# **ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ**

Кожній задачі ЛП зі змішаними умовами-обмеженнями можна поставити у відповідність так звану двоїсту задачу.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$F=\sum\_{j=1}^{n}c\_{j}x\_{j}\rightarrow max$$$$\left\{\begin{array}{c}\sum\_{j=1}^{n}a\_{ij}x\_{j}\leq b\_{i},i=\overline{1,m\_{1}},m\_{1}\leq m\\\sum\_{j=1}^{n}a\_{ij}x\_{j}=b\_{i},i=\overline{m\_{1}+1,m}\\x\_{j}\geq 0,j=\overline{1,n\_{1}},n\_{1}\leq n\end{array}\right.$$ |  | $$\tilde{F}=\sum\_{i=1}^{m}b\_{i}y\_{i}\rightarrow min$$$$\left\{\begin{array}{c}\sum\_{i=1}^{m}a\_{ij}y\_{i}\geq c\_{j},j=\overline{1,n\_{1}},n\_{1}\leq n\\\sum\_{i=1}^{m}a\_{ij}y\_{i}=c\_{j},j=\overline{n\_{1}+1,n}\\y\_{i}\geq 0,i=\overline{1,m\_{1}},m\_{1}\leq m\end{array}\right.$$ |

Співставляючи форми запису прямої та двоїстої задач, можна встановити такі взаємозв’язки між ними:

1. якщо пряма задача є задачею на *max*, то двоїста задача буде задачею на *min*, і навпаки,

якщо пряма задача є задачею на *min*, то двоїста задача буде задачею на *max*;

1. вагові коефіцієнти цільової функції прямої задачі $c\_{1}, c\_{2},…, c\_{n}$ стають вільними членами умов-обмежень двоїстої задачі;
2. вільні члени умов-обмежень прямої задачі $b\_{1}, b\_{2},…, b\_{m}$ стають ваговими коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі;
3. матриця умов-обмежень двоїстої задачі отримується транспонуванням матриці умов-обмежень прямої задачі;
4. на основі викладеного вище можна підсумувати: кількість змінних двоїстої задачі дорівнює кількості умов-обмежень прямої задачі, а кількість умов-обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості змінних прямої задачі, і навпаки,

кількість змінних прямої задачі дорівнює кількості умов-обмежень двоїстої задачі, а кількість умов-обмежень прямої задачі дорівнює кількості змінних двоїстої задачі;

1. взаємно однозначна відповідність між змінними прямої задачі та умовами-обмеженнями двоїстої задачі така:

j-та умова-обмеження двоїстої задачі буде нерівністю, якщо на j-ту змінну прямої задачі накладена вимога невід’ємності, інакше j-та умова-обмеження буде рівністю.

Пара задач ЛП може бути симетричною й несиметричною.

У симетричних задачах система умов-обмежень задається у вигляді нерівностей і на значення, які можуть приймати змінні, накладена вимога невід’ємності їхніх значень.

У несиметричних задачах система умов-обмежень прямої задачі задається рівностями, а система умов-обмежень двоїстої задачі – нерівностями, причому змінні в ній можуть бути й від’ємними.

|  |
| --- |
| **Симетричні** |
| Пряма$$F\left(X\right)=C^{T}X\rightarrow max$$$$AX\leq B$$$$X\geq 0$$ | **(1)** | Двоїста$$\tilde{F}\left(Y\right)=B^{T}Y\rightarrow min$$$$A^{T}Y\geq C$$$$Y\geq 0$$ |
| Пряма$$F\left(X\right)=C^{T}X\rightarrow min$$$$AX\geq B$$$$X\geq 0$$ | **(2)** | Двоїста$$\tilde{F}\left(Y\right)=B^{T}Y\rightarrow max$$$$A^{T}Y\leq C$$$$Y\geq 0$$ |
| **Несиметричні** |
| Пряма$$F\left(X\right)=C^{T}X\rightarrow max$$$$AX=B$$$$X\geq 0$$ | **(3)** | Двоїста$$\tilde{F}\left(Y\right)=B^{T}Y\rightarrow min$$$$A^{T}Y\geq C$$$$-$$ |
| Пряма$$F\left(X\right)=C^{T}X\rightarrow min$$$$AX=B$$$$X\geq 0$$ | **(4)** | Двоїста$$\tilde{F}\left(Y\right)=B^{T}Y\rightarrow max$$$$A^{T}Y\leq C$$$$-$$ |

Сумісний або спільний розгляд таких пар задач дозволяє дослідити вплив зміни керованих і некерованих змінних системи на значення цільової функції, проводити економічний аналіз результатів розрахунків.

## **Пряма задача**

$$F\left(x\_{1},x\_{2}\right)=3x\_{1}+2x\_{2}\rightarrow min$$

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}-2x\_{2}\leq 3\\2x\_{1}-x\_{2}\leq 10\\3x\_{1}-x\_{2}\geq -5\\-x\_{1}+x\_{2}\geq 3\\x\_{1},x\_{2}\geq 0\end{array}\right.$$

Приводимо математичну модель задачі до канонічного вигляду. Обернемо нерівності в рівності шляхом введення вільних змінних ­– $x\_{3},x\_{4},x\_{5},x\_{6}$:

$$F^{'}\left(x\_{1},x\_{2},…,x\_{6}\right)=-3x\_{1}-2x\_{2}+0x\_{3}+0x\_{4}+0x\_{5}+0x\_{6}\rightarrow max$$

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}-2x\_{2}+1x\_{3}+0x\_{4}+0x\_{5}+0x\_{6}=3\\2x\_{1}-x\_{2}+0x\_{3}+1x\_{4}+0x\_{5}+0x\_{6}=10\\-3x\_{1}+x\_{2}+0x\_{3}+0x\_{4}+1x\_{5}+0x\_{6}=5\\-x\_{1}+x\_{2}+0x\_{3}+0x\_{4}+0x\_{5}-1x\_{6}=3\\x\_{1},x\_{2},…,x\_{6}\geq 0\end{array}\right.$$

Для отримання початкового допустимого розв’язку задачі введемо в останню умову-обмеження штучну змінну $x\_{7}$:

$$F^{'}\left(x\_{1},x\_{2},…,x\_{7}\right)=-3x\_{1}-2x\_{2}+0x\_{3}+0x\_{4}+0x\_{5}+0x\_{6}-Mx\_{7}\rightarrow max$$

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}-2x\_{2}+1x\_{3}+0x\_{4}+0x\_{5}+0x\_{6}+0x\_{7}=3\\2x\_{1}-x\_{2}+0x\_{3}+1x\_{4}+0x\_{5}+0x\_{6}+0x\_{7}=10\\-3x\_{1}+x\_{2}+0x\_{3}+0x\_{4}+1x\_{5}+0x\_{6}+0x\_{7}=5\\-x\_{1}+x\_{2}+0x\_{3}+0x\_{4}+0x\_{5}-1x\_{6}+1x\_{7}=3\\x\_{1},x\_{2},…,x\_{7}\geq 0\end{array}\right.$$

$x\_{1}=0,x\_{2}=0,x\_{3}=3,x\_{4}=10,x\_{5}=5,x\_{7}=3$.

Складемо вихідну симплекс-таблицю:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | $$-M$$ |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ | $$A\_{6}$$ | $$A\_{7}$$ |
| 0 | $$x\_{3}$$ | 3 | 1 | -2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $$x\_{4}$$ | 10 | 2 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $$x\_{5}$$ | 5 | -3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $$-M$$ | $$x\_{7}$$ | 3 | -1 | **1** | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 |
|  | $$∆$$ | $$-3M$$ | $$M+3$$ | $$-M+2$$ | 0 | 0 | 0 | $$M$$ | 0 |

Напрямний стовпець – $A\_{2}$, напрямний рядок – $x\_{7}$, напрямний елемент – $x\_{72}$.

Розраховуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ | $$A\_{6}$$ |
| 0 | $$x\_{3}$$ | 9 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | -2 |
| 0 | $$x\_{4}$$ | 13 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 |
| 0 | $$x\_{5}$$ | 2 | -2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| -2 | $$x\_{2}$$ | **3** | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 |
|  | $$∆$$ | -6 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |

Всі оцінки $∆j, j=\overbar{1,6},\geq 0-$ отриманий оптимальний розв'язок задачі:

$x\_{1}=0,x\_{2}=3,F\_{min}=6$***.***

## **Двоїста задача**

Оскільки система умов-обмежень прямої задачі задана у вигляді нерівностей, то в даному випадку (на змінні накладена вимога невід’ємності) можна розглядати пару задач.

Приведемо математичну модель задачі до вигляду **(1)**:

$$F^{'}\left(x\_{1},x\_{2}\right)=-3x\_{1}-2x\_{2}\rightarrow max$$

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}-2x\_{2}\leq 3\\2x\_{1}-x\_{2}\leq 10\\-3x\_{1}+x\_{2}\leq 5\\x\_{1}-x\_{2}\leq -3\\x\_{1},x\_{2}\geq 0\end{array}\right.$$

Тоді двоїста задача виглядатиме так:

$$\tilde{F}\left(y\_{1},y\_{2},y\_{3},y\_{4}\right)=3y\_{1}+10y\_{2}+5y\_{3}-3y\_{4}\rightarrow min$$

$$\left\{\begin{array}{c}y\_{1}+2y\_{2}-3y\_{3}+y\_{4}\geq -3\\-2y\_{1}-y\_{2}+y\_{3}-y\_{4}\geq -2\\y\_{1},y\_{2},…,y\_{4}\geq 0\end{array}\right.$$

Розв’яжемо отриману двоїсту задачу.

$$\tilde{F}\left(y\_{1},y\_{2},y\_{3},y\_{4}\right)=3y\_{1}+10y\_{2}+5y\_{3}-3y\_{4}\rightarrow min$$

$$\left\{\begin{array}{c}-y\_{1}-2y\_{2}+3y\_{3}-y\_{4}\leq 3\\2y\_{1}+y\_{2}-y\_{3}+y\_{4}\leq 2\\y\_{1},y\_{2},…,y\_{4}\geq 0\end{array}\right.$$

$$\tilde{F}\left(y\_{1},y\_{2},…,y\_{6}\right)=3y\_{1}+10y\_{2}+5y\_{3}-3y\_{4}+0y\_{5}+0y\_{6}\rightarrow min$$

$$\left\{\begin{array}{c}-y\_{1}-2y\_{2}+3y\_{3}-y\_{4}+1y\_{5}+0y\_{6}=3\\2y\_{1}+y\_{2}-y\_{3}+y\_{4}+0y\_{5}+1y\_{6}=2\\y\_{1},y\_{2},…,y\_{6}\geq 0\end{array}\right.$$

Складемо вихідну симплекс-таблицю:

Таблиця 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | 3 | 10 | 5 | -3 | 0 | 0 |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ | $$A\_{6}$$ |
| 0 | $$y\_{5}$$ | 3 | -1 | -2 | 3 | -1 | 1 | 0 |
| 0 | $$y\_{6}$$ | 2 | 2 | 1 | -1 | **1** | 0 | 1 |
|  | $$∆$$ | 0 | -3 | -10 | -5 | 3 | 0 | 0 |

Таблиця 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | 3 | 10 | 5 | -3 | 0 | 0 |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ | $$A\_{6}$$ |
| 0 | $$y\_{5}$$ | 5 | 1 | -1 | 2 | 0 | 1 | 1 |
| -3 | $$y\_{4}$$ | 2 | 2 | 1 | -1 | 1 | 0 | 1 |
|  | $$∆$$ | -6 | -9 | -13 | -2 | 0 | 0 | -3 |

$y\_{1}=0,y\_{2}=0,y\_{3}=0,y\_{4}=2,\tilde{F}\_{min}=-6$**.**

Встановимо взаємний зв’язок поміж значеннями оцінок індексного рядка оптимальної таблиці однієї з пари задач і значеннями змінних оптимального розв’язку другої задачі:

$y\_{i}^{опт}=∆\_{o\left(n+i\right)}^{пр}, n- $кількість змінних прямої задачі,$ n=2$.

$$y\_{1}^{опт}=∆\_{03}^{пр}=0, y\_{2}^{опт}=∆\_{04}^{пр}=0, y\_{3}^{опт}=∆\_{05}^{пр}=0, $$

$$y\_{4}^{опт}=∆\_{06}^{пр}=2, y\_{5}^{опт}=∆\_{07(1)}^{пр}=5, y\_{6}^{опт}=∆\_{08(2)}^{пр}=0;$$

(циклічний перенос)

$x\_{j}^{опт}=-∆\_{o\left(m+j\right)}^{дв}, m- $кількість змінних двоїстої задачі,$ m=4$.

$$x\_{1}^{опт}=-∆\_{05}^{дв}=0, x\_{2}^{опт}=-∆\_{06}^{дв}=3, x\_{3}^{опт}=-∆\_{07\left(1\right)}^{дв}=9, $$

$$x\_{4}^{опт}=-∆\_{08(2)}^{дв}=13, x\_{5}^{опт}=-∆\_{09(3)}^{дв}=2.$$