# **ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ**

Кожній задачі ЛП зі змішаними умовами-обмеженнями можна поставити у відповідність так звану двоїсту задачу.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Співставляючи форми запису прямої та двоїстої задач, можна встановити такі взаємозв’язки між ними:

1. якщо пряма задача є задачею на *max*, то двоїста задача буде задачею на *min*, і навпаки,

якщо пряма задача є задачею на *min*, то двоїста задача буде задачею на *max*;

1. вагові коефіцієнти цільової функції прямої задачі стають вільними членами умов-обмежень двоїстої задачі;
2. вільні члени умов-обмежень прямої задачі стають ваговими коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі;
3. матриця умов-обмежень двоїстої задачі отримується транспонуванням матриці умов-обмежень прямої задачі;
4. на основі викладеного вище можна підсумувати: кількість змінних двоїстої задачі дорівнює кількості умов-обмежень прямої задачі, а кількість умов-обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості змінних прямої задачі, і навпаки,

кількість змінних прямої задачі дорівнює кількості умов-обмежень двоїстої задачі, а кількість умов-обмежень прямої задачі дорівнює кількості змінних двоїстої задачі;

1. взаємно однозначна відповідність між змінними прямої задачі та умовами-обмеженнями двоїстої задачі така:

j-та умова-обмеження двоїстої задачі буде нерівністю, якщо на j-ту змінну прямої задачі накладена вимога невід’ємності, інакше j-та умова-обмеження буде рівністю.

Пара задач ЛП може бути симетричною й несиметричною.

У симетричних задачах система умов-обмежень задається у вигляді нерівностей і на значення, які можуть приймати змінні, накладена вимога невід’ємності їхніх значень.

У несиметричних задачах система умов-обмежень прямої задачі задається рівностями, а система умов-обмежень двоїстої задачі – нерівностями, причому змінні в ній можуть бути й від’ємними.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Симетричні** | | |
| Пряма | **(1)** | Двоїста | |
| Пряма | **(2)** | Двоїста | |
| **Несиметричні** | | |
| Пряма | **(3)** | Двоїста | |
| Пряма | **(4)** | Двоїста | |

Сумісний або спільний розгляд таких пар задач дозволяє дослідити вплив зміни керованих і некерованих змінних системи на значення цільової функції, проводити економічний аналіз результатів розрахунків.

## **Пряма задача**

Приводимо математичну модель задачі до канонічного вигляду. Обернемо нерівності в рівності шляхом введення вільних змінних ­– :

Для отримання початкового допустимого розв’язку задачі введемо в останню умову-обмеження штучну змінну :

.

Складемо вихідну симплекс-таблицю:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
|  | B |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 |  | 3 | 1 | -2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 |  | 10 | 2 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 |  | 5 | -3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
|  |  | 3 | -1 | **1** | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 |
|  |  |  |  |  | 0 | 0 | 0 |  | 0 |

Напрямний стовпець – , напрямний рядок – , напрямний елемент – .

Розраховуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | B |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 |  | 9 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | -2 |
| 0 |  | 13 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 |
| 0 |  | 2 | -2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| -2 |  | **3** | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 |
|  |  | -6 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |

Всі оцінки отриманий оптимальний розв'язок задачі:

***.***

## **Двоїста задача**

Оскільки система умов-обмежень прямої задачі задана у вигляді нерівностей, то в даному випадку (на змінні накладена вимога невід’ємності) можна розглядати пару задач.

Приведемо математичну модель задачі до вигляду **(1)**:

Тоді двоїста задача виглядатиме так:

Розв’яжемо отриману двоїсту задачу.

Складемо вихідну симплекс-таблицю:

Таблиця 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | 3 | 10 | 5 | -3 | 0 | 0 |
|  | B |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 |  | 3 | -1 | -2 | 3 | -1 | 1 | 0 |
| 0 |  | 2 | 2 | 1 | -1 | **1** | 0 | 1 |
|  |  | 0 | -3 | -10 | -5 | 3 | 0 | 0 |

Таблиця 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | 3 | 10 | 5 | -3 | 0 | 0 |
|  | B |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 |  | 5 | 1 | -1 | 2 | 0 | 1 | 1 |
| -3 |  | 2 | 2 | 1 | -1 | 1 | 0 | 1 |
|  |  | -6 | -9 | -13 | -2 | 0 | 0 | -3 |

**.**

Встановимо взаємний зв’язок поміж значеннями оцінок індексного рядка оптимальної таблиці однієї з пари задач і значеннями змінних оптимального розв’язку другої задачі:

кількість змінних прямої задачі,.

(циклічний перенос)

кількість змінних двоїстої задачі,.