5. Опис лінійних дискретних систем у *z*-області

У розділі 4 розглядався опис ЛДС у часовій області – імпульсна характеристика *h(n)* і співвідношення вхід–вихід. У даному розділі будуть розглядатися їх відображення в *z*-області.

Математичний апарат *Z*-перетворення, подібно до перетворення Лапласа в теорії лінійних аналогових кіл (див. розділ 2), дозволяє істотно спростити аналіз ЛДС.

5.1. Передавальна функція. Співвідношення вхід–вихід

Основною характеристикою ЛДС в *z-області* є *z*-зображення імпульсної характеристики *h(n)*

$$H(z) = Z\{h(n)\}, \tag{5.1}$$

яке визначається за формулою *прямого* *Z*-перетворення (2.18):

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(z) z^{-n} . \tag{5.2}$$

За відомим *z*-зображенням *H(z)* імпульсна характеристика *h(n)* знаходиться за допомогою оберненого *Z*-перетворення

$$h(n) = Z^{-1}\{H(z)\}.$$

H(z) – передавальна функція (ПФ) ЛДС. Співвідношення (5.2) є математичним визначенням ПФ.

Співвідношення вхід–вихід ЛДС у *часовій* області визначалося за допомогою формули згортки або у вигляді різницевого рівняння. Розглянемо по черзі їх відображення в *z*-області.

Формулі *згортки* (див. розділ 4)

$$y(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} h(n-m)x(m) \\ \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) \end{cases} \tag{5.3}$$

z-області відповідає рівняння (див. розділ 3, властивості *Z*-перетворення)

$$Y(z) = H(z)X(z), \tag{5.4}$$

де *X(z)* і *Y(z)* – *z*-зображення впливу й реакції.

На підставі (5.4) передавальну функцію можна зобразити як співвідношення

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}, \tag{5.5}$$

яке дозволяє її визначити в такий спосіб:

Передавальна функція (ПФ) *ЛДС H(z)* – це відношення *z*-зображення реакції до *z*-зображення впливу при нульових початкових умовах.

Дане визначення ПФ не суперечить наведеному вище математичному (5.2). Дійсно, відповідно до визначення, імпульсна характеристика $h(n)$ є реакцією на вплив у вигляді одиничного цифрового імпульсу $u_0(n)$. Підставивши *z*-зображення впливу й реакції в (5.5), одержимо математичне визначення (5.2):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Z\{h(n)\}}{Z\{\ u_0(n)\}} = \ Z\{h(n)\}$$

з огляду на те, що $Z\{u_0(n)\} = 1$ (див. розділ 3).

Різницевому рівнянню (4.13)

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n - i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(\ k - j),$$

в z-області відповідає рівняння, яке можна одержати, виконавши перетворення правої й лівої частин РР:

$$Z\{y(n)\} = \ Z\{\sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n - i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(\ k - j)\}.$$

Використовуючи властивості z-перетворення – лінійність і теорему про загаювання (див. розділ 3), запишемо:

$$Y(z) \ = \ X(z) \sum_{i=0}^{N-1} b_i \ x\, z^{-1} - \sum_{k=1}^{M-1} a_k \ z^{-k}.$$

звідки після зведення подібних маємо наступне рівняння:

$$Y(z) \ = \frac{\sum\limits_{i=0}^{N-1} b_i\, z^{-1}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{M-1} a_k\, z^{-k}} X(z). \tag{5.5а}$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на *X*(z), одержимо передавальну функцію *загального вигляду:*

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-1}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \qquad (5.6)$$

– дробово-раціональну функцію, чисельник і знаменник якої – багаточлени від z^{-1} порядків *(N-1)* і *(M-1)* з *дійсними* коефіцієнтами b_i й a_k .

З (5.6) випливає, що ПФ залежить винятково від внутрішніх параметрів ЛДС і не залежить ні від впливу, ні від реакції.

Порядком ПФ називають найбільше із чисел *(N -1)* і *(M* -1). Тут і надалі будемо вважати, що *порядок багаточлена чисельника не перевищує порядок* багаточлена *знаменника*

$$(N\text{-}1) \le (M\text{-}1).$$

Як і будь-яка дробово-раціональна функція, ПФ (5.6) характеризується своїми *особливими точками (полюсами)* й *нулями.*

Нулями ПФ називають значення *z,* при яких *H(z)* (5.6) дорівнює нулю.

Особливими точками (полюсами) ПФ називають значення *z***,** при яких знаменник *H(z)* дорівнює нулю.

Визначення особливих точок і нулів передавальної функції ЛДС виконується так само, як це робиться в теорії лінійних аналогових кіл.

Попередньо варто записати ПФ *H(z)* (5.6) як відношення багаточленів додатних ступенів *z,* для чого чисельник і знаменник *H(z)* треба помножити на $z^{M\text{-}1}$. Доцільно виділити два випадки:

1. ПФ зображена *неправильною* дробово-раціональною функцією – порядок багаточлена чисельника *дорівнює* порядку багаточлена знаменника:

$$(N - 1) = (M - 1).$$

Тоді після множення чисельника й знаменника *H(z)* (5.6) на z^{M-1} маємо:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{(M\text{-}1)\text{-}i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{(M\text{-}1)\text{-}k}}. \qquad (5.6а)$$

Нулями передавальної функції *H(z)* будуть корені рівняння, що відповідає *чисельнику:*

$$\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{(M-1)-i} = 0, \tag{5.7}$$

а *полюсами* — корінь рівняння, що відповідає *знаменнику:*

$$1+\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{(M-1)-k} = 0. \tag{5.8}$$

Якщо серед полюсів зустрічаються однакові, їх називають *кратними.*

2. ПФ зображена *правильною* дробово-раціональною функцією – порядок багаточлена чисельника *менше* порядку багаточлена знаменника:

$(N-1) < (M-1)$

Тоді після множення чисельника й знаменника *H(z)* (5.6) на $z^{(M-1)}$ маємо:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{(N-1)-i}}{1+\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{(M-1)-k}}.$$

Полюси таких ПФ визначаються так само, як і в першому випадку. Що стосується нулів, то, крім коренів чисельника (5.7) додаються нулі в точці $z=\infty$, кратність яких дорівнює різниці порядків багаточленів знаменника й чисельника:

$(M-1)-(N-1)=M-N$.

як правило, ці нулі не є інформативними, тому звичайно ними нехтують.

Картою нулів і полюсів називають зображення координат нулів (°) і полюсів (*) на комплексній *z*-площині. Як буде показано далі, така карта є досить важливою графічною характеристикою ЛДС.

Зауваження

При побудові карт нулів і полюсів у програмному середовищі MATLAB полюси зображуються символом множення (x).

5.2. Взаємозв'язок між передавальною функцією й різницевим рівнянням

Із порівняння передавальної функції (5.6) і відповідного їй різницевого рівняння (4.13) видно, що:

1. багаточлен чисельника ПФ пов'язаний з відліками впливів $b_i x(n-1)$, при цьому величина затримки відліку $x(n-1)$ відображається ступенем z^{-i} (див. розділ 3), а значення коефіцієнта b_i залишається незмінним, що символічно можна записати в такий спосіб

$$b_i x(n-1) \leftrightarrow b_i z^{-i},\ i = 0,1,\ldots,N-1;$$

2. багаточлен знаменника ПФ пов'язаний із відліками реакції $y(n)$ й $a_k y(n-k)$, при цьому вільний член багаточлена знаменника завжди дорівнює 1

$$a_0 = 1,$$

тому що в РР він відповідає реакції $y(n)$; величина затримки k відліку $y(n-k)$ відображається степенем z^{-k}, абсолютне значення коефіцієнта a_k залишається незмінним, але його знак змінюється на протилежний, що символічно можна записати в такий спосіб:

$$a_k y(n-k) \leftrightarrow -a_k z^{-k}.$$

Приклад 5.1

Дана передавальна функція загального виду. Записати відповідне їй різницеве рівняння:

1. для ланки 1-го порядку (чисельник і знаменник ПФ – багаточлени першого порядку):

передавальна функція:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}; \tag{5.9}$$

різницеве рівняння:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1); \tag{5.10}$$

2. для ланки 2-го порядку (чисельник і знаменник ПФ – багаточлени від другого порядку):

передавальна функція:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}; \qquad (5.11)$$

різницеве рівняння:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 (n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2). \qquad (5.12)$$

5.3. Різновиди передавальних функцій

Різновиди передавальних функцій зумовлені можливістю їх різного математичного подання, а також типом ЛДС – рекурсивна (НІХ) або нерекурсивна (СІХ).

Наведемо різновиди математичного зображення передавальної функції загального вигляду (5.6).

1. Зображення ПФ у вигляді добутку з розкладанням чисельника й знаменника на найпростіші множники першого ступеня

$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{i=1}^{N-1} \left(1 - \beta_i z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{M-1} \left(1 - \alpha_k z^{-1}\right)}, \qquad (5.13)$$

де β_i, α_k - i-й нуль й k-й полюс ПФ (5.6) відповідно; у загальному випадку нулі й полюси – комплексно-спряжені числа; (N-*1*) і (*M*-*1*) – кількість нулів і полюсів відповідно.

При N = M формула (5.13) набуває вигляду

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{M-1} H_k(z) = b_0 \prod_{k=1}^{M-1} \frac{\left(1 - \beta_k z^{-1}\right)}{\left(1 - \alpha_k z^{-1}\right)}. \qquad (5.14)$$

У зображенні ПФ (5.13) у загальному випадку маємо комплексні коефіцієнти при z^{-1}.

2. Зображення ПФ у вигляді добутку з розкладанням чисельника й знаменника на найпростіші множники другого ступеня:

$$H(z)=\frac{\prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(b_{0i}+b_{1i}z^{-1}+b_{2i}z^{-2}\right)}{\prod_{k=1}^{\frac{M-1}{2}}\left(1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}\right)}, \tag{5.15}$$

де $b_{0i}, b_{1i}, a_{1k}, a_{2k}$ – дійсні коефіцієнти; (*N*-*1*), (*M*-*1*) – парні числа.

При N = M формула (5.15) набуває вигляду

$$H(z)=\prod_{k=1}^{K}H_k(z)=\prod_{k=1}^{K}\frac{\left(b_{0k}+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}\right)}{\left(1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}\right)}, \tag{5.16}$$

де К – кількість ланок 2-го порядку; К = (М-1)/2.

3. Подання ПФ у вигляді суми простих дробів ($N \le M$) першого ступеня

$$H(z)=\sum_{k=1}^{M-1}H_k(z)=\sum_{k=1}^{M-1}\frac{A_k}{\left(1-\alpha_k z^{-1}\right)}, \tag{5.17}$$

де α_k – k-й полюс ПФ (5.6); у загальному випадку полюси комплексно-спряжені числа; A_k – коефіцієнт розкладання при k-му полюсі; константа A_k – завжди число того ж типу, що й полюс α_k, тому в загальному випадку константи, так само як і полюси, – комплексно-спряжені числа; (*М*-*1*) – кількість полюсів і констант.

4.Зображення ПФ у вигляді суми простих дробів ($N \le M$) другого ступеня:

$$H(z)=\sum_{k=1}^{K}H_k(z)=\sum_{k=1}^{K}\frac{b_{0k}+b_{1k}z^{-1}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}, \tag{5.18}$$

де $b_{0k}, b_{1k}, a_{1k}, a_{2k}$ – дійсні коефіцієнти; К=(М -1)/2, К – кількість ланок 2-го порядку.

5.4. Оцінювання стійкості за передавальною функцією: критерій стійкості

У попередньому розділі, присвяченому опису ЛДС у часовій області, був розглянутий критерій, який дозволяв оцінити стійкість ЛДС за імпульсною характеристикою. Логічно припустити, що в *z*-

області, де основною характеристикою ЛДС є передавальна функція – z-зображення ІХ, повинен існувати критерій, що дозволяє оцінити стійкість ЛДС за передавальною функцією Отримаємо його на підставі відомого критерію стійкості (4.23)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty .$$

Зобразимо ПФ загального вигляду (5.6) у вигляді суми простих дробів першого ступеня (5.17), тоді відповідна ІХ може бути записана як сума ІХ ланок першого порядку (див. розділ 3):

$$h(n) = \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k^n . \tag{5.19}$$

Підставляючи ІХ (5.19) в (4.23) і змінюючи порядок сумування, запишемо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k^n \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{M-1} \left| A_k \alpha_k^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{M-1} |A_k| |\alpha_k|^n = \sum_{k=1}^{M-1} |A_k| \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_k|^n .$$

Умова (4.23) виконуватиметься у випадку, якщо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_k|^n < \infty, \quad k = 1,2,\dots, M-1,$$

що можливе при наступному обмеженні для полюсів α_k:

$$|\alpha_k| < 1, \quad k = 1,2,\dots, M-1. \tag{5.20}$$

Це дозволяє сформулювати *критерій,* що дасть змогу оцінити стійкість ЛДС за передавальною функцією: для того, щоб ЛДС була стійкою, необхідно й достатньо, щоб усі полюси її передавальної функції розташовувалися *всередині* одиничного кола комплексної z-площини.

Зауваження

Необхідно зазначити, що, на відміну від критерію (4.23), критерій (5.20) має обмеження: якщо найпростіші множники в передавальній функції вигляду (5.13) скорочуються (нуль дорівнює полюсу $\beta_i = \alpha_k$), може виявитися, що умова (4.23) виконується, а ЛДС нестійка. У таких випадках необхідно звертати увагу на множники, що скорочуються; якщо полюси (і нулі, що дорівнюють їм) розташовані всередині одиничного кола – ЛДС стійка, у протилежному випадку – нестійка [7].

При аналізі стійкості ЛДС, як правило, користуються критерієм (5.20), більш зручний у практичному застосуванні. Цей критерій дає можливість просто і швидко оцінити стійкість рекурсивної ЛДС за місцезнаходженням полюсів на карті нулів і полюсів.