

Лекція 6

6.1. Стійкість цифрових фільтрів

Необхідною і достатньою умовою стійкості ЦФ є обмеженість імпульсної характеристики фільтра:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

СІХ-фільтр має скінченну за тривалістю імпульсну характеристику, а відліки імпульсної характеристики обмежені за модулем деякою величиною h_{\max} :

$$\max_n |h(n)| \leq h_{\max}.$$

Враховуючи це, отримаємо

$$\sum_{n=0}^M |h(n)| < M h_{\max} < \infty.$$

Отже, СІХ-фільтр завжди стійкий.

Імпульсна характеристика НІХ-фільтра має нескінченну тривалість, тому при проектуванні НІХ-фільтрів їхні параметри (наприклад, вагові коефіцієнти a_i та b_k різницевого рівняння) треба вибирати у такий спосіб, щоб фільтр був стійким.

Отримати аналітичний вираз для імпульсної характеристики НІХ-фільтра високого порядку через вагові коефіцієнти a_i та b_k різницевого рівняння складно, тому для аналізу стійкості НІХ-фільтра використовують критерій, що базується на розташуванні полюсів його системної функції $H(z)$ на z -площині.

Системна функція $H(z)$ будь-якого ЦФ є дробово-раціональною функцією

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = \frac{A(z)}{B(z)},$$
 чисельник і знаменник котрої можна

представити добутками лінійних множників

$$H(z) = a_0 z^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_{0i})}{\prod_{k=1}^N (z - z_{\Pi k})}.$$

Домовимось, що $a_0 = 1$; це в даному випадку не вплине на результати аналізу, але дещо скоротить записи. При $M < N$, та за умови, що всі полюси прості, $H(z)$ можна розкласти на прості дроби:

$$H(z) = \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_{0i})}{\prod_{k=1}^N (z - z_{\Pi k})} = \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 - z_{\Pi k} z^{-1}}, \quad (6.1)$$

де $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ – коефіцієнти розкладання.

Коефіцієнти розкладання можуть бути числами як дійсними, так і комплексними. Якщо полюс $z_{\Pi k}$ – дійсне число, то і коефіцієнт β_k буде дійсним, комплексному полюсу буде відповідати комплексний коефіцієнт

розкладання. Дроби із комплексними коефіцієнтами розкладання завжди будуть входити у (6.1) парами: у кожній парі будуть комплексно-спряжені полюси та комплексно-спряжені коефіцієнти розкладання. Коефіцієнт розкладання β_k можна знайти як лишок $H(z)$ в полюсі z_{pk} .

Позначимо

$$\frac{\beta_k}{1-z_{pk}z^{-1}} = H_k(z). \quad (6.2)$$

Тоді $H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_N(z)$.

Оскільки для Z -перетворення є дійсним принцип суперпозиції, можна записати

$$\begin{aligned} h(n) &= Z^{-1} \{H(z)\} = Z^{-1} \{H_1(z)\} + Z^{-1} \{H_2(z)\} + \dots + Z^{-1} \{H_N(z)\} = \\ &= h_1(n) + h_2(n) + \dots + h_N(n); \end{aligned}$$

тут $h_k(n) = Z^{-1} \{H_k(z)\}$ – k -та складова імпульсної характеристики $h(n)$.

Імпульсна характеристика $h(n)$ буде обмеженою, якщо будуть обмеженими всі її складові, які можна знайти як зворотні Z -перетворення виразів типу (6.2):

$$\begin{aligned} h_k(n) &= Z^{-1} \{H_k(z)\} = \text{Res} [\beta_k z^{n-1} / (1-z_{pk}z^{-1}), z = z_{pk}] = \\ &= \text{Res} [\beta_k z^n / (z-z_{pk}), z = z_{pk}] = \beta_k (z_{pk})^n. \end{aligned}$$

Відліки $h_k(n)$ є помножені на константу β_k елементи нескінченної геометричної прогресії, початковий член якої дорівнює $(z_{pk})^0 = 1$, а знаменник прогресії дорівнює полюсу z_{pk} . Сума всіх членів такої прогресії є скінченим числом тільки за умов, що $|z_{pk}| < 1$. Це означає, що на z -площині полюс z_{pk} має бути розташований в межах кола одиничного радіусу, центр якого збігається із початком координат.

Приклад 6.1.1. З'ясувати, чи є стійким цифровий фільтр, різницеве рівняння якого має вигляд

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 1,2y(n-1) - 0,81y(n-2).$$

Розв'язання. За різницевим рівнянням знаходимо системну функцію фільтра (див. підрозділ 6.2):

$$H(z) = (1-2z^{-1}) / (1-1,2z^{-1} + 0,81z^{-2}).$$

Знаходимо полюси системної функції як корені полінома її знаменника, тобто розв'язуючи рівняння

$$\begin{aligned} 1 - 1,2z^{-1} + 0,81z^{-2} &= z^2 - 1,2z + 0,81 = 0; \\ z_{п1,2} &= 0,6 \pm \sqrt{0,36 - 0,81} = 0,6 \pm \sqrt{-0,45} = 0,6 \pm j0,67. \end{aligned}$$

Отримали два комплексно-спряжені полюси $z_{п1} = 0,6 + j0,67$; $z_{п2} = 0,6 - j0,67$. Системна функція має прості полюси та $M = 1 < N = 2$, тобто виконуються умови, за яких були отримані попередні результати в цьому розділі.

Оскільки полюси комплексно-спряжені, вони мають однакові модулі

$$|z_{п1}| = |z_{п2}| = \sqrt{0,6^2 + 0,67^2} \approx 0,9 < 1.$$

Отже, полюси розташовані в межах кола одиничного радіусу; фільтр є стійким.

— *** —

В разі, коли $M \geq N$, системна функція $H(z)$ фільтра може бути представлена таким виразом:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 - z_{\Pi k} z^{-1}} + \gamma_0 + \gamma_1 z^{-1} + \gamma_2 z^{-2} + \dots + \gamma_{(M-N)} z^{-(M-N)}. \quad (6.3)$$

Приклад 6.1.2. З'ясувати, чи є стійким цифровий фільтр, різницеve рівняння якого має вигляд

$$y(n) = 3x(n) - 2x(n-1) + 4x(n-2) - y(n-2).$$

Отримати аналітичний вираз для імпульсної характеристики $h(n)$ та проаналізувати її залежність від n (характер змінювання в часі).

Розв'язання. Як і в прикладі 7.1, знаходимо системну функцію фільтра:

$$H(z) = (3 - 2z^{-1} + 4z^{-2}) / (1 + z^{-2}) = (3z^2 - 2z + 4) / (z^2 + 1).$$

Оскільки $M = N$, ділимо чисельник системної функції на знаменник, щоб позбавитись від неправильного дроби, тобто щоб степінь чисельника був меншим степеня знаменника

$$= \frac{3z^2 - 2z + 4}{3z^2 + 3} \left| \frac{z^2 + 1}{3} \right. \\ \left. - \frac{-2z + 1}{-2z + 1} \right.$$

Тепер $H(z)$ можна представити наступним чином

$$H(z) = 3z^0 + (-2z + 1) / (z^2 + 1) = 3z^0 + \tilde{H}(z).$$

Розкладемо $\tilde{H}(z) = (-2z + 1) / (z^2 + 1)$ на прості дроби, для чого спочатку знаходимо корені знаменника $\tilde{H}(z)$, розв'язавши рівняння $z^2 + 1 = 0$:

$$z_{\Pi 1} = -j = e^{-j90^\circ}; \quad z_{\Pi 2} = j = e^{j90^\circ}.$$

Маємо

$$\tilde{H}(z) = (-2z + 1) / (z^2 + 1) = (-2z + 1) / [(z + j)(z - j)] = A / (z + j) + B / (z - j).$$

Додаємо прості дроби

$$A / (z + j) + B / (z - j) = [A(z - j) + B(z + j)] / [(z + j)(z - j)] = \\ = [(A + B)z - j(A - B)] / (z^2 + 1).$$

Коефіцієнти розкладання A та B отримаємо з умов рівності дробів з однаковими знаменниками

$$(-2z + 1) / (z^2 + 1) = [(A + B)z - j(A - B)] / (z^2 + 1).$$

Щоб дроби були рівними, необхідна рівність чисельників. Чисельники ж будуть рівними, якщо будуть однаковими значення коефіцієнтів при однакових степенях z . Тож маємо систему двох рівнянь першого степеня:

$$\begin{cases} A + B = -2; \\ A - B = j. \end{cases}$$

Додаємо рівняння $2A = -2 + j \Rightarrow A = -1 + 0,5j$.

Віднімаємо друге рівняння від першого $2B = -2 - j \Rightarrow B = -1 - 0,5j$.

Отримали вираз для $H(z)$:

$$H(z) = 3z^0 + (-1 + 0,5j)/(z+j) - (1 + 0,5j)/(z-j).$$

Позначимо

$$H_1(z) = 3z^0;$$

$$H_2(z) = (-1 + 0,5j)/(z+j);$$

$$H_3(z) = (1 + 0,5j)/(z-j).$$

Складова $H_1(z)$ відповідає найпростішому нерекурсивному фільтру першого порядку $y(n) = 3x(n)$. Імпульсна характеристика такого фільтра $h_1(n) = 3\delta(n)$ є обмеженою в часі; фільтр з такою характеристикою є стійким.

Імпульсні характеристики для складових $H_2(z)$ та $H_3(z)$ знайдемо за допомогою лишків:

$$h_2(n) = \sum_k \text{Res}[H_2(z)z^{n-1}, z_{pk}] = \sum_k \text{Res}[(-1 + 0,5j)z^{n-1}/(z-j), z_{pk}].$$

Здається, що $H_2(z)z^{n-1} = (-1 + 0,5j)z^{n-1}/(z+j)$ має тільки один полюс при $z=j$, але для $n=0$ отримаємо $H_2(z)z^{-1} = (-1 + 0,5j)/[z(z+j)]$, тобто $H_2(z)z^{-1}$ має два полюси – один при $z=0$, другий при $z=-j$, тому $h_2(0)$ буде дорівнювати сумі двох лишків в цих полюсах:

$$\begin{aligned} h_2(0) &= \text{Res}[(-1 + 0,5j)/[z(z+j)], z=0] + \text{Res}[(-1 + 0,5j)/[z(z+j)], z=-j] = \\ &= (-1 + 0,5j)/(+j) + (-1 + 0,5j)/(-j) = 0. \end{aligned}$$

Аналогічно $h_3(0) = 0$.

Для $n > 0$ складові $H_2(z)$ та $H_3(z)$ мають по одному простому полюсу. Знаходимо аналітичні вирази для $h_2(n)$ та для $h_3(n)$ як лишки $H_2(z)$ та $H_3(z)$ відповідно:

$$\begin{aligned} h_2(n) &= \text{Res}[(-1 + 0,5j)z^{n-1}/(z+j), z=-j] = (-1 + 0,5j)(-j)^{n-1} = \\ &= (-1 + 0,5j)e^{-j(n-1)90^\circ}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_3(n) &= \text{Res}[(1 + 0,5j)z^{n-1}/(z-j), z=j] = (1 + 0,5j)(j)^{n-1} = \\ &= (1 + 0,5j)e^{j(n-1)90^\circ}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $-j = 1/(j)$, отримаємо

$$\begin{aligned} h_2(n) - h_3(n) &= -[e^{j(n-1)90^\circ} + e^{-j(n-1)90^\circ}] + 0,5j[e^{j(n-1)90^\circ} + e^{-j(n-1)90^\circ}] = \\ &= -2\cos[(n-1)90^\circ] + \sin[(n-1)90^\circ]. \end{aligned}$$

Аналітичний вираз для імпульсної характеристики фільтра буде таким:

$$h(n) = 3\delta(n) - 2\cos[(n-1)90^\circ] + \sin[(n-1)90^\circ]. \quad (6.4)$$

Розрахуємо декілька початкових відліків імпульсної характеристики фільтра, маючи на увазі, що вираз (6.4) буде використовуватись при $n > 0$:

$$h(0) = 3;$$

$$\begin{aligned}
h(1) &= -2 \cos 0^\circ + \sin 0^\circ = -2 + 0 = -2; \\
h(2) &= -2 \cos 90^\circ + \sin 90^\circ = 0 + 1 = 1; \\
h(3) &= -2 \cos 180^\circ + \sin 180^\circ = 2 + 0 = 2; \\
h(4) &= -2 \cos 270^\circ + \sin 270^\circ = 0 - 1 = -1; \\
h(5) &= -2 \cos 360^\circ + \sin 360^\circ = -2 + 0 = -2; \\
h(6) &= -2 \cos 450^\circ + \sin 450^\circ = 0 + 1 = 1; \\
h(7) &= -2 \cos 540^\circ + \sin 540^\circ = 2 + 0 = 2;
\end{aligned}$$

Бачимо, що в сталому режимі, починаючи з $n = 2$, імпульсна характеристики має коливальний характер. В цьому випадку кажуть, що фільтр знаходиться на межі стійкості. Така ситуація має місце, коли хоч один полюс системної функції знаходиться на одиничному колі.

— *** —

Підводячи підсумок, можна стверджувати: якщо хоч один полюс системної функції знаходиться на одиничному колі, а всі інші – в межах одиничного кола, фільтр знаходиться на межі стійкості; якщо всі полюси знаходяться в межах одиничного кола (при цьому жодного немає на одиничному колі), фільтр буде стійким; якщо хоч один полюс знаходиться за межами одиничного кола, фільтр буде нестійким.

До подібного висновку можна дійти, враховуючи зв'язок між точками z -площини та p -площини (так зване конформне відображення), та користуючись критерієм стійкості неперервних лінійних систем по розташуванню полюсів передавальної функції $K(p)$ на p -площині.

Співвідношення $z = e^{pT}$ пов'язує точки p -площини та z -площини. Аргумент p є комплексною величиною $p = \sigma + j\omega$, тому можна записати

$$z = e^{pT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = |z| e^{j \arg(z)}. \quad (6.5)$$

Якщо комплексні числа однакові, вони мають однакові модулі і аргументи. В даному випадку важливим є співвідношення модулів:

$$e^{\sigma T} = |z|.$$

Неперервна лінійна система буде стійкою, якщо всі полюси її передавальної функції $K(p)$ розташовані на лівій напівплощині p -площини, тобто при від'ємних значеннях σ ; при цьому

$$e^{-\sigma T} = |z| < 1.$$

Із цієї нерівності виходить, що умовою стійкості цифрового фільтра є розташування всіх полюсів його системної функції $H(z)$ усередині одиничного кола на z -площині.

Кожній складовій за межами знаку суми відповідає найпростіший нерекурсивний фільтр із різницеvim рівнянням $y(n) = \gamma_k x(n-k)$. Складовим під знаком суми відповідають рекурсивні фільтри першого порядку, коефіцієнти різницеvim рівнянь котрих можуть бути як дійсними числами, так і

комплексними, що визначається типом полюсів складових. Раніше відзначалось, що складові із комплексними полюсами будуть входити в (6.3) парами; їхні полюси будуть комплексно-спряженими. Об'єднавши додаванням такі складові в одну, отримуємо системну функцію фільтра другого порядку із дійсними коефіцієнтами. Тоді системну функцію (7.3) можна записати у такий спосіб:

$$H(z) = H_0(z) + H_1(z) + \dots + H_{(M-N)}(z) + \hat{H}_1(z) + \hat{H}_2(z) + \dots + \hat{H}_R(z) + \tilde{H}_1(z) + \tilde{H}_2(z) + \dots + \tilde{H}_G(z); \quad R + 2G = N; \quad (6.6)$$

де $H_k(z)$ – системна функція найпростішого нерекурсивного фільтра, який затримує вхідний сигнал на k кроків та підсилює в γ_k разів; якщо $M < N$, ці складові відсутні;

$\hat{H}_k(z)$ – системна функція рекурсивного фільтра першого порядку із дійсними коефіцієнтами;

$\tilde{H}_k(z)$ – системна функція рекурсивного фільтра другого порядку із дійсними коефіцієнтами.

Вираз (6.6) відповідає паралельній формі реалізації фільтра із системною функцією $H(z)$ фільтрами першого та другого порядків із дійсними коефіцієнтами.

6.2 Частотна характеристика цифрового фільтра

6.2.1. Особливості частотної характеристики цифрового фільтра

Частотна характеристика будь-якої лінійної системи пов'язує простим співвідношенням вхідний та вихідний сигнали в разі, коли вхідним сигналом є гармонічне коливання: комплексне гармонічне коливання $x(t) = Ae^{j\omega t}$ або синусне коливання $x(t) = A\sin(\omega t)$; нагадаємо, що синусне коливання, грунтуючись на формулі Ейлера, можна виразити сумою двох комплексних гармонічних коливань:

$$\sin(\omega t) = (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) / (2j).$$

Реакція на вхідне гармонічне коливання буде гармонічним коливанням такої ж частоти; змінюватись буде тільки амплітуда та початкова фаза. Жодному вхідному сигналу така властивість не притаманна. В математичних дослідженнях гармонічну функцію називають власною функцією лінійної системи.

Отримаємо сигнал на виході цифрового фільтра, користуючись формулою згортки $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$, для вхідного дискретного комплексного гармонічного коливання $x(nT) = Ae^{j\omega nT}$:

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)Ae^{j\omega(n-k)T} = Ae^{j\omega nT} \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-j\omega kT}. \quad (6.7)$$

Отже, вихідний сигнал отримали множенням вхідного сигналу $Ae^{j\omega nT}$ на частотну характеристику, яку ще називають комплексним частотним коефіцієнтом передачі

$$K(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-j\omega kT}. \quad (6.8)$$

Для конкретного значення частоти ω вираз (6.8) дасть комплексне число (якщо ряд збігається) з модулем $|K(\omega)|$ та аргументом $\arg[K(\omega)]$. В результаті амплітуда A вхідного сигналу буде помножена на $|K(\omega)|$, а до початкової фази вхідного сигналу буде додано $\arg[K(\omega)]$.

Вираз (6.8) дає змогу зробити деякі висновки.

По-перше, $K(\omega)$ є прямим перетворенням Фур'є імпульсної характеристики фільтра (ряд Фур'є). Це можна вважати визначенням частотної характеристики.

По-друге, порівнюючи вирази $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}$ та (6.8), бачимо, що вираз для $K(\omega)$ можна отримати із системної функції $H(z)$, замінивши в ній z на $e^{j\omega T}$. Тому для частотної характеристики цифрового фільтра використовують позначення $H(e^{j\omega T})$, $K(e^{j\omega T})$ або $K(e^{j\omega})$. Оскільки модуль $|e^{j\omega T}| = 1$, частотна характеристика $K(e^{j\omega})$ цифрового фільтра збігається зі значеннями системної функції $H(z)$ на одиничному колі в z -площині.

По-третє, частота ω буде входити у вираз для будь-якого цифрового фільтра виключно як співмножник показника степеня: $e^{j\omega T}$. Але $e^{j\omega T}$ є вектором одиничної довжини із кутом повороту (аргументом) ωT , і якщо при збільшенні ω він виконає повний оберт (аргумент при цьому збільшиться на 2π), або ціле число обертів, він опиниться в початковому положенні, тобто функція $e^{j\omega T}$ є періодичною:

$$e^{j\omega T} = e^{j(\omega T + 2\pi m)} = e^{jT(\omega + 2\pi m/T)}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Із періодичності $e^{j\omega T}$ випливає періодичність $K(e^{j\omega})$.

Врешті-решт, маємо

$$K(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-j\omega kT}. \quad (6.9)$$

Хоча в аналітичних виразах для частотної характеристики цифрового фільтра використовують позначення $K(e^{j\omega})$, при побудові графіків по осі абсцис відкладається частота ω в рад/с або f в Гц. Форма $K(e^{j\omega})$ використовується винятково для того, щоб підкреслити, що частота ω входить в аналітичних виразах як уявна степінь e , тобто визначає кут повороту одиничного вектору. Монотонне збільшення частоти ω буде тягти за собою рівномірне періодичне обертання одиничного вектору, з чого випливає, що частотна характеристика ЦФ є періодичною функцією частоти з періодом $\omega_{\Pi} = 2\pi/T$ рад/с або $f_{\Pi} = 1/T$ Гц, що збігається з частотою дискретизації. Ця особливість частотної характеристики ЦФ ще раз, але вже з інших позицій, аргументує необхідність застосування антиелайзінгового фільтра.

Періодичність частотної характеристики цифрового фільтра є суттєвою особливістю, що відрізняє цифрові фільтри від аналогових.

Частотна характеристика є комплекснозначною функцією, тому її, як будь-яке комплексне число, можна виразити через дійсну $\text{Re}[K(e^{j\omega})]$ та уявну $\text{Im}[K(e^{j\omega})]$ частини або через модуль $|K(e^{j\omega})|$ та аргумент $\arg[K(e^{j\omega})]$:

$$K(e^{j\omega}) = \text{Re}[K(e^{j\omega})] + j \text{Im}[K(e^{j\omega})] = |K(e^{j\omega})| \exp\{\arg[K(e^{j\omega})]\}. \quad (6.10)$$

Модуль $|K(e^{j\omega})|$ – амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) фільтра; це залежність відношення амплітуди вихідного сигналу до амплітуди вхідного гармонічного сигналу від частоти ω в сталому режимі, тобто при $n \rightarrow \infty$.

Аргумент $\arg[K(e^{j\omega})]$ – фазочастотна характеристика (ФЧХ); визначає залежність різниці початкових фаз вихідного та вхідного гармонічних коливань (фазовий зсув) від частоти ω в сталому режимі. Простіше кажучи, характеризує залежність затримки фільтром гармонічного коливання від частоти.

Розглянемо, ще одну особливість частотної характеристики фільтра. Застосувавши формулу Ейлера, запишемо $K(e^{j\omega})$ у вигляді

$$K(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k T} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \cos(n\omega T) - j \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \sin(n\omega T);$$

$$\text{Re}[K(e^{j\omega})] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \cos(n\omega T); \quad \text{Im}[K(e^{j\omega})] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \sin(n\omega T).$$

У вираз для реальної частини частота ω входить як аргумент косинуса; $\cos(n\omega T)$ є парною функцією частоти ω , тобто $\cos(n\omega T) = \cos(-n\omega T)$, звідки виходить, що $\text{Re}[K(e^{j\omega})]$ є також парною функцією частоти

$$\text{Re}[K(e^{j\omega})] = \text{Re}[K(e^{-j\omega})].$$

У вираз для уявної частини частота ω входить як аргумент синуса; $\sin(n\omega T)$ є непарною $|K(e^{j\omega})|$ функцією частоти ω , тобто $\sin(n\omega T) = -\sin(-n\omega T)$, звідки виходить, що $\text{Im}[K(e^{j\omega})]$ є непарною функцією частоти

$$\text{Im}[K(e^{j\omega})] = -\text{Im}[K(e^{-j\omega})].$$

Тож, маємо

$$\begin{aligned} K(e^{j\omega}) &= \text{Re}[K(e^{j\omega})] - j \text{Im}[K(e^{j\omega})]; \\ K(e^{-j\omega}) &= \text{Re}[K(e^{j\omega})] + j \text{Im}[K(e^{-j\omega})]. \end{aligned}$$

Для АЧХ отримаємо

$$|K(e^{j\omega})| = |K(e^{-j\omega})| = \sqrt{\{\text{Re}[K(e^{j\omega})]\}^2 + \{\text{Im}[K(e^{j\omega})]\}^2}. \quad (6.11)$$

Для ФЧХ співвідношення дещо складніші. Відношення уявної частини до реальної дорівнює тангенсу кута (тангенсу аргументу), звідки маємо

$$\arg[K(e^{j\omega})] = \text{arctg} \{ -\text{Im}[K(e^{j\omega})] / \text{Re}[K(e^{j\omega})] \}.$$

Оскільки arctg функція непарна, то

$$\arg[K(e^{j\omega})] = -\text{arctg} \{ \text{Im}[K(e^{j\omega})] / \text{Re}[K(e^{j\omega})] \}.$$

Далі

$$\arg [K(e^{-j\omega})] = \arctg \{ \text{Im}[K(e^{j\omega})]/\text{Re}[K(e^{j\omega})] \}.$$

Нарешті

$$\arg [K(e^{j\omega})] = - \arg [K(e^{j\omega})]. \quad (6.12)$$

Аналізуючи (6.11) та (6.12), бачимо, що модуль частотної характеристики (АЧХ) є парною, а аргумент (ФЧХ) непарною функцією частоти.

Звертаючись до $H(z) = a_0 z^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_{0i})}{\prod_{k=1}^N (z - z_{\Pi k})}$, з урахуванням (6.9) отримаємо

$$K(e^{j\omega}) = a_0 e^{j\omega T(N-M)} \frac{\prod_{i=1}^M (e^{j\omega T} - z_{0i})}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega T} - z_{\Pi k})}. \quad (6.13)$$

Із цього витікає, що частотна характеристика ЦФ з точністю до коефіцієнта підсилення a_0 цілком визначається нулями z_{0i} і полюсами $z_{\Pi k}$ його системної функції.

Розглянемо, як впливає розташування нулів і полюсів на вигляд АЧХ – модуля частотної характеристики. З урахуванням того, що $|e^{j\omega T(N-M)}| = 1$, отримаємо з (6.8) :

$$|K(e^{j\omega})| = |a_0| \frac{\prod_{i=1}^M |e^{j\omega T} - z_{0i}|}{\prod_{k=1}^N |e^{j\omega T} - z_{\Pi k}|}. \quad (6.14)$$

Вираз (6.14) дає безрозмірну величину АЧХ у разях. Часто при графічному зображенню АЧХ, особливо при значному динамічному діапазоні сигналів, що обробляються, величина АЧХ надається в логарифмічних одиницях – децибеллах. В такому разі

$$|K(e^{j\omega})|_{\text{дБ}} = 20 [\lg a_0 + \sum_{i=1}^M \lg |e^{j\omega T} - z_{0i}| - \sum_{k=1}^N \lg |e^{j\omega T} - z_{\Pi k}|].$$

Із (6.13) можна також отримати вираз для ФЧХ фільтра, враховуючи, що $\arg(a_0) = 0$, та $\arg [e^{j\omega(N-M)T}] = (N-M) \omega T$:

$$\arg [K(e^{j\omega})] = (N-M) \omega T + \sum_{i=1}^M \arg(e^{j\omega T} - z_{0i}) - \sum_{k=1}^N \arg(e^{j\omega T} - z_{\Pi k}).$$

Практично застосовувати останній вираз складно на відміну від виразу (6.14), який дає можливість швидко оцінити характер АЧХ по розташуванню нулів і полюсів системної функції на z -площині, що демонструється нижче.

Співмножник чисельника в (6.14) $|e^{j\omega T} - z_{0i}|$ – це довжина $d(e^{j\omega T}, z_{0i})$ вектору, який є різницею між одиничним вектором $e^{j\omega T}$, що обертається, і постійним вектором z_{0i} . Зазвичай нулі розташовують на одиничному колі, тобто $|z_{0i}| = 1$. У цьому випадку при $\omega T = \arg(z_{0i})$ одиничний вектор

$e^{j\omega T}$ суміститься з вектором z_{0i} . Вектор різниці буде дорівнювати нулю: $d(e^{j\omega T}, z_{0i}) = 0$; коефіцієнт передачі фільтра на частоті $\omega_i = \arg(z_{0i})/T$ буде нульовим. Тож, розташовуючи нулі $H(z)$ на одиничному колі певним чином, можна забезпечити придушення синусних складових на відповідних частотах.

У вирази $|e^{j\omega T} - z_{\Pi k}|$ для множників знаменника (6.14) входять вектори полюсів $H(z)$, модулі яких завжди менше одиниці (вимога для стійких фільтрів). Тому для k -го полюса величина $d(e^{j\omega T}, z_{\Pi k})$ буде мінімальною при $\omega T = \arg(z_{\Pi k})$. Величина цього мінімуму завжди менше одиниці і при інших рівних умовах буде зменшуватися при наближенні величини модуля полюса $|z_{\Pi k}|$ до одиниці. Отже, розташовуючи полюси $H(z)$ усередині одиничного кола на z -площині досить близько до кола одиничного радіуса, можна забезпечити підйом АЧХ на відповідних частотах.

Вищесказане ілюструється на рис. 6.1, 6.2. Дев'ять розташованих на одиничному колі нулів системної функції (чотири пари комплексно-спряжених і один дійсний) забезпечують нульове значення коефіцієнта передачі ЦФ для дев'яти значень частот в інтервалі від 0 до $f_D = 2000$ Гц.

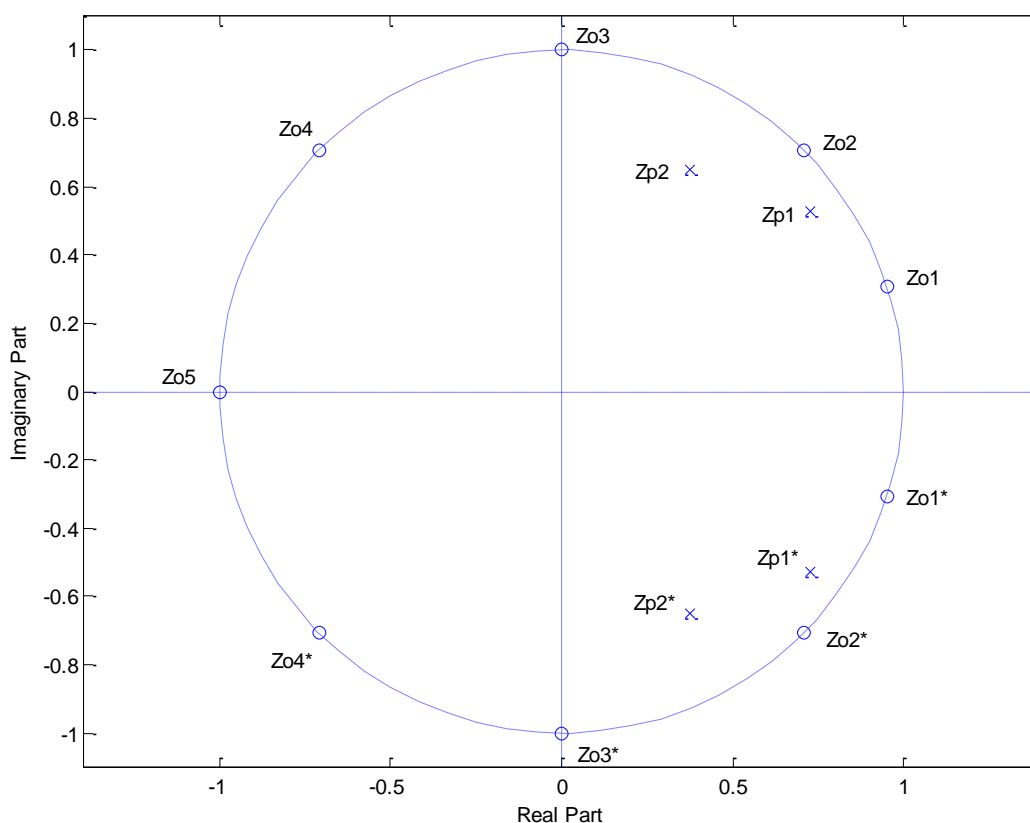


Рис. 6.1. Розташування нулів і полюсів функції $H(z)$

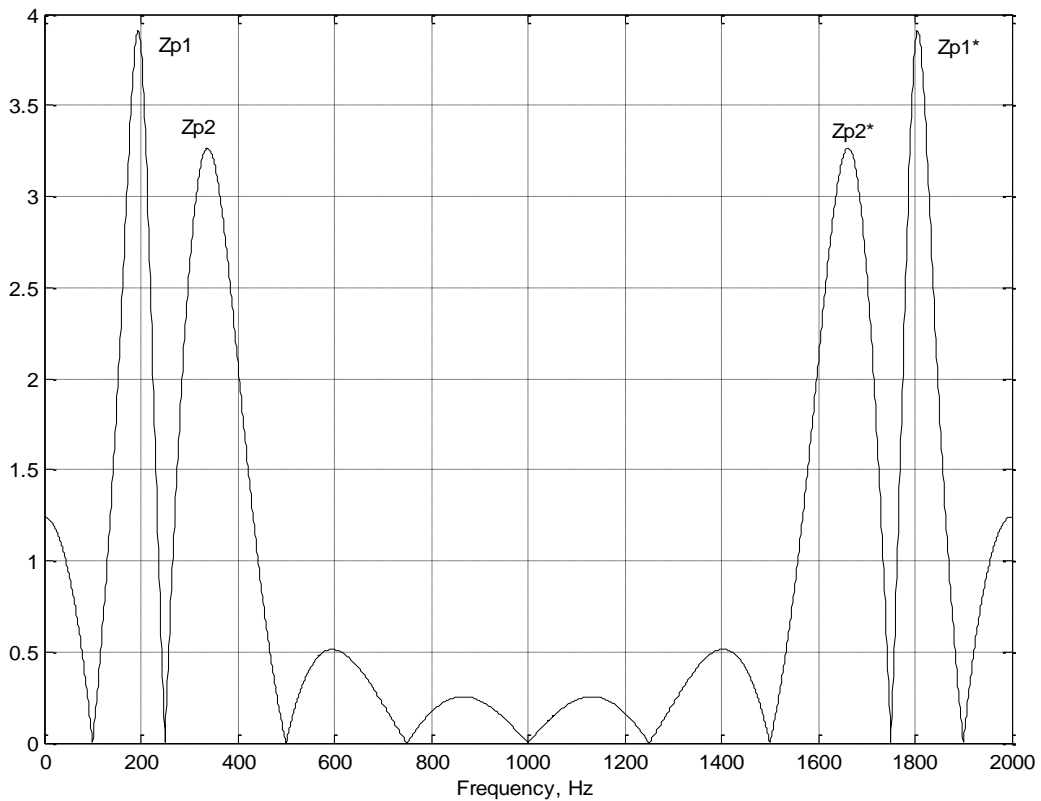


Рис. 6.2. Амплітудно-частотна характеристика ЦФ

Дві пари комплексно-спряжених полюсів сформували чотири піки на АЧХ. Полюсам Z_{p1} та Z_{p1}^* відповідають вищі піки, оскільки вони менш віддалені від одиничного кола, ніж полюси Z_{p2} та Z_{p2}^* . АЧХ симетрична відносно вертикальної прямої, що проходить через точку $f_d/2 = 1000$ Гц. Це є наслідком симетричного розташування нулів і полюсів $H(z)$ відносно дійсної осі z -площини, що характерно для всіх ЦФ з дійсними коефіцієнтами. З цього виходить, що синтезувати частотну характеристику ЦФ можна тільки в смузі частот від 0 до $f_d/2$ Гц. Цю смугу називають *основним діапазоном частот* або ж *основною смугою частот*.

Для розрахунку типових частотно-виборчих фільтрів (нижніх або верхніх частот, смугових, режекторних) існують ефективні програмні продукти, наприклад, система або середовище MATLAB. Вони дозволяють синтезувати фільтри, які відрізняються аналітичними виразами, що апроксимують ідеальні АЧХ; це фільтри Баттерворта, Чебишева першого і другого роду, еліптичні (Кауера). Звісно, вони відрізняються формою АЧХ і ФЧХ в смугах пропускання і затримання.

Для цифрової обробки сигналів важливі не абсолютні значення частот, а відношення частоти f Гц або ω рад./с до частоти f_d дискретизації. Тому в теоретичних дослідженнях, а також в розрахунках цифрових фільтрів в середовищі MATLAB часто використовується безрозмірна *нормована частота*

$$f_n = f/f_d = fT; \quad \text{основна смуга частот } 0 \leq f_n \leq 0,5;$$

або $\omega_n = \omega/f_d = \omega T; \quad \text{основна смуга частот } 0 \leq \omega_n \leq \pi.$

6.2.2. Цифрові фільтри із лінійною фазочастотною характеристикою

Сигнал, що надходить на вхід ЦФ, в процесі обробки затримується. В загальному випадку гармонічні складові на різних частотах будуть зазнавати різної затримки. В деяких системах це не призводить до неприємностей. Так, при передачі та обробці мовних сигналів початкові фази спектральних (гармонічних) складових неважливі: слуховий апарат людини аналізує лише амплітудні спектри. Проте, можна навести багато прикладів, коли бажано, щоб всі частотні складові сигналу затримувались на однаковий час. Це стосується цифрових систем зв'язку, де для передачі даних використовуються імпульси складної форми, інформаційно-вимірювальних систем, де час затримки імпульсного сигналу є інформаційним параметром, тощо. Навіть при постійній АЧХ ($|K(e^{j\omega})| = \text{const}$), але різній затримці частотних складових імпульсні сигнали можуть суттєво спотворюватись. Залежність затримки гармонічних складових від частоти визначає так званий *час групової затримки* $\tau_{\text{гз}}$, який пов'язаний із ФЧХ таким співвідношенням:

$$\tau_{\text{гз}} = -d\{\arg [K(e^{j\omega})]\}/d\omega;$$

із якого витікає, що час групової затримки буде постійним тоді і тільки тоді, коли ФЧХ буде лінійною функцією частоти.

Жоден рекурсивний фільтр, тобто фільтр із нескінченною імпульсною характеристикою не може забезпечити лінійну ФЧХ. Те ж можна стверджувати і про фільтри аналогові, оскільки всі вони мають нескінченні імпульсні характеристики (час розряду конденсатора, котрий завжди є елементом аналогового фільтра, теоретично нескінченний).

Проте нерекурсивний фільтр може мати лінійну ФЧХ. Розглянемо декілька прикладів, щоб з'ясувати умови, за яких ФЧХ фільтра буде лінійною.

Приклад 6.2.1. Отримати аналітичні вирази для АЧФ та ФЧХ для фільтра із різницевою рівнянням $y(n) = x(n) + x(n-1)$. Проаналізувати результати.

Розв'язання. Із різницевого рівняння виходить, що це є нерекурсивний фільтр 1-го порядку, коефіцієнти котрого $a_0 = a_1 = 1$.

Системна функція такого фільтра $H(z) = 1 + z^{-1}$. Звертаючись до (6.9), отримаємо

$$K(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = 1 + e^{-j\omega T}.$$

Замінімо доданки правої частини на вирази $1 = (e^{j\omega T/2} \times e^{-j\omega T/2})$, а $e^{-j\omega T} = (e^{-j\omega T/2} \times e^{-j\omega T/2})$ та винесемо за дужки $e^{-j\omega T/2}$:

$$K(e^{j\omega}) = e^{-j\omega T/2} (e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}) = e^{-j\omega T/2} 2 \cos(\omega T/2). \quad (6.15)$$

Отже, маємо для АЧХ

$$|K(e^{j\omega})| = 2|\cos(\omega T/2)|;$$

для ФЧХ

$$\arg [K(e^{j\omega})] = -\omega T/2 \cdot \text{sign}[\cos(\omega T/2)],$$

де $\text{sign}[x]$ – функція знаку, яка приймає такі значення

$$\text{sign}[x] = \begin{cases} 1 & \text{для } x > 0; \\ 0 & \text{для } x = 0; \\ -1 & \text{для } x < 0. \end{cases}$$

Висновок: в основній смузі частот $\text{sign}[\cos(\omega T/2)] = 1$, отже ФЧХ є лінійною функцією частоти.

Аналізуючи цей результат, можна прийти до висновку, що отримати вираз для частотної характеристики $K(e^{j\omega})$ у вигляді (6.15) вдалося завдяки тому, що $a_0 = a_1 = 1$. Не важко пересвідчитись, що вираз для фазочастотної характеристики не зміниться, якщо a_0 та a_1 будуть набувати будь-яких інших значень; необхідно тільки, щоб виконувалась умова $a_0 = a_1$. Зміна значень a_0 та a_1 призведе до зміни постійного (незалежного від частоти) коефіцієнта підсилення у АЧХ.

На рис. 6.3 наведені АЧХ та ФЧХ фільтра.

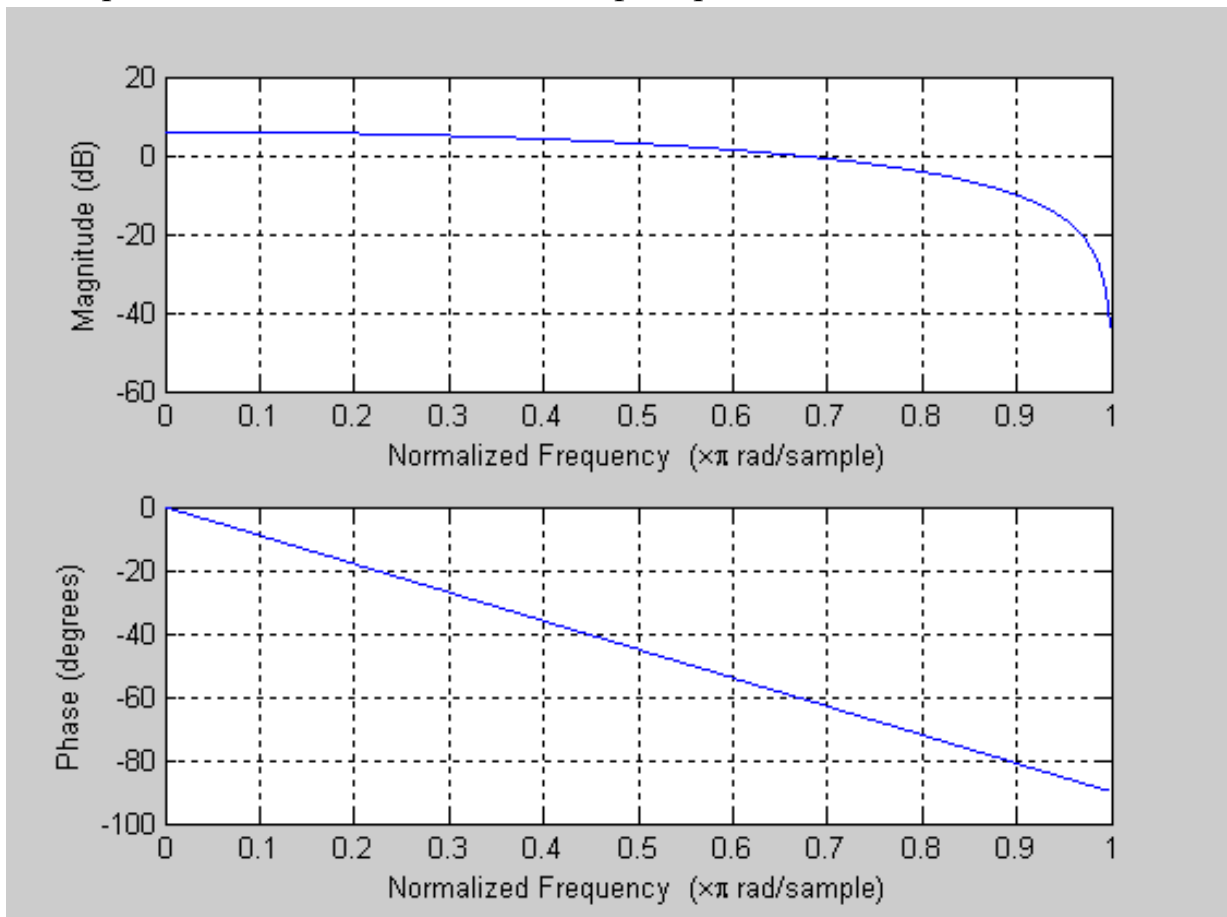


Рис.6.3. АЧХ та ФЧХ фільтра із різницеvim рівнянням $y(n) = x(n) + x(n-1)$

АЧХ надана у логарифмічному масштабі, величина фазового зсуву (ФЧХ) надається в градусах; по осі частот відкладається нормована частота. Графік ФЧХ являє собою відрізок прямої лінії з від'ємним кутом нахилу. Груповий час затримки не залежить від частоти:

$$\tau_{\text{гз}} = -d\{\arg [K(e^{j\omega})]\}/d\omega = -d(-\omega T/2)/d\omega = T/2.$$

Приклад 6.2.2. Отримати аналітичні вирази для АЧФ та ФЧХ для фільтра із різницеvim рівнянням $y(n) = 3x(n) - 3x(n-1)$. Проаналізувати результати.

Розв'язання. Аналізуючи різницеве рівняння, бачимо, що це є нерекурсивний фільтр 1-го порядку з коефіцієнтами $a_0 = 3$, $a_1 = -3$; тобто $a_0 = -a_1$.

Системна функція такого фільтра $H(z) = 3 + 3z^{-1}$. Звертаючись до (6.9), отримаємо

$$K(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = 3 - 3e^{-j\omega T} = 3(1 - e^{-j\omega T}).$$

Як і в прикладі 6.2.1, винесемо за дужки $e^{-j\omega T/2}$:

$$K(e^{j\omega}) = 3[e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})].$$

Із формули Ейлера виходить

$$(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}) = 2j \sin(\omega T/2). \quad (6.16)$$

Отже, маємо

$$\begin{aligned} K(e^{j\omega}) &= 6j e^{-j\omega T/2} \sin(\omega T/2) = 6 e^{j\pi/2} e^{-j\omega T/2} \sin(\omega T/2) = \\ &= 6 e^{j(\pi/2 - \omega T/2)} \sin(\omega T/2). \end{aligned}$$

Аналітичний вираз для АЧХ

$$|K(e^{j\omega})| = 6 |\sin(\omega T/2)|;$$

для ФЧХ

$$\arg [K(e^{j\omega})] = \pi/2 - \omega T/2 \cdot \text{sign}[\sin(\omega T/2)].$$

Бачимо, що ФЧХ є лінійною функцією частоти з таким же кутом нахилу, як і в прикладі 6.2.1, але при частоті $\omega = 0$ ФЧХ набуває значення $90^\circ = \pi/2$ рад.

На рис. 6.4 наведені АЧХ та ФЧХ фільтра.

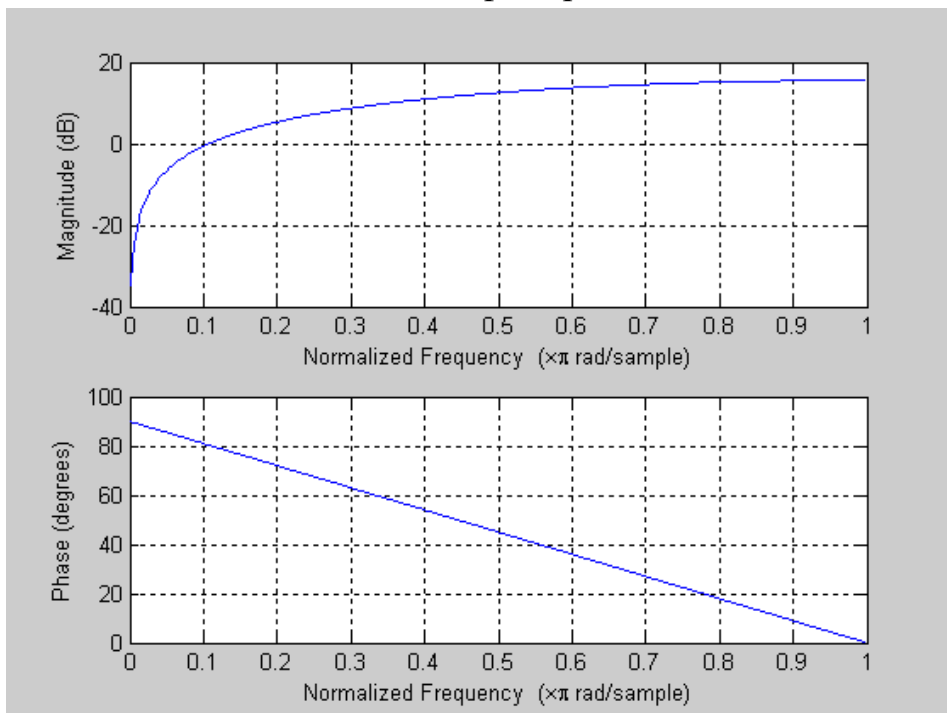


Рис. 6.4. АЧХ та ФЧХ фільтра із різницеvim рівнянням

$$y(n) = 3x(n) - 3x(n-1)$$

Максимальне значення АЧХ фільтра (при нормованій частоті $\omega_H = \pi$) на $20 \lg 3 \approx 9,54$ Дб більше максимального значення АЧХ фільтра із прикладу 6.2.1 (при нормованій частоті $\omega_H = 0$).

Груповий час затримки буде таким же, як у фільтра з прикладу 6.2.1:

$$\tau_{\text{гз}} = -d(-\omega T/2)/d\omega = T/2.$$

— *** —

Приклад 6.2.3. Отримати аналітичні вирази для АЧФ та ФЧХ для фільтра із різницеvim рівнянням $y(n) = 2x(n) - x(n-1) + 2x(n-2)$. Проаналізувати результати.

Розв'язання. Маємо нерекурсивний фільтр 2-го порядку з коефіцієнтами $a_0 = 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$; тобто $a_0 = a_2$.

Системна функція такого фільтра $H(z) = 2 - z^{-1} + 2z^{-2}$.

Частотна характеристика $K(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = 2 - e^{-j\omega T} + 2e^{-2j\omega T}$.

Винесемо у виразі для частотної характеристики за дужки $e^{-j\omega T}$:

$$K(e^{j\omega}) = e^{-j\omega T} (2e^{j\omega T} - 1 + 2e^{-j\omega T}) = e^{-j\omega T} [2(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) - 1].$$

З урахуванням формули Ейлера отримаємо

$$K(e^{j\omega}) = e^{-j\omega T} [4 \cos(\omega T) - 1].$$

Аналітичний вираз для АЧХ

$$|K(e^{j\omega})| = |4 \cos(\omega T) - 1|;$$

для ФЧХ

$$\arg [K(e^{j\omega})] = -\omega T \cdot \text{sign}[4 \cos(\omega T) - 1].$$

На рис. 6.5 наведені АЧХ та ФЧХ фільтра.

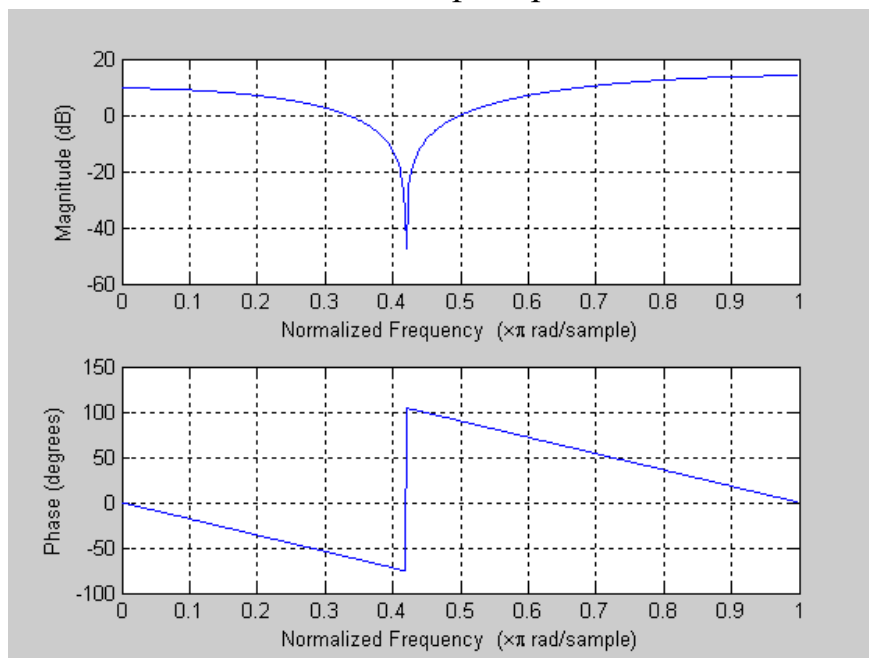


Рис. 6.5. АЧХ та ФЧХ фільтра із різницеvim рівнянням $y(n) = 2x(n) - x(n-1) + 2x(n-2)$

ФЧХ є лінійною функцією частоти з кутом нахилу $-\omega T$, тобто у два рази більшим за модулем в порівнянні із фільтрами 1-го порядку, що розглянуті в прикладах 6.2.1 та 6.2.2. Зрозуміло, що й груповий час затримки буде у два рази більший

$$\tau_{\text{гз}} = -d\{\arg [K(e^{j\omega})]\}/d\omega = -d(-\omega T)/d\omega = T.$$

Стрибок ФЧХ на 180° на нормованій частоті $\omega_H \approx 0,4195\pi$ обумовлений зміною знаку $[4 \cos(\omega T) - 1]$ на цій частоті з «плюс» на «мінус», однак це не впливає на похідну від $\arg [K(e^{j\omega})]$, оскільки після стрибка нахил ФЧХ залишився незмінним.

— *** —

Приклад 6.2.4. Отримати аналітичні вирази для АЧФ та ФЧХ для фільтра із різницеvim рівнянням $y(n) = x(n) - x(n-2)$. Проаналізувати результати.

Розв'язання. Маємо нерекурсивний фільтр 2-го порядку з коефіцієнтами $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1$; тобто $a_0 = -a_2$.

Системна функція такого фільтра $H(z) = 1 - z^{-2}$.

Частотна характеристика $K(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = 1 - e^{-2j\omega T}$.

Як і в прикладі 6.2.3, винесемо за дужки $e^{-j\omega T}$:

$$K(e^{j\omega}) = e^{-j\omega T} (e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}).$$

З урахуванням (6.16) отримаємо

$$K(e^{j\omega}) = 2j e^{-j\omega T} \sin(\omega T) = 2 e^{j\pi/2} e^{-j\omega T} \sin(\omega T) = 2 e^{j(\pi/2 - \omega T)} \sin(\omega T).$$

Аналітичний вираз для АЧХ

$$|K(e^{j\omega})| = 2 |\sin(\omega T)|;$$

для ФЧХ

$$\arg [K(e^{j\omega})] = \pi/2 - \omega T \cdot \text{sign}[\sin(\omega T)].$$

ФЧХ є лінійною функцією частоти з таким же кутом нахилу, як і в прикладі 6.2.3, але при частоті $\omega = 0$ ФЧХ набуває значення $90^\circ = \pi/2$ рад., як в прикладі 6.2.2.

На рис.6.6 наведені АЧХ та ФЧХ фільтра.

Оскільки $\sin(\omega T)$ на інтервалі $0 < \omega T < \pi$ набуває тільки позитивних значень, стрибки ФНЧ на цьому інтервалі відсутні.

— *** —

Діючи у такий спосіб, можна отримати вирази для частотних характеристик фільтрів більш високих порядків. Так, для нерекурсивного фільтра 4-го порядку із різницеvim рівнянням

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4)$$

частотну характеристику можна привести до вигляду:

$$K(e^{j\omega}) = e^{-2j\omega T} [1 + 2 \cos(\omega T) + 2 \cos(2\omega T)].$$

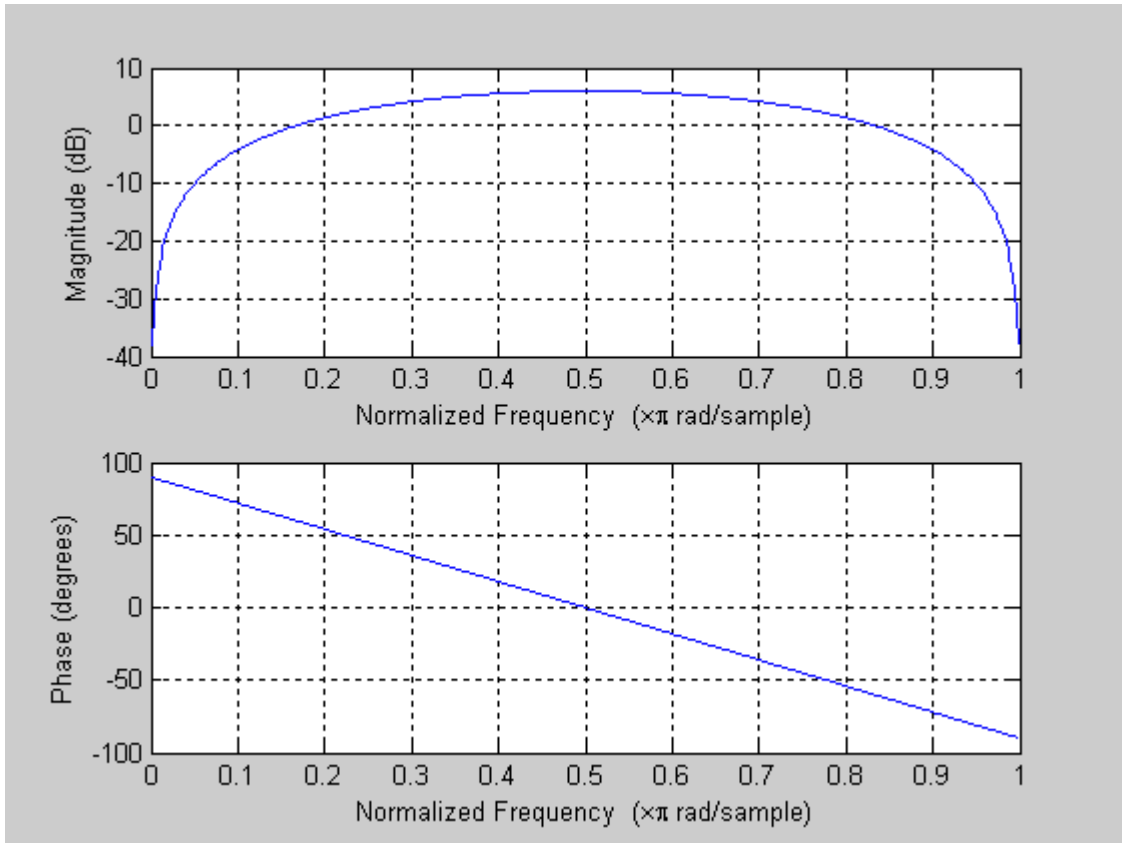


Рис. 6.6. АЧХ та ФЧХ фільтра із різницеvim рівнянням $y(n) = x(n) - x(n-2)$

Аналiтичний вираз для ФЧХ такого фільтра:

$$\arg [K(e^{j\omega})] = -2 \omega T \cdot \text{sign}[1 + 2 \cos(\omega T) + 2 \cos(2 \omega T)].$$

Імпульсна характеристика фільтра наведена на рис. 6.7,а; графік ФЧХ – на рис. 6.7,б. По горизонтальній осі відкладена нормована частота ω_n (від 0 до π радіан), по вертикальній – величина кута зсуву в радіанах.

Груповий час затримки

$$\tau_{\text{ГЗ}} = -d\{\arg [K(e^{j\omega})]\}/d\omega = -d(-2 \omega T)/d\omega = 2 T.$$

— *** —

Останнім розглянемо нерекурсивний фільтр 5-го порядку із різницеvim рівнянням

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) - x(n-3) - x(n-4) - x(n-5).$$

Частотну характеристику можна привести до вигляду:

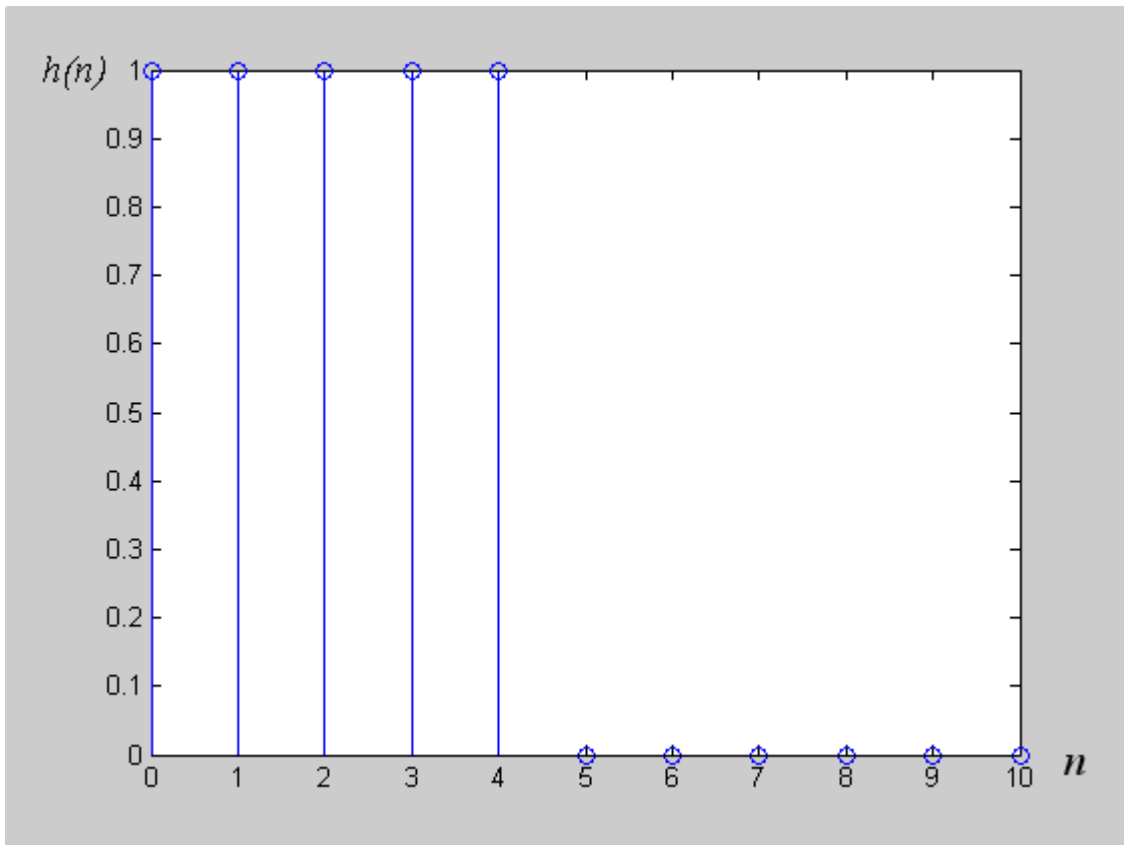
$$K(e^{j\omega}) = 2 e^{j(\pi/2 - \omega 5T/2)} [\sin(\omega T/2) + \sin(\omega 3T/2) + \sin(\omega 5T/2)].$$

Аналiтичний вираз для ФЧХ:

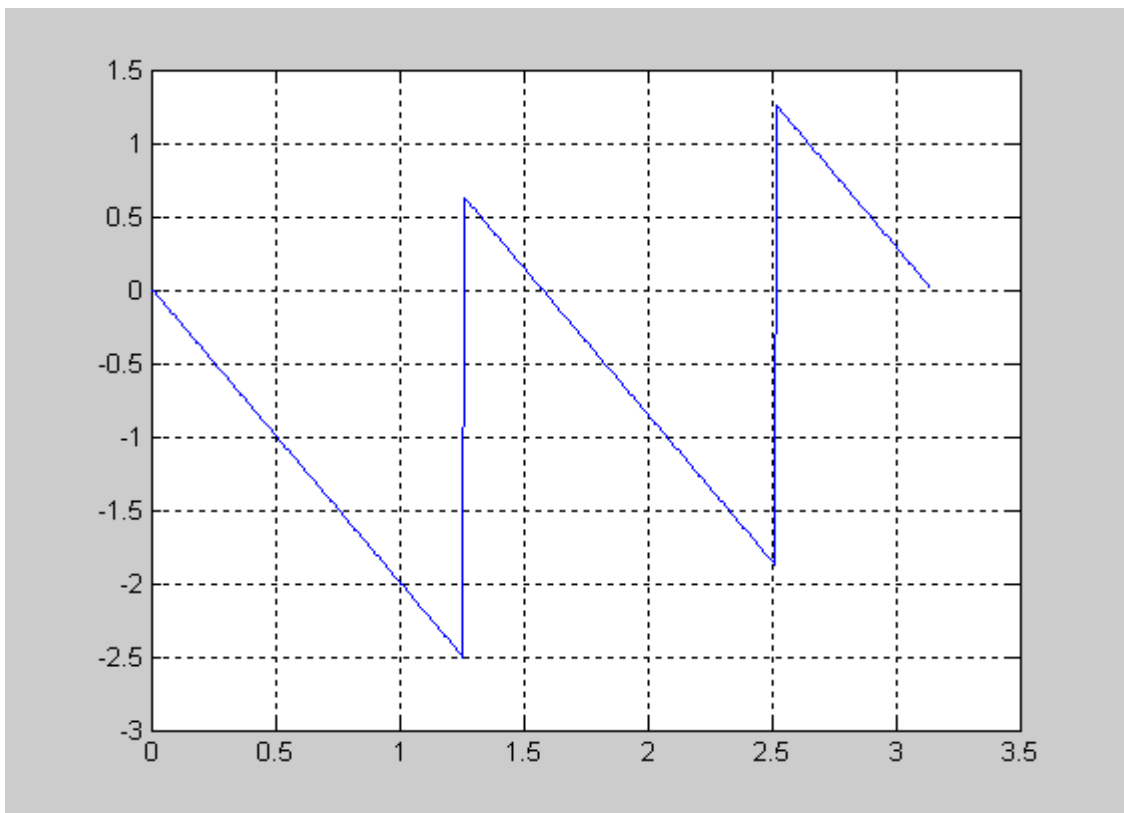
$$\arg [K(e^{j\omega})] = \pi/2 - (\omega 5 T/2) \cdot \text{sign}[\sin(\omega T/2) + \sin(\omega 3T/2) + \sin(\omega 5T/2)].$$

На рис. 6.8,а наведена імпульсна характеристика фільтра; на рис. 6.8,б – графік ФЧХ.

Груповий час затримки $\tau_{\text{ГЗ}} = -d\{\arg [K(e^{j\omega})]\}/d\omega = 5T/2.$

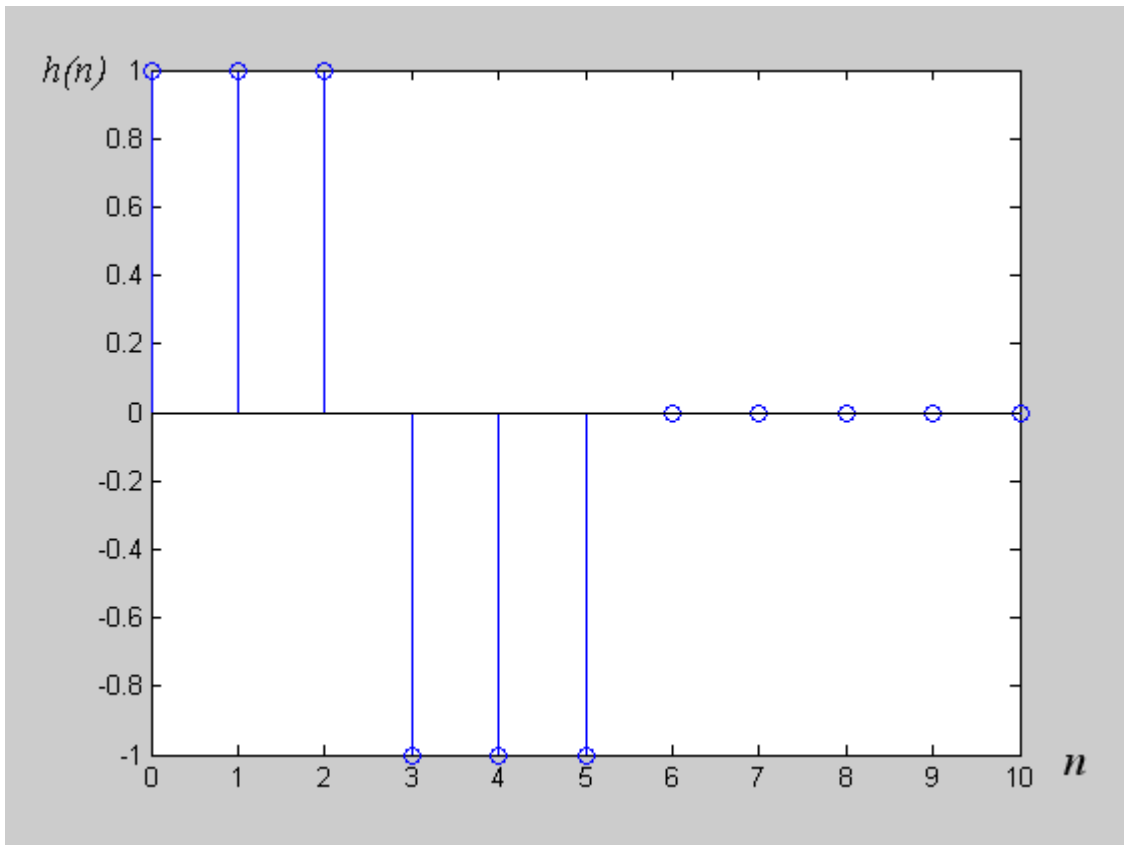


a)

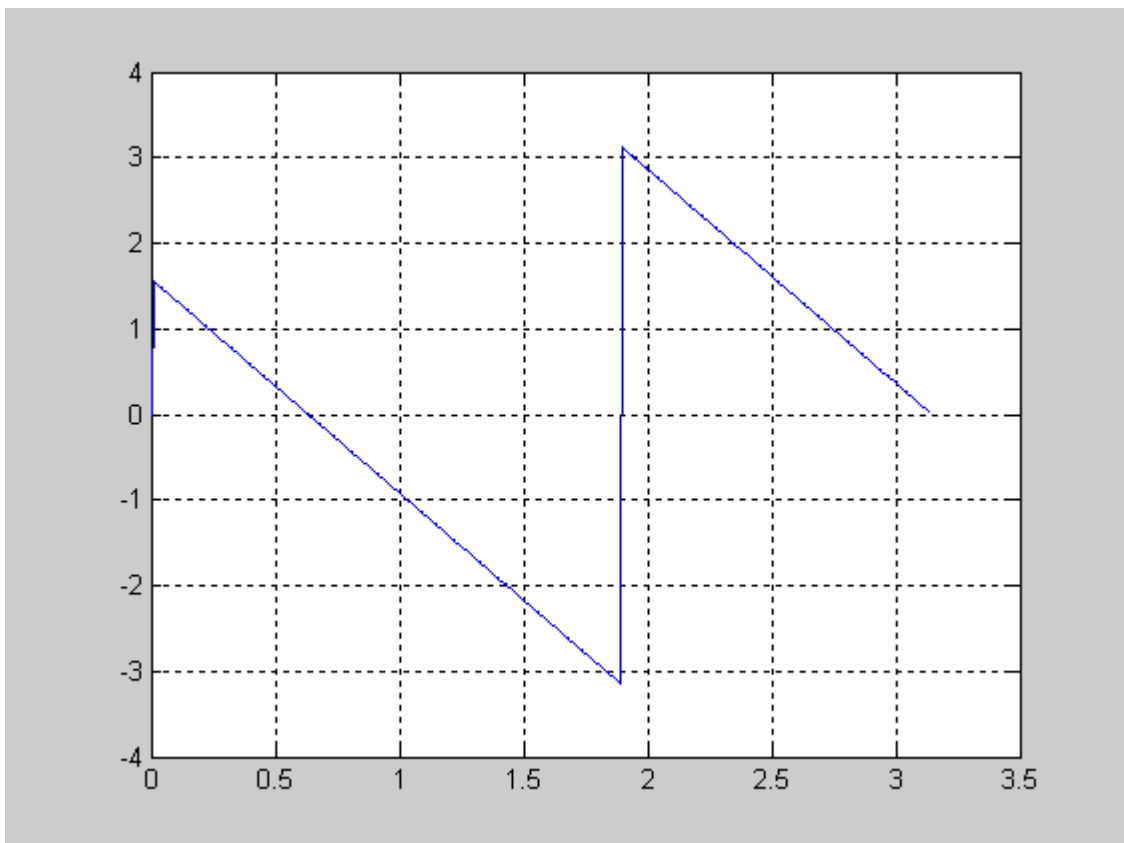


б)

Рис. 6.7. Імпульсна характеристика та ФЧХ фільтра із різницевою рівнянням $y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4)$



a)



б)

Рис. 6.8. Імпульсна характеристика та ФЧХ фільтра із різницеvim рівнянням $y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) - x(n-3) - x(n-4) - x(n-5)$

Графік ФЧХ на рис. 6.8,б має стрибок на нормованій частоті $\omega_n \approx 1,8$ радіан величиною у 2π радіан. Це означає, що початкова фаза гармонічного

коливання на цій частоті не зазнає стрибка, а таке зображення використовується для зменшення розміру рисунка по вертикалі. В підтвердження цієї тези на рис. 6.9 наведено графік функції $\sin(\omega T/2) + \sin(\omega 3T/2) + \sin(\omega 5T/2)$, з якого видно, що на інтервалі від 0 до π вона не набуває від'ємних значень.

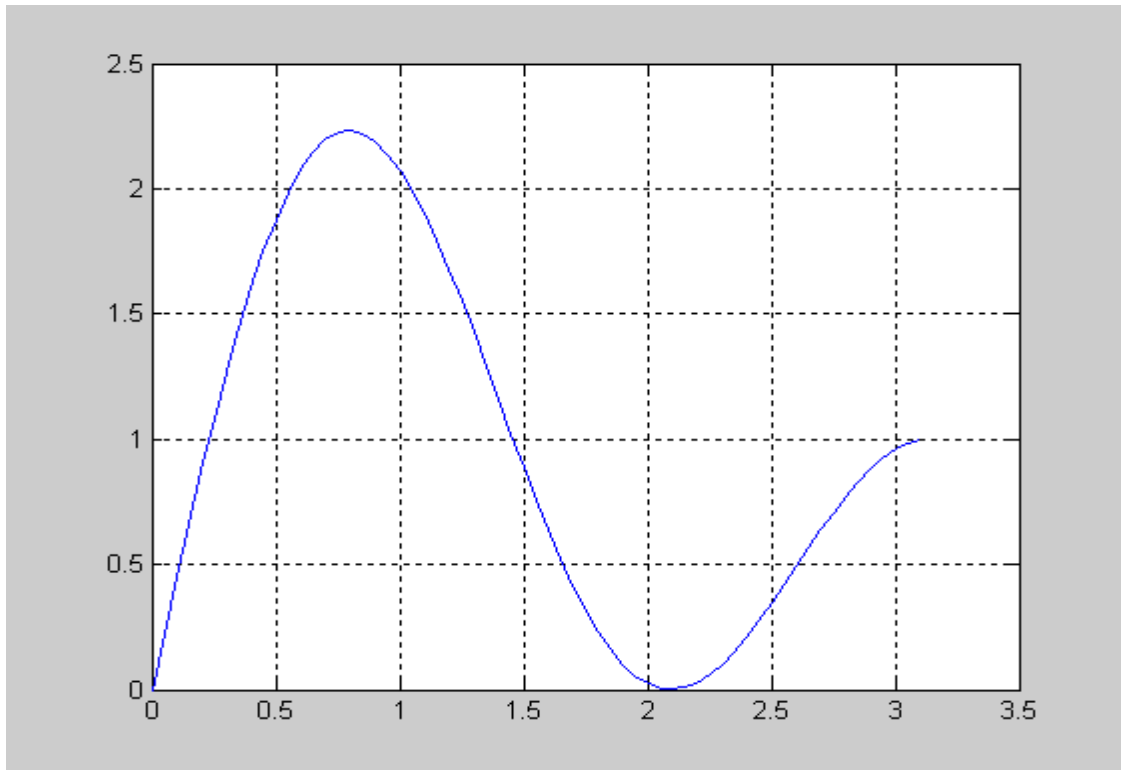


Рис. 6.9. Графік функції $\sin(\omega T/2) + \sin(\omega 3T/2) + \sin(\omega 5T/2)$

Отже, нерекурсивний фільтр (СІХ-фільтр) має лінійну ФЧХ, якщо його імпульсна характеристика є *симетричною* (*парно симетричною*), тобто $h(n) = h(M-n)$, M – порядок фільтра, $n = 0, 1, 2, \dots, M$ або *антисиметричною* (*не парно симетричною*), тобто $h(n) = -h(M-n)$. В разі непарної довжини антисиметричної імпульсної характеристики (порядок M фільтра при цьому буде парним) її середній відлік має бути нульовим: $h(M/2) = -h(M/2) = 0$ (див. приклад 6.2.4), інакше вимогу антисиметричності імпульсної характеристики не можливо буде виконати.

Кут нахилу ФЧХ, тобто $\arg [K(e^{j\omega})]$ залежить від порядку фільтра:

$$\arg [K(e^{j\omega})] = -M\omega T/2.$$

Відповідно і груповий час затримки є залежним від порядку M фільтра:

$$\tau_{\text{гз}} = M T/2.$$

На нульовій частоті ФЧХ фільтра дорівнює нулю, якщо його імпульсна характеристика симетрична, але набуває значення 90° або $\pi/2$ радіан для фільтрів із антисиметричною імпульсною характеристикою.