Лекція 5
Опис лінійних дискретних систем в z-області
5.1. Передаточна функція. Співвідношення вхід/вихід

$$H(z) = Z\{h(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \tag{5.1}$$

$$h(n) = Z^{-1}\{H(z)\} \tag{5.2}$$

$$y(n) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\infty} h(n-m)x(m); \\ \sum\limits_{m=0}^{\infty} x(n-m)h(m) \end{cases}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{5.3}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{5.4}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Z\{h(n)\}}{Z\{u_0(n)\}} = Z\{h(n)\},$$

$$\mathrm{y(n)} = \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{N-1}} \mathrm{h_i x(n-i)} - \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{M-1}} \mathrm{a_k y(n-k)}$$

$$Z\{y(n)\} = Z\left\{\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{N-1}} \mathrm{h_i x(n-i)} - \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{M-1}} \mathrm{a_k y(n-k)}\right\}.$$

$$Y(z) = X(z)\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-1} - Y(z)\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k},$$

п

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} X(z) \tag{5.5}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \tag{5.6}$$

$$\max\{(M-1),(N-1)\}.$$

$$(N-1) \le (M-1).$$

$$H(z) = \frac{z^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{z^{M-1}(1+\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k})} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{(M-1)-i}}{z^{M-1}+\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{(M-1)-k}}$$

$$(N-1) = (M-1).$$

В результаті множення чисельника і знаменника H(z) (5.6) на

z^{M-1}маємо:$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{(M-1)-i}}{z^{M-1}+\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{(M-1)-k}}$ (5.7)

$$\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{(M-1)-i} = 0 \quad (5.8)$$

$$z^{M-1} + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{(M-1)-k} = 0 \quad (5.9)$$

$$(L-1) < (M-1),$$

$$(L-1) = 0,1,\dots,(M-2).$$

$$(M-1)-(L-1) = M-L.$$

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

$$H(z) = \frac{b_1 z + b_2 z}{z^2 + a_1 z + a_2}.$$

$$(M-1)-(L-1) = M-L = 1.$$

$$b_1 z + b_2 = 0 \Rightarrow z_{o1} = -\frac{b_2}{b_1}$$

$z_{o2} = \infty$.

.

5.2. Взаємозв'язок між передаточною функцією і різницевим рівнянням

$$b_i x(n-i) \Leftrightarrow b_i z^{-i};$$

$$a_k y(n-k) \Leftrightarrow -a_k z^{-k}.$$

Приклад 5.1

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \tag{5.10}$$

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1); \tag{5.11}$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{5.12}$$

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2). \tag{5.13}$$

5.3. Різновиди передаточних функцій

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=0}^{M-1} a_k z^{-k}}$$

$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{i=1}^{N-1} (1 - \beta_i z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M-1} (1 - \alpha_k z^{-1})} \tag{5.14}$$

де $\beta_i = z_{o\,i}$ и $\alpha_k = z_{*k}$— i-й нуль і k-й полюс ПФ (5.6).

Якщо $N = M$,

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{M-1} H_k(z) = b_0 \prod_{k=1}^{M-1} \left(\frac{1 - \beta_i z^{-1}}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right); \tag{5.15}$$

$$(1 - \alpha_k z^{-1})(1 - \alpha_{k+1} z^{-1}),$$

$$\alpha_k = \xi_k + j\eta_k;$$

$$\alpha_{k+1} = \xi_k - j\eta_k$$

$$[1-(\xi_k + j\eta_k)z^{-1}][1-(\xi_k - j\eta_k)z^{-1}] = 1 + (-2\xi_k z^{-1}) + \left({\xi_k}^2 + {\eta_k}^2\right)z^{-2} = \\ = 1 + \alpha_{1k}z^{-1} + \alpha_{2k}z^{-2}$$

$$\alpha_{1k} = -2\xi_k \text{ и } \alpha_{2k} = \left({\xi_k}^2 + {\eta_k}^2\right).$$

$$H(z) = \frac{\prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}}(b_{0i} + b_{1i}\,z^{-1} + b_{2i}z^{-2})}{\prod_{k=1}^{\frac{M-1}{2}}(1 + a_{1k}\,z^{-1} + a_{2k}z^{-2})} \tag{5.16}$$

де:

$b_{0i}, b_{1i}, b_{2i}, a_{1k}, a_{2k}$ — *дійсні*;

(N-1), (M-1) — *парні* числа.

При ***N*** = *M* ,

$$H(z) = \prod_{k=1}^{K} H_k(z) = \prod_{k=1}^{K}\left(\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}\right) \tag{5.17}$$

де К = (M -1)/2 — кількість ланок 2-го порядку;

$$H(z) = \sum_{k=1}^{M-1} H_k(z) = \sum_{k=1}^{M-1}\left(\frac{A_k}{1-\alpha_k z^{-1}}\right). \tag{5.18}$$

де:

$\alpha_k = z_{*k}$ — простий *k*-й полюс ПФ (5.6).

A_k — коефіцієнт розкладання при *k-м* полюсі. Константа A_k — завжди число того ж типу (дійсне або комплексне), що і полюс α_k , тому у загальному випадку константи, також як і полюси, попарно *комплексно - спряжені* числа;

(M - 1) — кількість полюсів α_k (і констант A_k **);**

□ *у вигляді суми* дробів *другого* порядку з *дійсними* коефіцієнтами.

Для переходу до передаточної функції з *дійсними* коефіцієнтами у (5.18) попарно додають прості дроби з комплексно - спряженими полюсами α_k (і комплексно - спряженими константами A_k), у результаті чого отримаємо передаточну функцію у вигляді *суми дробів другого порядку з дійсними* коефіцієнтами

$$H(z) = \sum_{k=1}^{K} H_k(z) = \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1}}{1 + a_{1k} z^{-1}} \right) \tag{5.19}$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \tag{5.20}$$

$$H(z) = \frac{b_0}{\prod_{k=1}^{M-1} (1 - a_k z^{-k})} \tag{5.21}$$

$$H(z) = \frac{b_0}{\prod_{k=1}^{\frac{M-1}{2}} (1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2})} \tag{5.22}$$

Приклад 5.2

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}} \tag{5.23}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{5.24}$$

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_1 z^{-i} \tag{5.25}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-i} \tag{5.26}$$

$$H(z) = b_0 \prod_{i=1}^{N-1} H_i(z) = b_0 \prod_{i=1}^{N-1} (1 - \beta_i z^{-1}) \tag{5.27}$$

$$H(z) = b_0 \prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} H_i(z) = b_0 \prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} (b_{0i} + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2}) \tag{5.28}$$

5.4. Передаточні функції і імпульсні характеристики ланок 1-го і 2-го порядків

$$H(z) = \frac{1}{1+a_1 z^{-1}} \Longrightarrow h(n) = (-a_1)^n; \tag{5.29}$$

$$H(z) = \frac{1}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}} \Longrightarrow h(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{sin\varphi_*} \tag{5.30}$$

$$z_{*1,2} = r_* e^{\pm j\varphi} \tag{5.31}$$

$$a_1 = -2r_* \cos(\varphi_*), \tag{5.32}$$

$$a_2 = r_*^2 . \tag{5.33}$$

$$H(z) = \frac{b_0+b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}} \Longrightarrow h(n) = b_0(-a_1)^n + b_1(-a_1)^{n-1} \tag{5.34}$$

$$h(n) = \begin{cases} b_0(-a_1)^n, n = 0 \\ b_0(-a_1)^{n-1}, n \geq 1; \end{cases} \tag{5.35}$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \Longrightarrow$$

$$h(n) = b_0 r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{sin\varphi_*} + b_1 r_*^n \frac{\sin(n\varphi_*)}{sin\varphi_*} + \tag{5.36}$$

$$+ b_2 r_*^{(n-2)} \frac{\sin[(n-1)\varphi_*]}{sin\varphi_*}$$

$$h(n)h \begin{cases} b_0 r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{sin\varphi_*}, n = 0 \\ b_0 r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{sin\varphi_*} + b_1 r_*^n \frac{\sin(n\varphi_*)}{sin\varphi_*}, n = 1 \\ b_0 r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{sin\varphi_*} + b_1 r_*^n \frac{\sin(n\varphi_*)}{sin\varphi_*} + b_2 r_*^{(n-2)} \frac{sin[(n-1)\varphi_*]}{sin\varphi_*}, n \geq 2 \end{cases} \tag{5.37}$$

Приклад 5.3

Таблиця 5.1. Передаточні функції і імпульсні характеристики ланок 1-го порядків

Рис.	**Передаточна функція** $H(z)$	**Імпульсна характеристика** $h(n)$
6.4, *а*	$\frac{1}{1+0.5z^{-1}}$	(-0,5)", $n \geq 0$
6.4, *б*	$\frac{1}{1-0{,}5z^{-1}}$	0,5", $n \geq 0$
6.4, в	$\frac{1}{1+0{,}8z^{-1}}$	(-0,8)", $n \geq 0$
6.4, г	$\frac{1-0{,}5z^{-1}}{1+0{,}5z^{-1}}$	$\begin{cases} (-0{,}5)^n, n=0; \\ (-0{,}5)^n - 0{,}5(-0{,}5)^{n-1}, n \geq 1 \end{cases}$
6.4, д	$\frac{1-0{,}9z^{-1}}{1+0{,}5z^{-1}}$	$\begin{cases} (-0{,}5)^n, n=0; \\ (-0{,}5)^n - 0{,}9(-0{,}5)^{n-1}, n \geq 1 \end{cases}$
6.4, е	$\frac{1+z^{-1}}{1-0{,}5z^{-1}}$	$\begin{cases} 0{,}5^n, n=0; \\ 0{,}5^n + 0{,}5^{n-1}, n \geq 1 \end{cases}$

Таблиця 5.2. Передаточні функції і імпульсні характеристики ланок 2-го порядку

Рис.	**Передаточна функція** *H(z)*	$r_*,\ \varphi_*$	**Імпульсна характеристика** *h(n)*
6.5, а	$\frac{1}{1-0{,}7z^{-1}+0{,}49z^{-2}}$	$r = 0{,}7;_*$ $\varphi_* = \pi/3$	$0{,}7^n \frac{\sin[(n+1)\frac{\pi}{3}]}{sin\frac{\pi}{3}}$
6.5, б	$\frac{1}{1-0{,}7z^{-1}+0{,}49z^{-2}}$	$r = 0{,}7;_*$ $\varphi_* = 2\pi/3$	$0{,}7^n \frac{\sin\left[(n+1)\frac{2\pi}{3}\right]}{sin\frac{2\pi}{3}}$
6.5, *г*	$\frac{1}{1-0{,}7z^{-1}+0{,}49z^{-2}}$	$r = 0{,}7;_*$ $\varphi_* = \pi/3$	$\begin{cases} 0{,}7^n \frac{\sin[(n+1)\frac{\pi}{3}]}{sin\frac{\pi}{3}}, n = 0 \\ 0{,}7^n \frac{\sin[(n+1)\frac{\pi}{3}]}{sin\frac{\pi}{3}} + 0{,}7^{(n-1)} \frac{\sin(n\frac{\pi}{3})}{sin\frac{\pi}{3}}, n \geq 1 \end{cases}$
6.5, *д*	$\frac{1-z^{-2}}{1-0{,}7z^{-1}+0{,}49z^{-2}}$	$r = 0{,}7;_*$ $\varphi_* = \pi/3$	$\begin{cases} 0{,}7^n \frac{\sin[(n+1)\frac{\pi}{3}]}{sin\frac{\pi}{3}}, n = 0 \\ 0{,}7^n \frac{\sin[(n+1)\frac{\pi}{3}]}{sin\frac{\pi}{3}} - 0{,}7^{(n-2)} \frac{\sin[(n-1)\frac{\pi}{3}]}{sin\frac{\pi}{3}}, n \geq 2 \end{cases}$

5.5. Оцінка стійкості по передаточній функції: критерій стійкості

$$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)| < \infty.$$

$$H(z) = A_0 + \sum_{k=1}^{M-1}\left(\frac{A_k}{1-\alpha_k z^{-1}}\right)$$

$$h(n) = A_0 u_0(n) + \sum_{k=1}^{M-1} A_k\,{\alpha_k}^n.$$

$$\tilde{h}(n) = \sum_{k=1}^{M-1} A_k {\alpha_k}^n \qquad (5.38)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\tilde{h}(n)\right| \le \sum_{k=1}^{M-1}|A_k|\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_k|^n. \qquad (5.39)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_k|^n < \infty, k = 1,2,\dots,M-1,$$

$$|\alpha_k| < 1, k = 1,2,\dots,M-1, \qquad (5.40)$$

$$H(z) = \frac{(1-1{,}1z^{-1})}{(1-0{,}8z^{-1})(1-1{,}1z^{-1})} \qquad (5.41)$$

$$H(z) = \frac{A_1}{1-0{,}8z^{-1}} + \frac{A_2}{1-1{,}1z^{-1}}.$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ 1{,}1A_1 + 0{,}8A_2 = 1{,}1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 0 \end{cases}$$

$$h(n) = 0{,}8^n.$$

5.6. Карти нулів і полюсів ланок 1-го і 2-го порядків

$$H(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z + a_1}.$$

$$z + a_1 = 0$$

$$z_* = -a_1, \tag{5.42}$$

$$b_0 z + b_1 = 0$$

$$z_0 = -\frac{b_1}{b_0}. \tag{5.43}$$

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

$$D_* = \frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0 \Rightarrow 4a_2 > a_1^2.$$

$$z_{*1,2} = r_* e^{\pm j\varphi_*}, \tag{5.44}$$

$$r_* = \sqrt{a_2}; \tag{5.45}$$

$$\varphi_* = arccos\left(-\frac{a_1}{2r_*}\right). \tag{5.46}$$

$$D_* = \frac{a_1^2}{4} - a_2 > 0 \Rightarrow 4a_2 < a_1^2.$$

$$z_{*1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}. \tag{5.47}$$

$$D_* = b_1^2 - 4b_0 b_2 < 0.$$

$$z_{1,2} = \frac{-b_1 \pm j\sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{2b_0} = -\frac{b_1}{2b_0} \pm j\frac{\sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{2b_0} = \xi_0 \pm j\eta_0,$$

$$z_{0\ 1,2} = r_0 e^{\pm j\varphi_0}, \tag{5.48}$$

$$r_0 = \sqrt{{\xi_0}^2 + {\eta_0}^2}; \quad (5.49)$$

$$\varphi_0 = arctg\left(-\frac{\eta_0}{\xi_0}\right). \quad (5.50)$$

$$D_0 = b_1^2 - 4b_0 b_2 > 0.$$

Знаходять *дійсні нулі* у алгебраїчній формі

$$z_{0\ 1,2} = \frac{-b_1 \pm j\sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{2b_0} = -\frac{b_1}{2b_0} \pm \frac{\sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{2b_0}$$

Приклад 5.4

Таблиця 5.3. *Передаточні функції ланок 1-го порядку, нулі і полюси ПФ*

Рис.	**Передаточна функція** *H* (z)	**Нулі і полюси**
6.4, *а*	$\frac{1}{1+0{,}5z^{-1}} = \frac{z}{z+0.5}$	$z_o = 0$; z_*=-0,5
6.4, *б*	$\frac{1}{1-0{,}5z^{-1}} = \frac{z}{z-0.5}$	$z_o = 0$; z_*= 0,5
6.4, в	$\frac{1}{1+0{,}8z^{-1}} = \frac{z}{z+0.8}$	$z_o = 0$; z_*=-0,8
6.4, г	$\frac{1-0{,}5z^{-1}}{1+0{,}5z^{-1}} = \frac{z-0.5}{z+0.5}$	$z_o = 0{,}5$; z_*=0,5
6.4, *д*	$\frac{1-0{,}9z^{-1}}{1+0{,}5z^{-1}} = \frac{z-0.9}{z+0.5}$	$z_o = 0{,}9$; z_*=-0,5
6.4, е	$\frac{1+z^{-1}}{1-0{,}5z^{-1}} = \frac{z+1}{z-0.5}$	z_o = -1; z_* = 0,5

Таблиця 5.4. *Передаточні функції ланок 2-го порядку, нулі і полюси ПФ*

Рис.	**Передаточна функція** ***H*** **(z)**	**Нулі і полюси**
6.5, а	$\frac{1}{1-0{,}7z^{-1}+0{,}49z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2-0{,}7z+0{,}49}$	$z_{1,2}=0;$ $z_{1,2}=0{,}7e^{\pm j\frac{\pi}{3}};$
6.5, б	$\frac{1}{1+0{,}7z^{-1}+0{,}49z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2+0{,}7z+0{,}49}$	$z_{1,2}=0;$ $z_{1,2}=0{,}7e^{\pm j\frac{2\pi}{3}};$
6.5, в	$\frac{1}{1+0{,}9z^{-1}+0{,}81z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2+0{,}9z+0{,}81}$	$z_{1,2}=0;$ $z_{1,2}=0{,}9e^{\pm j\frac{2\pi}{3}};$
6.5, г	$\frac{1+z^{-1}}{1-0{,}7z^{-1}+0{,}49z^{-2}}=\frac{z^2+z}{z^2-0{,}7z+0{,}49}$	$z_1=0; z_2=-1;$ $z_{1,2}=0{,}7e^{\pm j\frac{\pi}{3}};$
6.5, д	$\frac{1-z^{-2}}{1-0{,}7z^{-1}+0{,}49z^{-2}}=\frac{z^2-1}{z^2-0{,}7z+0{,}49}$	$z_{1,2}=\pm 1;$ $z_{1,2}=0{,}7e^{\pm j\frac{\pi}{3}};$
6.5, е	$\frac{1+z^{-2}}{1-0{,}7z^{-1}+0{,}49z^{-2}}=\frac{z^2+1}{z^2-0{,}7z+0{,}49}$	$z_{1,2}=\pm j;$ $z_{1,2}=0{,}7e^{\pm j\frac{\pi}{3}};$
6.5,	$\frac{1+1{,}2z^{-1}+0.81z^{-2}}{1+0{,}28z^{-1}+0{,}64z^{-2}}=\frac{z^2+1{,}2z+0.81}{z^2-0{,}28z+0{,}64}$	$z_{1,2}=0{,}9e^{\pm j0{,}8411};$ $z_{1,2}=0{,}8e^{\pm j1{,}3944};$
6.5, з	$\frac{1+z^2}{1+0{,}2z^{-1}-0{,}35z^{-2}}=\frac{z^2+1}{z^2+0{,}2z-0{,}35}$	$z_{1,2}=\pm j;$ $z_1=0{,}5; z_2=-0{,}7;$