Аналітична геометрія на площині

Аналітична геометрія — це розділ математики, в якому властивості геометричних об'єктів (точок, ліній, поверхонь, фігур, тіл тощо) вивчаються засобами алгебри на основі методу координат.

Основоположником аналітичної геометрії вважають Р. Декарта, який вперше в 1637 р. у своїй книзі «Геометрія» дав чіткий виклад ідеї методу координат на площині. Р. Декарт запропонував положення точки на площині відносно заданої системи координат визначати за допомогою двох чисел — її координат, а кожну лінію на площині розглядати як множину точок, заданих певною геометричною умовою. Ця умова записується у вигляді рівняння, яке зв'язує змінні координати точки, що належить даній лінії, і називається рівнянням цієї лінії. Такий спосіб дослідження геометричних об'єктів і називають методом координат.

Наступний важливий вклад в аналітичну геометрію зробив французький учений Ж.-Л. Лагранж, який вперше в 1788 р. у своєму творі «Аналітична механіка» запропонував положення вектора визначати за допомогою чисел — його проекцій на координатні осі. Розвиток ідей Лагранжа привів до створення векторної алгебри.

Метод координат та апарат векторної алгебри широко використовуються в сучасній аналітичній геометрії.

Лінії на площині та їх рівняння

Означення 4.1 *Рівнянням лінії L в декартовій системі координат на площині називається рівняння*

$$F(x, y) = 0, \qquad (11.1)$$

яке задовольняють координати x і y кожної точки цієї лінії і не задовольняють координати жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Означення 4.2 *Алгебраїчною лінією називається така лінія, яка зображається в декартових координатах алгебраїчним рівнянням*

$$F(x, y) = 0,$$

де $F(x, y)$ є многочлен від змінних x і y. Степінь многочлена $F(x, y)$, що стоїть у лівій частині рівняння алгебраїчної лінії, називається порядком лінії.

Лінії, які не є алгебраїчними, називаються трансцендентними.

Прикладами алгебраїчних ліній є лінії, задані рівняннями

$$x + y - 2 = 0, \quad x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

Прикладами трансцендентних ліній можуть бути лінії

$$y - \operatorname{tg} x = 0, \quad 5^{xy} + x - y = 0, \quad y = \log_a x.$$

§ 12. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

1. Загальне рівняння прямої

Нехай на площині Oxy задані ненульовий вектор $\vec{n} = \{A; B\}$ і точка $M_0(x_0, y_0)$. Потрібно скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$.

З аксіоми елементарної геометрії відомо, що через точку, що лежить на заданій прямій, можна провести єдину пряму, яка перпендикулярна їй.

Отже, поставлена задача має єдиний розв'язок.

Для довільної точки $M(x, y)$ шуканої прямої вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ перпендикулярний вектору $\vec{n}$ (рис. 28).

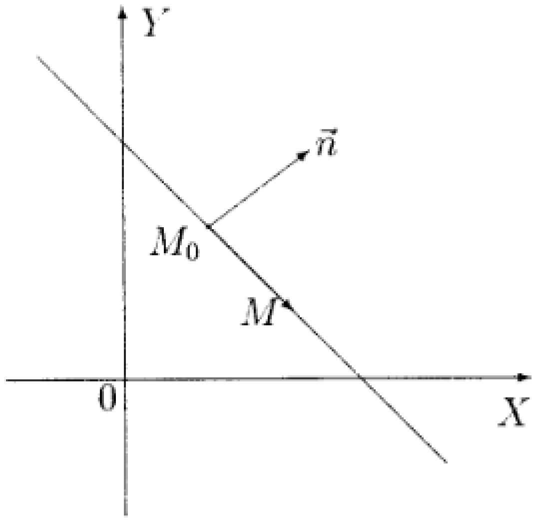


Рис. 28

Тому скалярний добуток їх дорівнює нулю: $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0$ або в координатах:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (12.1)$$

Це і є рівняння шуканої прямої.

Розкриємо дужки, зведемо подібні доданки, позначимо

$$-(Ax_0 + By_0) = C$$

Отримаємо загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0,$$

• **Приклад 12.1**

Скласти рівняння прямої, якщо точка $M_0(2.3)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю пряму.

◀ Оскільки точка $M_0(2,3)$ є основою перпендикуляра, який опущений з початку координат на шукану пряму, то нормальний вектор $\vec{n} = \overrightarrow{OM_0} = \{2;3\}$. Нехай $M(x,y)$ — довільна точка прямої. Тоді вектор $\vec{n}$ перпендикулярний до вектора $\overrightarrow{M_0M} = \{x-2; y-3\}$, тобто $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$. У координатній формі останнє рівняння набуває вигляду

$$2(x-2) + 3(y-3) = 0, \quad \text{або} \quad 2x + 3y - 13 = 0.$$

Це і є загальне рівняння шуканої прямої. ▶

2. Дослідження неповного рівняння прямої

Дослідимо, як розміщена пряма відносно координатної системи, коли рівняння (12.2) неповне, тобто деякі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

Можливі такі випадки:

1. $C = 0$. Тоді пряма проходить через початок координат, а координати точки $O(0,0)$ задовольняють рівняння $Ax + By = 0$.

2. $B = 0$. Пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі Oy, оскільки нормальний вектор $\vec{n} = \{A; 0\}$ прямої перпендикулярний цій осі.

3. Аналогічно, якщо $A = 0$, то рівняння $By + C = 0$ визначає пряму, паралельну осі Ox.

4. $A = C = 0$. Пряма $By = 0$ суміщається з віссю Ox, тобто $y = 0$ є рівнянням осі Ox.

5. $B = C = 0$. Пряма $Ax = 0$ суміщається з віссю Oy, тобто $x = 0$ є рівнянням осі Oy.

3. Рівняння прямої "у відрізках"

Розглянемо загальне рівняння прямої (12.2) і покажемо, що його можна записати у вигляді рівняння

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{12.3}$$

яке називається **рівнянням прямої "у відрізках"**.

Нехай всі коефіцієнти A, B і C відмінні від нуля. Тоді рівняння (12.2) можна записати у вигляді

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

і, прийнявши $a = -\dfrac{C}{A}$, $b = -\dfrac{C}{B}$, отримаємо рівняння (12.3).

У рівнянні "у відрізках" (12.3) числа a та b мають такий геометричний зміст: вони дорівнюють величинам відрізків, які відтинає пряма відповідно на осях Ox та Oy (відрізки відкладаються від початку координат). Щоб переконатись у цьому, досить знайти точки перетину прямої з осями координат. Наприклад, точка перетину з віссю Ox визначається із спільного розв'язання рівняння (12.3) з рівнянням $y = 0$ осі Ox. Ми отримаємо координати точки перетину $x = a$, $y = 0$. Аналогічно отримаємо координати точки перетину прямої з віссю Oy: $x = 0$, $y = b$.

Рівняння прямої "у відрізках" зручно використовувати для її графічного зображення в прямокутній системі координат.

4. Канонічні і параметричні рівняння прямої

Положення прямої на площині відносно системи координат можна задати будь-якою точкою $M_0(x_0, y_0)$, що належить цій прямій, і напрямком прямої, тобто вектором $\vec{s} = \{m; n\}$, колінеарним цій прямій (рис. 29). Ненульовий вектор $\vec{s}$, який паралельний прямій, називається **напрямним вектором прямої**.

Через точку $M_0(x_0, y_0)$ можна провести одну і тільки одну пряму, паралельну вектору $\vec{s}$. Складемо її рівняння.

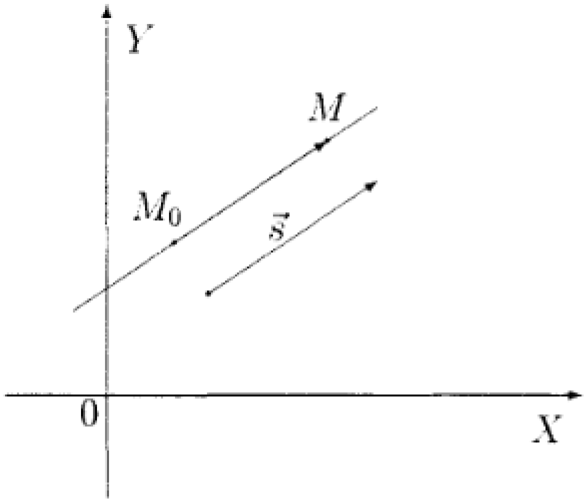


Рис. 29

Нехай $M(x, y)$ — довільна точка прямої. Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ колінеарний вектору $\vec{s} = \{m; n\}$, тобто координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \tag{12.4}$$

або

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases} \tag{12.5}$$

Рівняння (12.4) називається **канонічним рівнянням прямої**, а рівняння (12.5) — її **параметричними рівняннями**.

5. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Дві точки повністю визначають пряму. Складемо її рівняння. Нехай $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ — дві точки прямої. Вони визначають напрямний вектор прямої $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

Враховуючи те, що пряма проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$, отримаємо канонічне рівняння шуканої прямої

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{12.6}$$

Рівняння (12.6) називається рівнянням прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ **і** $M_2(x_2, y_2)$.

Зокрема, якщо пряма проходить через точку M_0 $(x_0; y_0)$ паралельно осі Ox, то її напрямний вектор $\vec{s} = (m; 0)$, тому рівняння (8) набирає вигляду

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{0}.$$

Як відомо, добуток середніх членів пропорції дорівнює добутку крайніх членів. Тому маємо $(y - y_0)\, m = (x - x_0) \cdot 0$, звідки $y = y_0$. Це і є рівняння прямої, яка паралельна осі Ox.

Аналогічно, якщо пряма проходить через точку M_0 $(x_0; y_0)$ паралельно осі Oy, то її рівнянням є $x = x_0$.

• **Приклад 12.3**

Через точки $M_1(-1, 2)$ і $M_2(2, 3)$ проведена пряма. Знайти точки перетину цієї прямої з осями координат.

◀ Згідно із співвідношенням (12.6) рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(-1, 2)$ та $M_2(2, 3)$ має вигляд

$$\frac{x + 1}{2 + 1} = \frac{y - 2}{3 - 2} \quad \text{або} \quad \frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{1},$$

тобто

$$y = \frac{x}{3} + \frac{7}{3}.$$

Точка перетину отриманої прямої з віссю Ox має координати: $y = 0$, $x = -7$, а з віссю Oy — $x = 0$, $y = 7/3$. Отже, маємо дві точки $(0, 7/3)$ і $(-7, 0)$, які і є шуканими. ▶

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$\boxed{y - y_0 = k\,(x - x_0)} \qquad (3.\ 29)$$

Рівняння (3.29) можна вивести безпосередньо з рис. 3.21. Позначимо через $M(x,\ y)$ довільну точку прямої L. Із трикутника M_0MN (рис. 3.21) знайдемо $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \operatorname{tg}\varphi$, звідки, беручи до уваги, що $\operatorname{tg}\varphi = k$, дістанемо рівняння (3.29).

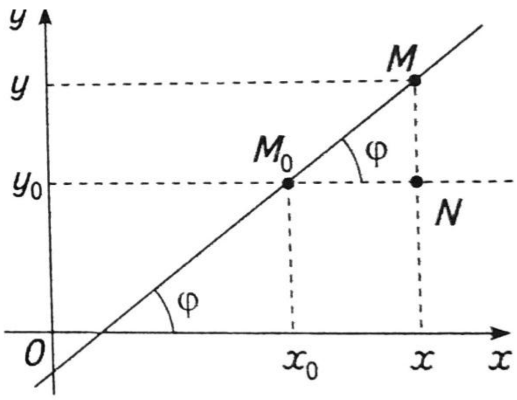
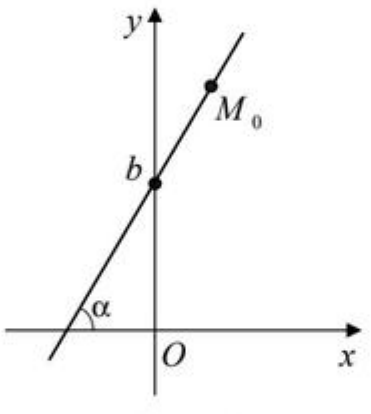


Рис. 3.21

Часто пряму на площині задають кутом φ і відрізком b, який вона відтинає на осі Oy. Очевидно, що такий спосіб задання прямої зводиться до попереднього. Справді, в цьому разі точка $M_0(0,\ b)$ є точкою перетину прямої L із віссю Oy. Підставивши координати точки M_0 у рівняння (3.29), дістанемо $y - b = kx$ або остаточно

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом



$$y = kx + b\,;$$

Рис. 4

де $k = \operatorname{tg}\alpha$ – *кутовий коефіцієнт*.

3.3. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох *прямих*

Кут між двома прямими вимірюється кутом між їхніми напрямними векторами. При цьому слід зазначити, що, вибравши на одній із прямих напрямний вектор, напрямлений в протилежну сторону, дістанемо другий кут, який доповнює перший до π.

а) Нехай прямі l_1 та l_2 задано канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}; \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$$

і φ — кут між цими прямими: $\varphi=(\widehat{l_1, l_2})$, $0<\varphi<\pi$. Оскільки вектори $\vec{s}_1=(m_1; n_1)$ і $\vec{s}_2=(m_2; n_2)$ є напрямними векторами даних прямих (рис. 3.22) і $\varphi=(\widehat{\vec{s}_1, \vec{s}_2})$, то за формулою (36) (див. гл. 2) маємо

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}. \tag{18}$$

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ теж паралельні, тому їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2} \tag{19}$$

— *умова паралельності двох прямих*. Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ теж перпендикулярні і їхній скалярний добуток дорівнює нулю, отже,

$$m_1m_2+n_1n_2=0 \tag{20}$$

— *умова перпендикулярності двох прямих.*

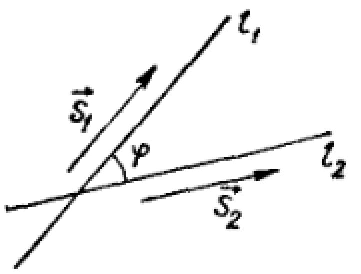


Рис. 3.22

б) Нехай тепер прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, тоді кут φ між ними (рис. 3.23) дорівнює куту між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$; тому аналогічно випадку а) дістанемо:

1) формулу для кута φ між прямими l_1 і l_2:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}; \tag{21}$$

2) умову паралельності прямих l_1 і l_2:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}; \tag{22}$$

3) умову перпендикулярності прямих l_1 і l_2:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \tag{23}$$

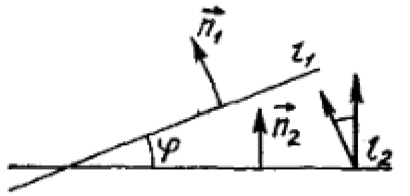


Рис. 3.23

Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, де $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ — кутові коефіцієнти, то з рис. 3.24 видно, що

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{24}$$

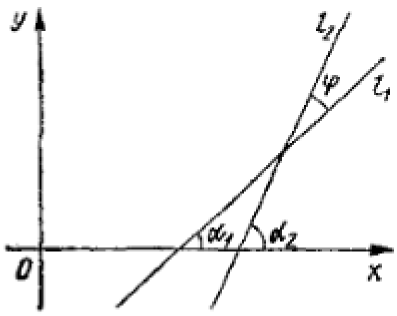


Рис. 3.24

Зауважимо, що формула (24) визначає кут, на який треба повернути пряму l_1 (проти годинникової стрілки), щоб вона збіглась з прямою l_2. Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то $\varphi = 0$ і $\operatorname{tg}\varphi = 0$, тому з формули (24) маємо $k_2 - k_1 = 0$. Отже, умовою паралельності двох прямих є рівність їхніх кутових коефіцієнтів:

$$k_1 = k_2. \tag{25}$$

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то $\varphi = 90°$ і $\operatorname{tg}\varphi$ не існує, тому що знаменник дробу (24) дорівнює нулю. Таким чином, умова перпендикулярності прямих має вигляд

$$k_1 k_2 + 1 = 0 \text{ або } k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{26}$$

Формули (18), (21) і (24) дають змогу визначити один із двох суміжних кутів, які утворюються при перетині двох прямих. Другий кут дорівнює $\pi - \varphi$. Іноді вирази справа в цих формулах записують по модулю, тоді визначається гострий кут між прямими.

Приклади.

1. Знайти кут між прямими $3x - 4y + 1 = 0$ і $5x - 12y + 3 = 0$.
За формулою (21) маємо

$$\cos\varphi = \frac{3 \cdot 5 + (-4) \cdot (-12)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{15 + 48}{5 \cdot 13} = \frac{63}{65} \approx 0{,}96,$$

$$\varphi = \arccos 0{,}96. \ \bullet$$

3.4. Відстань від точки до прямої

Нехай задано пряму l рівнянням $Ax + By + C = 0$ і точку $M_0\,(x_0;\ y_0)$. Відстань d (рис. 3.26) точки M_0 від прямої l дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, де $M_1\,(x_1;\ y_1)$ — довільна точка прямої l, на напрям нормального вектора $\vec{n} = (A;\ B)$. Отже,

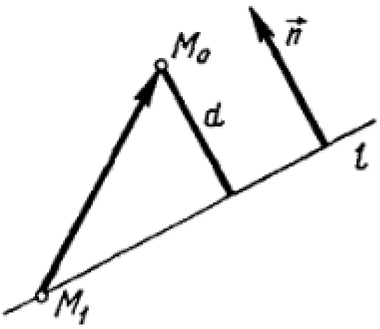


Рис. 3.26

$$d = |\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M_0}| = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Оскільки $Ax_1 + By_1 + C = 0$, то $-Ax_1 - By_1 = C$, тому

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Використали означення та властивість скалярного добутку

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$$

Приклад

Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $4x - 3y - 10 = 0$ і $8x - 6y + 15 = 0$.

○ Оскільки задані прямі паралельні, то довжину d сторони квадрата можна знайти як відстань від довільної точки однієї прямої до другої прямої.

Знайдемо яку-небудь точку на першій прямій. Нехай, наприклад, $x = 1$, тоді $4 \cdot 1 - 3y - 10 = 0$, звідки $y = -2$. Отже, точка $M_0\,(1;\ -2)$ належить першій прямій.

За формулою (27) знайдемо відстань від точки M_0 до другої прямої:

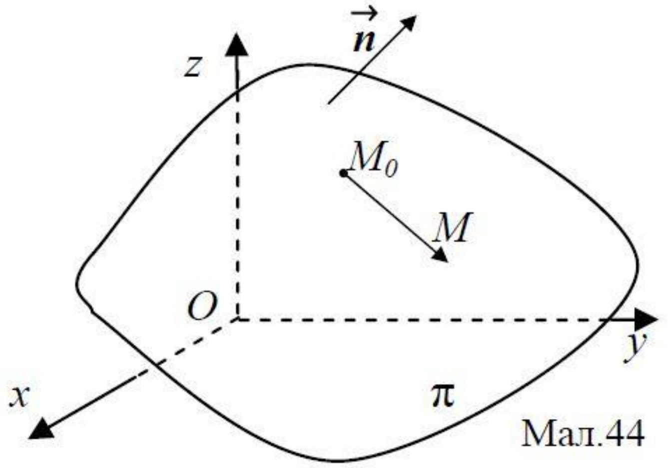
$$d = \frac{|8 \cdot 1 - 6 \cdot (-2) + 15|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{7}{2}.$$

Площа квадрата $S = d^2 = \frac{49}{4}$. ●

§17. Площина та її рівняння

Нехай в системі координат $0xyz$ задана довільна площина π

Візьмемо на цій площині яку-небудь точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Виберемо вектор $\vec{n}(A,B,C)$ перпендикулярний до площини π і назвемо його нормальним вектором, або просто нормаллю. Цими двома величинами (точкою через яку проходить площина і вектором перпендикулярним до площини) площина визначається однозначно. На площині π візьмемо довільну точку $M(x,y,z)$ (мал.44). Тому що точка $M(x,y,z)$ знаходиться на площині, то вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до вектора $\vec{n}$, а це значить, що їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто



Мал.44

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0 \qquad (2.70).$$

$\vec{n}(A,B,C)$. $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0; y-y_0; z-z_0)$. Одержимо

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (2.71)$$

Рівняння (2.71) є рівнянням площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і перпендикулярна до заданого вектора $\vec{n}(A,B,C)$.

Розкривши дужки в рівнянні (2.71), одержимо

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (2.72)$$

де $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Рівняння (2.72) називається загальним рівнянням площини.

• **Приклад 15.1**

Точка $M_0(2,-2,-4)$ — основа перпендикуляра, який опущений з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.

◀ Знайдемо координати вектора нормалі $\vec{n}$. За вектор $\vec{n}$ можна взяти вектор $\overrightarrow{OM_0} = \{2;-2;-4\}$. Площина проходить через

точку $M_0(2,-2,-4)$. Тому згідно з (15.2) шукане рівняння має вигляд

$$2(x-2)-2(y+2)-4(z+4)=0,$$

або

$$x-y-2z-12=0. \quad \blacktriangleright$$

17.2. Рівняння площини у відрізках

Нехай в рівнянні (2.72) кожний із коефіцієнтів A,B,C,D не дорівнює нулю, тобто площина перетинає всі осі координат і не проходить через початок координат. Перетворимо рівняння (2.72) таким чином:

$$Ax+By+Cz=-D,$$

$$\frac{A}{-D}x+\frac{B}{-D}y+\frac{C}{-D}z=1,$$

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Для скорочення запису позначимо

$-\frac{D}{A}=a, \quad -\frac{D}{B}=b, \quad -\frac{D}{C}=c,$ тоді рівняння площини буде мати вигляд

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{2.73}$$

Рівняння (2.73) називають рівнянням площини у відрізках, де числа a,b,c є величини відрізків, які відтинає площина на осях координат.

3. Кут між двома площинами. Умови паралельності й перпендикулярності двох площин

Нехай дві площини задані загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Двогранний кут між двома площинами вимірюється лінійним кутом, який, як випливає з відомої теореми з елементарної геометрії, дорівнює кутові Θ між векторами нормалей $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ двох заданих площин. Косинус кута Θ знаходять за формулою

$$\cos\Theta = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}. \tag{15.4}$$

Оскільки $\vec{n_1} = \{A_1; B_1; C_1\}$, $\vec{n_2} = \{A_2; B_2; C_2\}$, визначимо косинус кута між двома площинами через коефіцієнти їх загальних рівнянь:

$$\cos\Theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{15.5}$$

Умова перпендикулярності двох площин рівносильна умові перпендикулярності векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$. Вона має вигляд:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{15.6}$$

Умова паралельності двох площин має вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{15.7}$$

Вона виражає той факт, що вектори нормалей двох паралельних площин колінеарні.

4. Рівняння площини, яка проходить через три задані точки

Нехай площина задана трьома своїми точками M_1, M_2, M_3, які не лежать на одній прямій: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$, а $M(x, y, z)$ — довільна точка площини. Три вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ (рис. 44) компланарні, отже, їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0.$$

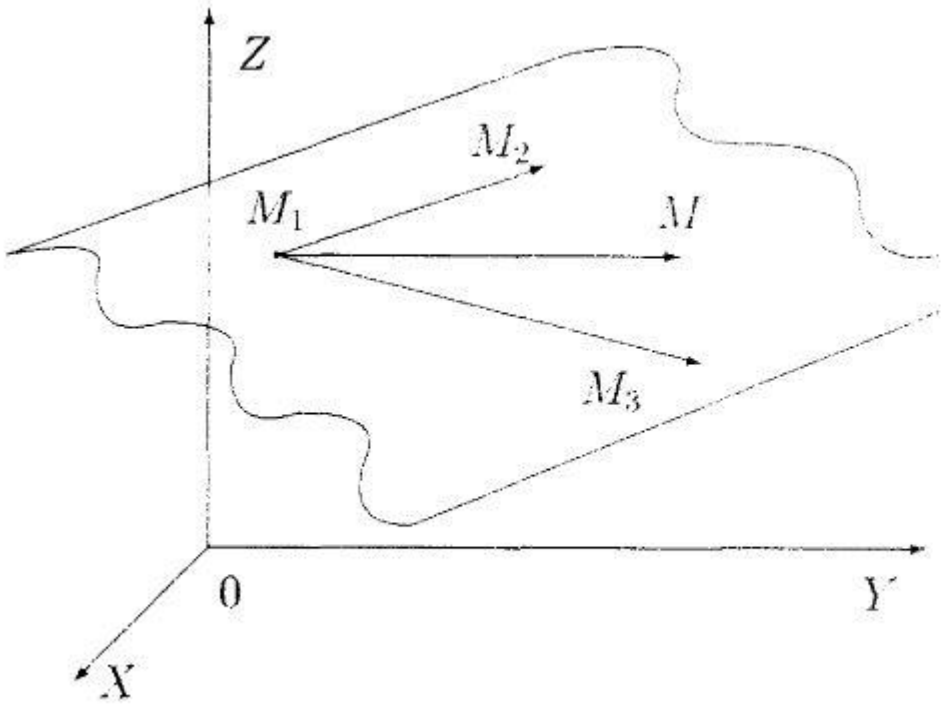


Рис. 44

Виразивши цю умову через координати даних векторів, матимемо:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (15.8)$$

— рівняння площини, яка проходить через три задані точки.

• **Приклад 15.5**

Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(3,-1,2)$, $M_2(4,-1,-1)$ і $M_3(2,0,2)$.

◀ Підставимо в рівняння (15.8) координати точок M_1, M_2 та M_3:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x+3y+z-8=0$$

— шукане рівняння площини. ▶

4.4. Відстань від точки до площини

Якщо задане рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ площини Π і точка M_0 $(x_0; y_0; z_0)$, що не лежить на цій площині, то відстань d від точки M_0 до площини Π знаходиться за формулою

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{38}$$

Доведення формули (38) таке саме, як і формули (27).

Приклад

Знайти висоту AH піраміди, заданої своїми вершинами A $(-1; 2; -1)$, B $(1; 0; 2)$, C $(0; 1; -1)$, D $(2; 0; -1)$.

○ За формулою (33) знаходимо рівняння площини, що проходить через точки B, C, D:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

звідки $3x+6y+z-5=0$.

Висоту AH знайдемо як відстань точки A $(-1; 2; -1)$ від площини BCD за формулою (38):

$$AH = \frac{3\cdot(-1)+6\cdot 2+1\cdot(-1)-3}{\sqrt{3^2+6^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{46}}. \quad ●$$

§ 16. ПРЯМА В ПРОСТОРІ

1. Канонічні рівняння прямої
Параметричні рівняння прямої

Нехай пряма L задана в просторі точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s} = \{\ell; m; n\}$, тобто вектором, паралельним прямій L. Позначимо, як звичайно, через $M(x, y, z)$ довільну точку прямої (рис. 47) і виразимо умову колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ в координатній формі:

$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \qquad (16.1)$$

Рівняння (16.1) — **канонічне рівняння** прямої.

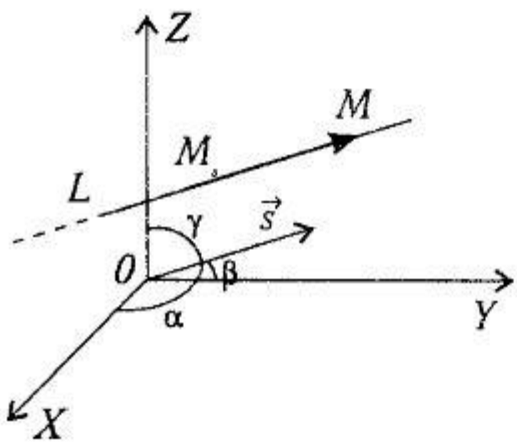


Рис. 47

Вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ колінеарні. Отже, при будь-якому положенні точки M на прямій L маємо: $\overrightarrow{M_0M} = \vec{s}t$.

Позначимо відношення у канонічному рівнянні через t

отримаємо

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \qquad (16.2)$$

Рівняння (16.2) називаються **параметричними рівняннями** прямої. Можна показати, що кожна точка M з координатами x, y, z, яка визначається рівняннями (16.2), лежить на прямій, що проходить через точку M_0 паралельно вектору $\vec{s}$.

3. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Якщо задано дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то за напрямний вектор $\vec{s}$ прямої можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ і, отже,

$$\ell = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1.$$

Канонічні рівняння прямої, що проходить через точку M_1 з напрямним вектором $\overrightarrow{M_1M_2}$, мають вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{16.3}$$

• **Приклад 16.3**

Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(1, -2, 1)$ і $M_2(3, 1, -1)$.

◄ Згідно із співвідношенням (16.3) маємо

$$\frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y + 2}{1 + 2} = \frac{z - 1}{-1 - 1},$$

тобто $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$ — канонічне рівняння шуканої прямої. ►

У рівняннях одна або дві координати напрямного вектора можуть дорівнювати нулю

Наприклад, рівняння

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

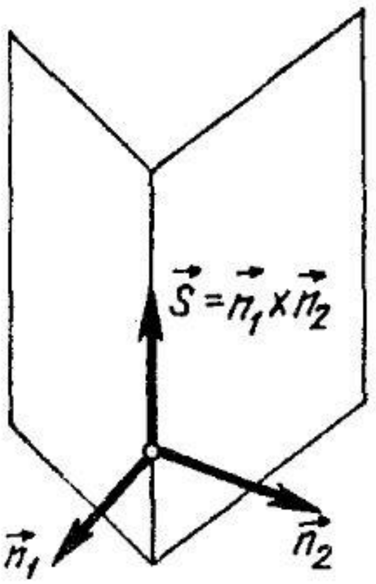
визначає пряму, перпендикулярну до осі Ox.

4. Загальне рівняння прямої

Пряму можна розглядати як лінію перетину двох площин, що задані загальними рівняннями. Іншими словами, пряму в просторі можна задати системою двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (16.4)$$

Щоб звести систему рівнянь (16.4) до канонічного вигляду (16.1), треба: 1) знайти координати однієї з точок прямої; 2) знайти координати ℓ, m, n напрямного вектора $\vec{s}$ прямої.



Для знаходження напрямного вектора $\vec{s}$ врахуємо, що нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ даних площин перпендикулярні до прямої (рис.]
Тому за вектор $\vec{s}$ можна взяти їхній векторний добуток:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \qquad (43)$$

Приклад

Звести рівняння прямої

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0; \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

до канонічного вигляду.

○ Знайдемо яку-небудь точку M_0 (x_0; y_0; z_0) на даній прямій. Для цього покладемо в обох рівняннях $x = 0$ і розв'яжемо систему

$$\begin{cases} y - z - 1 = 0; \\ -y + 3z + 5 = 0, \end{cases}$$

звідки $z = -2$, $y = -1$. Отже, точка M_0 (0; —1; —2) належить даній прямій.

Напрямний вектор $\vec{s}$ знаходимо за формулою (43):

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Канонічні рівняння заданої прямої мають вигляд

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+2}{-3}. \quad ●$$

5. Взаємне розміщення двох прямих

Нехай прямі L_1 і L_2 задані канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}. \qquad (16.7)$$

Кут φ між прямими в просторі визначається аналогічно, як і кут між прямими на площині, тобто, як кут між їх напрямними векторами $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$, тобто з формули

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (16.8)$$

Умова перпендикулярності прямих (16.7) набирає вигляд

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (16.9)$$

Прямі будуть паралельні, якщо їх напрямні вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ — колінеарні, тобто коли

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \tag{16.10}$$

і навпаки.

Нарешті, прямі будуть перетинатись, коли вектори $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ і $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ будуть компланарні (рис. 49), тобто виконуватиметься умова

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0,$$

яка в координатній формі запишеться так:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{16.11}$$

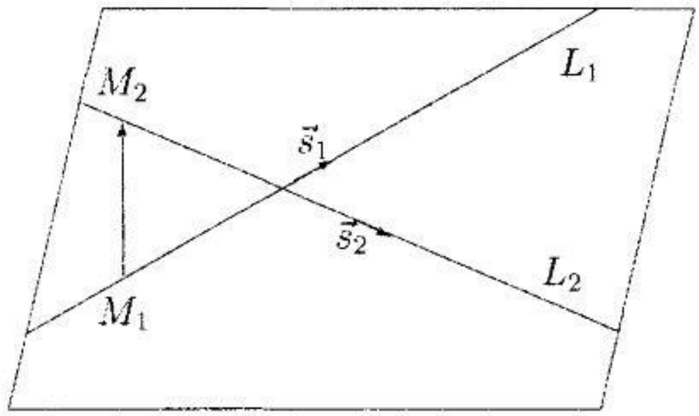


Рис. 49

1. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини

Кут Θ між прямою і площиною в просторі вимірюється гострим кутом між прямою та її проекцією на площину (рис. 50).

Нехай пряма і площина задані рівняннями

$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p},$$

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Очевидно, що

$$\Theta = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

де φ — кут між вектором нормалі $\vec{n}$ площини і напрямним вектором $\vec{s}$ прямої.

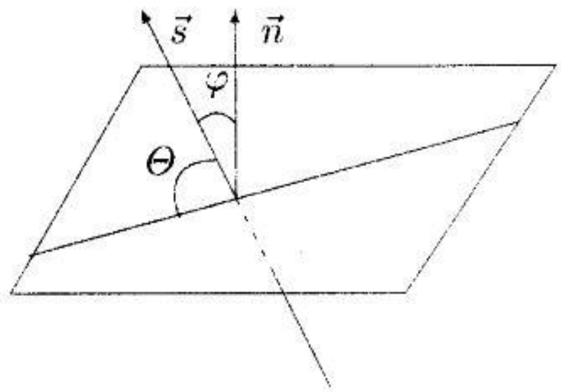


Рис. 50

Кут φ можна визначити за формулою

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}, \vec{s})}{|\vec{n}||\vec{s}|} = \frac{A\ell + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}},$$

з іншого боку

$$\cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) = \sin\Theta.$$

Отже,

$$\sin\Theta = \frac{|A\ell + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (17.1)$$

• Приклад 17.1

Знайти кут між прямою $x = 4 - t$, $y = 5 - 2t$, $z = 3t$ і площиною $2x + 4y - 6z + 7 = 0$.

◀ Перейдемо від параметричних рівнянь прямої до канонічного

$$\frac{x-4}{-1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z}{3}.$$

Тоді, прийнявши у формулі (17.1) $A = 2$, $B = 4$, $C = -6$, $\ell = -1$, $m = -2$, $n = 3$, отримаємо, що

$$\sin\Theta = \frac{|-2-8-18|}{\sqrt{6+16+36}\sqrt{1+4+9}} = \frac{28}{\sqrt{56}\sqrt{14}} = 1.$$

Отже, $\Theta = \frac{\pi}{2}$. ▶