$$

- позначимо:

$$\begin{cases} Y(z) = H(z)X(z); \\ V_1(z) = H_1(z)X(z); \\ \dots \\ V_{M-1}(z) = H_{M-1}(z)X(z); \end{cases}$$

- підставимо в (16):

$$\begin{cases} Y(z) = b_0 H(z) + z^{-1} V_1(z); \\ V_1(z) = b_1 X_1(z) - a_1 Y(z) + V_2(z); \\ \dots \\ V_{N-1}(z) = b_{N-1} X(z) - a_{N-1} Y(z); \end{cases}$$

- використовуючи властивість Z-перетворення, представимо РР в вигляді системи:

$$\begin{cases} y(n) = b_0 x(n) + v_1(n-1); \\ y_1(n) = b_1 x(n) - a_1 y(n) + v_2(n-1); \\ \dots \\ v_{M-1}(n) = b_{M-1} x(n) - a_{M-1} y(n). \end{cases} \quad (17)$$

Вона вирішується знизу вгору і відображається канонічною структурою 3.

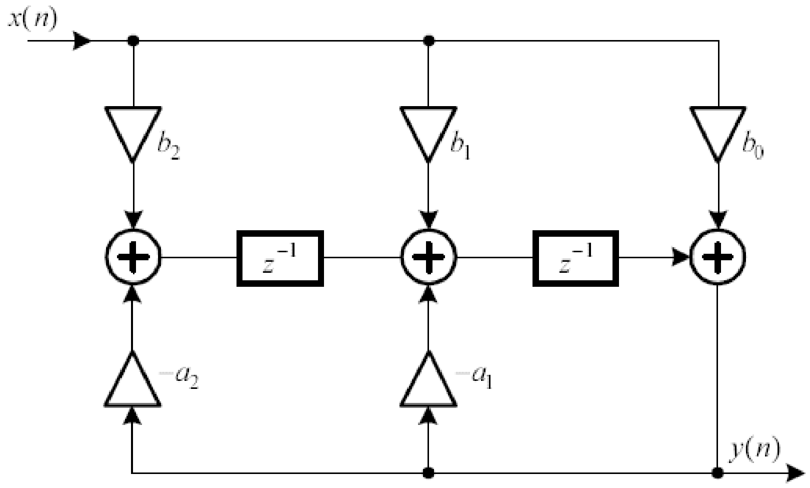

Рис. 5. Канонічна структура 3 ЦФ 2-го порядку

На рис. приведена канонічна структура 3 ЦФ 2-го порядку. В цьому випадку ПФ (16) і система РР (17) приймають вид:

$$\begin{cases} H(z) = b_0 + z^{-1} H_1(z); \\ H_1(z) = [b_1 - a_1 H(z)] + z^{-1} H_2(z); \\ H_2(z) = b_2 - a_2 H(z), \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} y(n) = b_0 x(n) + v_1(n-1); \\ y_1(n) = b_1 x(n) - a_1 y(n) + v_2(n-1); \\ y_2(n) = b_2 x(n) - a_2 y(n). \end{cases} \tag{19}$$

1.5. Каскадна структура

Каскадна структура визначається передаточною функцією *H(z),* представленої у вигляді добутку множників другого порядку:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{K} H_k(z) = \prod_{k=1}^{K} \left(\frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \right),$$

де $b_{0k}, b_{1k}, b_{2k}, a_{1k}, a_{2k}$ – дійсні коефіцієнти, а К – кількість ЦФ 2-го порядку.

При прямий структурі всіх ланок (див. рис. 2) даному виду передаточної функції відповідає система різницевих рівнянь

$$\begin{cases} v_1(n) = b_{01} x(n) + b_{11} x(n-1) + b_{21} x(n-2) - a_{11} v_1(n-1) - a_{21} v_1(n-2); \\ v_2(n) = b_{02} v_1(n) + b_{12} v_1(n-1) + b_{22} v_1(n-2) - a_{12} v_2(n-1) - a_{22} v_2(n-2); \\ \dots \\ y(n) = b_{0,K-1} v_{K-1}(n) + b_{1,K-1} v_{K-1}(n-1) + b_{2,K-1} v_{K-1}(n-2) - a_{1,K-1} y(n-1) - \\ -a_{2,K-1} y(n-2), \end{cases}$$

з якої випливає, що реакція k-ї ланки, k = 1,2, ..., (К - 1), служить впливом для (k + 1) -го ланки, тому дана система відображається каскадним з'єднанням рекурсивних ланок 2-го порядку - каскадною структурою.

На рис. 6 зображена каскадна структура з трьох ланок 2-го порядку прямий або канонічної структури.

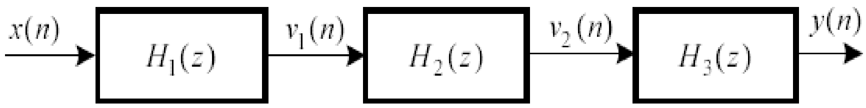

Рис. 6. Каскадна структура з трьох ЦФ 2-го порядку

1.6. Паралельна структура

Паралельна структура визначається передаточною функцією *H(z),* представленої у вигляді суми дробів другого порядку:
H(z) (5.19), представленной в виде суммы дробей второго порядка:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{K} H_k(z) = \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right)$$

де $b_{0k}, b_{1k}, a_{1k}, a_{2k}$ – дійсні коефіцієнти, а К – кількість ЦФ 2-го порядку.

Отримаємо різницеве рівняння, що відповідає даному виду ПФ, для чого:

- помножимо ліву і праву частини всіх рівнянь на X(z):

$$Y(z) = H(z)X(z) = \sum_{k=1}^{K} H_k(z) = \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) X(z);$$

- позначимо:

$$V_k(z) = H_k(z)X(z) = \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} X(z),$$

в результаті чого маємо співвідношення вхід / вихід у вигляді

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-1}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} X(z)$$

- підставимо в реакцію *Y(z)*) у вигляді суми реакцій:

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{K} V_k(z);$$

- виконаємо зворотне Z-перетворення лівої і правої частин і запишемо шукане різницеве рівняння:

$$Y(n) = \textstyle\sum_{k=1}^{K} V_k(n); \qquad (20)$$

де

$$v_k(n) = b_{0k}x(n) + b_{1k}x(n-1) - a_{1k}v_1(n-1) - a_{2k}v_k(n-2) \qquad (21)$$

З РР (20) випливає, що вплив для всіх ланок однаковий, а реакція дорівнює сумі реакцій окремих ланок, тому дане РР відображається паралельним з'єднанням рекурсивних ЦФ 2-го порядку – паралельною структурою.

На рис. 7 зображена паралельна структура з трьох ЦФ 2-го порядку прямої або канонічної структури.

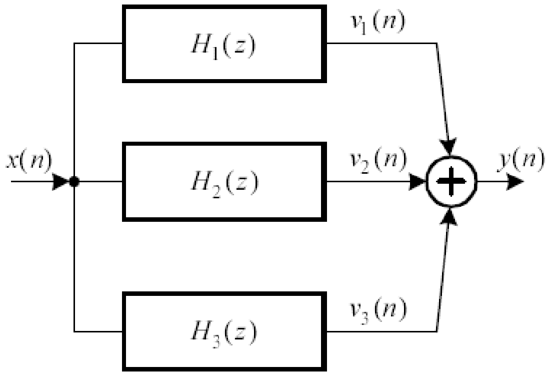

Рис. **7.** Параллельна структура з трьох ЦФ 2-го порядку

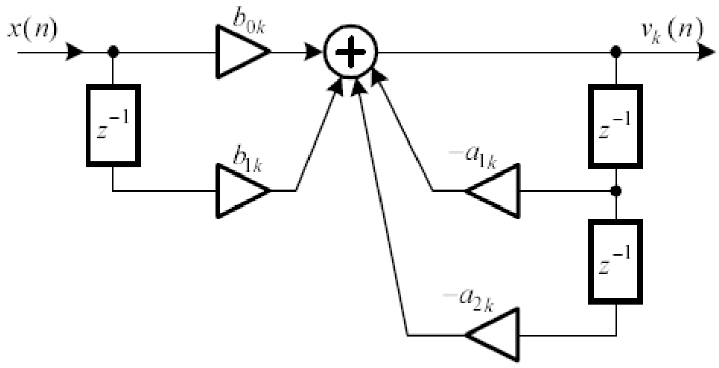

Рис. 8. Пряма структура ЦФ 2-го порядку при паралельній структурі

На рис. 8 наведено приклад прямої структури ЦФ 2-го порядку, що описується ПФ

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

і РР

$$(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2).$$

при $b_2 = 0$.

2. Структури нерекурсивних ЦФ

Передаточна функція нерекурсивних ЦФ може розглядатися як окремий випадок *H(z)*, загального вигляду (2) при *k* = 1,2, ..., (M - 1). В цьому випадку знаменник *H(z)*виявляється рівним 1, а дрібно-раціональна функція - раціональною.

Нерекурсивним ЦФ відповідають два основних види математичного уявлення ПФ *H(z)*:

• раціональний $H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_1 z^{-i}$;

• добуток множників другого порядку

$H(z) = b_0 \prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} H_i(z) = b_0 \prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} (b_{0i} + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2})$, які визначають дві основні структури:

• пряму;

• каскадну;

2.1. Пряма структура

Пряма структура (рис. .9) визначається передаточною функцією *H(z)*), представленої у вигляді раціональної функції

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i};$$

і відображає різницеве рівняння

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i);$$

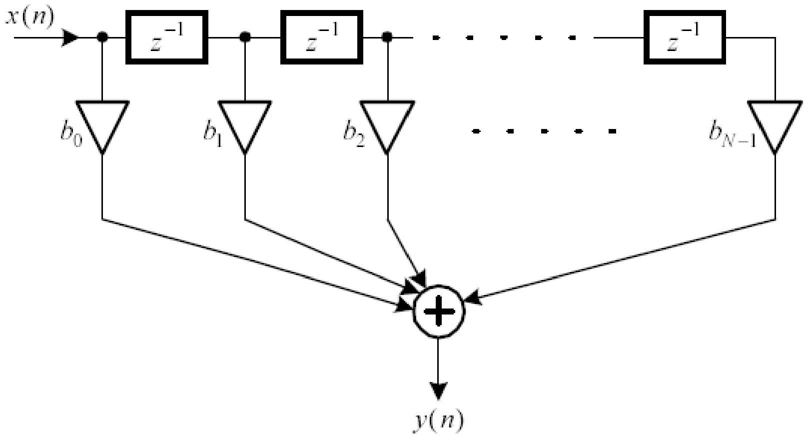

Рис. 9. Пряма структура нерекурсивного ЦФ

2.2. Каскадная структура

Каскадна структура визначається передаточною функцією *H(z)*, що представлена в вигляді добутку множників 2 порядку:

$$H(z) = \prod_{i=1}^{K} H_i(z) = \prod_{i=1}^{K}(b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}), \qquad (22)$$

де b_{0i}, b_{1i}, b_{2i} – дійсні коефіцієнти, а К – кількість ЦФ 2-го порядку.

ПФ (22) відповідає система різницевих рівнянь нерекурсивних ЦФ 2-го порядку

$$\begin{cases} v_1(n) = b_{01}x(n) + b_{11}x(n-1) + b_{21}x(n-2); \\ v_2(n) = b_{02}v_1(n) + b_{12}v_1(n-1) + b_{22}v_1(n-2); \\ \dots \\ y(n) = b_{0,K-1}v_{K-1}(n) + b_{1,K-1}v_{K-1}(n-1) + b_{2,K-1}v_{K-1}(n-2) \end{cases}$$

що відображається каскадною структурою (див. рис. 6), де кожна ланка має пряму структуру (рис. 10).

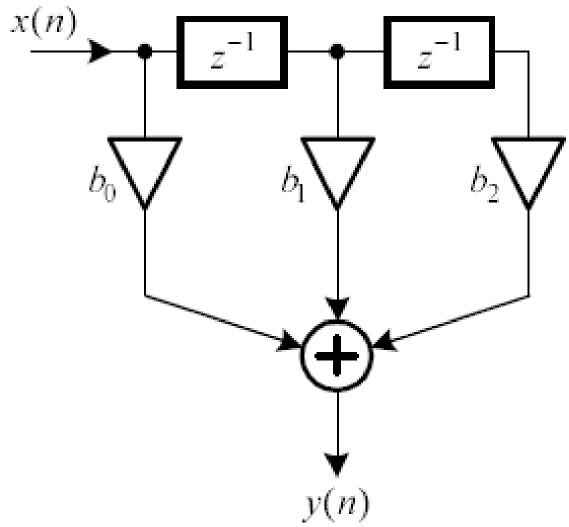

Рис. 10. Пряма структура ЦФ 2-го порядку нерекурсивного ЦФ

3. Вибір структури

Оскільки одна і та ж передаточна функція може бути представлена в різних видах, виникає питання про неоднозначність структури ЦФ і її виборі:

• для цифрових фільтрів вид передаточної функції визначається методом синтезу, тим самим структура по суті виявляється автоматично обраної: для рекурсивних фільтрів зазвичай вона каскадна або паралельна, а для нерекурсивних - пряма приведена;

• при виборі структури окремих ланок 2-го порядку і послідовності їх розташування в каскадному з'єднанні необхідно мати на увазі, що від цього залежить похибка обчислень - власні шуми системи.