# **МЕТОД ШТУЧНОГО БАЗИСУ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛП**

* призначений для розв’язання задач ЛП із умовами-обмеженнями будь-якого виду;
* повернемося до задачі про дієту.

Нагадаємо отриману математичну модель задачі про дієту:

$$F\left(x\_{1},x\_{2}\right)=5x\_{1}+30x\_{2}\rightarrow min$$

$$\left\{\begin{array}{c}\begin{array}{c}\begin{array}{c}\begin{matrix}x\_{1}+2x\_{2}\geq 50\end{matrix}\\x\_{2}\geq 5\end{array}\\5x\_{1}+2x\_{2}\geq 150\end{array}\\x\_{1},x\_{2}\geq 0\end{array}\right.$$

Приведемо математичну модель задачі ЛП до канонічного вигляду.

Перейдемо від задачі на відшуковування $min$ значення цільової функції до задачі на відшуковування $max$ значення цільової функції:

$$F^{'}\left(x\_{1},x\_{2}\right)=-F\left(x\_{1},x\_{2}\right)=-5x\_{1}-30x\_{2}\rightarrow max$$

Обернемо нерівності в рівності шляхом введення вільних змінних $x\_{3},x\_{4},x\_{5}$ відповідно:

$$F^{'}\left(x\_{1},x\_{2},…,x\_{5}\right)=-5x\_{1}-30x\_{2}+0x\_{3}+0x\_{4}+0x\_{5}\rightarrow max$$

$$\left\{\begin{array}{c}\begin{array}{c}\begin{array}{c}\begin{matrix}x\_{1}+2x\_{2}-1x\_{3}+0x\_{4}+0x\_{5}=50\end{matrix}\\x\_{2}+0x\_{3}-1x\_{4}+0x\_{5}=5\end{array}\\5x\_{1}+2x\_{2}+0x\_{3}+0x\_{4}-1x\_{5}=150\end{array}\\x\_{1},x\_{2},…,x\_{5}\geq 0\end{array}\right.$$

Отримаємо початковий допустимий базисний розв’язок задачі, який задовольнятиме всім умовам-обмеженням. Але зробити це так легко, як у попередньому прикладі (у задачі про використання сировини) не вдасться.

Введемо в задачу три штучні змінні $x\_{6},x\_{7},x\_{8}$:

$$F^{'}\left(x\_{1},x\_{2},…,x\_{5}\right)=-5x\_{1}-30x\_{2}+0x\_{3}+0x\_{4}+0x\_{5}-Mx\_{6}-Mx\_{7}-Mx\_{8}\rightarrow max$$

$$\left\{\begin{array}{c}\begin{array}{c}\begin{array}{c}\begin{matrix}x\_{1}+2x\_{2}-1x\_{3}+0x\_{4}+0x\_{5}+1x\_{6}+0x\_{7}+0x\_{8}=50\end{matrix}\\x\_{2}+0x\_{3}-1x\_{4}+0x\_{5}+0x\_{6}+1x\_{7}+0x\_{8}=5\end{array}\\5x\_{1}+2x\_{2}+0x\_{3}+0x\_{4}-1x\_{5}+0x\_{6}+0x\_{7}+1x\_{8}=150\end{array}\\x\_{1},x\_{2},…,x\_{8}\geq 0\end{array}\right.$$

Тоді отримаємо початковий допустимий базисний розв’язок задачі:

$$x\_{1}=0,x\_{2}=0,x\_{3}=0,x\_{4}=0,x\_{5}=0,x\_{6}=50,x\_{7}=5,x\_{8}=150.$$

Заповнимо вихідну симплекс-таблицю:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | -5 | -30 | 0 | 0 | 0 | $$-M$$ | $$-M$$ | $$-M$$ |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ | $$A\_{6}$$ | $$A\_{7}$$ | $$A\_{8}$$ |
| $$-M$$ | $$x\_{6}$$ | 50 | 1 | 2 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $$-M$$ | $$x\_{7}$$ | 5 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $$-M$$ | $$x\_{8}$$ | 150 | **5** | 2 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
|  | $$∆$$ | $$-205M$$ | $$-6M+5$$ | $$-5M+30$$ | $$M$$ | $$M$$ | $$M$$ | 0 | 0 | 0 |

Визначимо:

напрямний стовпець – $A\_{1}$,

напрямний рядок – $x\_{8}$,

напрямний елемент – $x\_{81}=5$.

Розраховуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 2´

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | **–** | -5 | -30 | 0 | 0 | 0 | $$-M$$ | $$-M$$ |
| B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ | $$A\_{6}$$ | $$A\_{7}$$ |
| $$x\_{6}$$ | $$50-\frac{150⋅1}{5}$$ | $$1-\frac{5⋅1}{5}$$ | $$2-\frac{2⋅1}{5}$$ | $$-1-\frac{0⋅1}{5}$$ | $$0-\frac{0⋅1}{5}$$ | $$0-\frac{-1⋅1}{5}$$ | $$1-\frac{0⋅1}{5}$$ | $$0-\frac{0⋅1}{5}$$ |
| $$x\_{7}$$ | $$5-\frac{150⋅0}{5}$$ | $$0-\frac{5⋅0}{5}$$ | $$1-\frac{2⋅0}{5}$$ | $$0-\frac{0⋅0}{5}$$ | $$-1-\frac{0⋅0}{5}$$ | $$0-\frac{-1⋅0}{5}$$ | $$0-\frac{0⋅0}{5}$$ | $$1-\frac{0⋅0}{5}$$ |
| $$x\_{1}$$ | $$150∶5$$ | $$5∶5$$ | $$2∶5$$ | $$0∶5$$ | $$0∶5$$ | $$-1∶5$$ | $$0∶5$$ | $$0∶5$$ |
| $$∆$$ |  |  |  |  |  |  |  |  |

Таблиця 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | -5 | -30 | 0 | 0 | 0 | $$-M$$ | $$-M$$ |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ | $$A\_{6}$$ | $$A\_{7}$$ |
| $$-M$$ | $$x\_{6}$$ | 20 | 0 | $$\frac{8}{5}$$ | -1 | 0 | $$\frac{1}{5}$$ | 1 | 0 |
| $$-M$$ | $$x\_{7}$$ | 5 | 0 | **1** | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| -5 | $$x\_{1}$$ | 30 | 1 | $$\frac{2}{5}$$ | 0 | 0 | $$-\frac{1}{5}$$ | 0 | 0 |
|  | $$∆$$ | $$-25M-150$$ | 0 | $$-\frac{13}{5}M+28$$ | $$M$$ | $$M$$ | $$-\frac{1}{5}M+1$$ | 0 | 0 |

Визначимо:

напрямний стовпець – $A\_{2}$,

напрямний рядок – $x\_{7}$,

напрямний елемент – $x\_{72}=1$.

Розраховуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | -5 | -30 | 0 | 0 | 0 | $$-M$$ |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ | $$A\_{6}$$ |
| $$-M$$ | $$x\_{6}$$ | 12 | 0 | 0 | -1 | $$\frac{8}{5}$$ | $$\frac{1}{5}$$ | 1 |
| -30 | $$x\_{2}$$ | 5 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| -5 | $$x\_{1}$$ | 28 | 1 | 0 | 0 | $$\frac{2}{5}$$ | $$-\frac{1}{5}$$ | 0 |
|  | $$∆$$ | $$-12M-290$$ | 0 | 0 | $$M$$ | $$-\frac{8}{5}M+28$$ | $$-\frac{1}{5}M+1$$ | 0 |

Визначимо:

напрямний стовпець – $A\_{4}$,

напрямний рядок – $x\_{6}$,

напрямний елемент – $x\_{64}=\frac{8}{5}$.

Розраховуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 4

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | -5 | -30 | 0 | 0 | 0 |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ |
| 0 | $$x\_{4}$$ | $$\frac{60}{8}$$ | 0 | 0 | $$-\frac{5}{8}$$ | 1 | $$\frac{1}{8}$$ |
| -30 | $$x\_{2}$$ | $$\frac{25}{2}$$ | 0 | 1 | $$-\frac{5}{8}$$ | 0 | $$\frac{1}{8}$$ |
| -5 | $$x\_{1}$$ | 25 | 1 | 0 | $$\frac{1}{4}$$ | 0 | $$-\frac{1}{4}$$ |
|  | $$∆$$ | -500 | 0 | 0 | $$\frac{35}{2}$$ | 0 | $$-\frac{5}{2}$$ |

Визначимо:

напрямний стовпець – $A\_{5}$,

напрямний рядок – $x\_{4}$,

напрямний елемент – $x\_{45}=\frac{1}{8}$.

Розраховуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 5

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | -5 | -30 | 0 | 0 | 0 |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ |
| 0 | $$x\_{5}$$ | 60 | 0 | 0 | -5 | 8 | 1 |
| -30 | $$x\_{2}$$ | **5** | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| -5 | $$x\_{1}$$ | **40** | 1 | 0 | -1 | 2 | 0 |
|  | $$∆$$ | -350 | 0 | 0 | 5 | 20 | 0 |

Отримали оптимальний розв'язок задачі:

$x\_{1}=40,x\_{2}=5,F\_{min}=350$***.***

Наступний приклад:

$$F\left(x\_{1},x\_{2}\right)=3x\_{1}+2x\_{2}\rightarrow max$$

$$\left\{\begin{array}{c}4x\_{1}+2x\_{2}\geq 12\\x\_{1}+2x\_{2}\leq 10\\2x\_{1}+2x\_{2}=6\\x\_{1},x\_{2}\geq 0\end{array}\right.$$

$$F\left(x\_{1},x\_{2},…,x\_{4}\right)=3x\_{1}+2x\_{2}+0x\_{3}+0x\_{4}\rightarrow max$$

$$\left\{\begin{array}{c}4x\_{1}+2x\_{2}-1x\_{3}+0x\_{4}=12\\x\_{1}+2x\_{2}+0x\_{3}+1x\_{4}=10\\2x\_{1}+2x\_{2}=6\\x\_{1},x\_{2},…,x\_{4}\geq 0\end{array}\right.$$

$$F\left(x\_{1},x\_{2},…,x\_{6}\right)=3x\_{1}+2x\_{2}+0x\_{3}+0x\_{4}-Mx\_{5}-Mx\_{6}\rightarrow max$$

$$\left\{\begin{array}{c}4x\_{1}+2x\_{2}-1x\_{3}+0x\_{4}+1x\_{5}+0x\_{6}=12\\x\_{1}+2x\_{2}+0x\_{3}+1x\_{4}+0x\_{5}+0x\_{6}=10\\2x\_{1}+2x\_{2}+0x\_{3}+0x\_{4}+0x\_{5}+0x\_{6}=6\\x\_{1},x\_{2},…,x\_{6}\geq 0\end{array}\right.$$

$x\_{1}=0,x\_{2}=0,x\_{3}=0,x\_{4}=10,x\_{5}=12,x\_{6}=6$.

Заповнимо вихідну симплекс-таблицю:

Таблиця 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | 3 | 2 | 0 | 0 | $$-M$$ | $$-M$$ |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ | $$A\_{6}$$ |
| $$-M$$ | $$x\_{5}$$ | 12 | **4** | 2 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | $$x\_{4}$$ | 10 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $$-M$$ | $$x\_{6}$$ | 6 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|  | $$∆$$ | $$-18M$$ | $$-6M-3$$ | $$-4M-2$$ | $$M$$ | 0 | 0 | 0 |

Напрямний стовпець – $A\_{1}$,

напрямний рядок – $x\_{5}$,

напрямний елемент – $x\_{51}$.

Розраховуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | 3 | 2 | 0 | 0 | $$-M$$ |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{6}$$ |
| 3 | $$x\_{1}$$ | 3 | 1 | $$\frac{1}{2}$$ | $$-\frac{1}{4}$$ | 0 | 0 |
| 0 | $$x\_{4}$$ | 7 | 0 | $$\frac{3}{2}$$ | $$\frac{1}{4}$$ | 1 | 0 |
| $$-M$$ | $$x\_{6}$$ | 0 | 0 | **1** | $$\frac{1}{2}$$ | 0 | 1 |
|  | $$∆$$ | 9 | 0 | $$-M-\frac{1}{2}$$ | $$-\frac{1}{2}M-\frac{3}{4}$$ | 0 | 0 |

Напрямний стовпець – $A\_{2}$,

напрямний рядок – $x\_{6}$,

напрямний елемент – $x\_{62}$.

Розраховуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 3

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | 3 | 2 | 0 | 0 |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ |
| 3 | $$x\_{1}$$ | 3 | 1 | 0 | $$-\frac{1}{2}$$ | 0 |
| 0 | $$x\_{4}$$ | 7 | 0 | 0 | $$-\frac{1}{2}$$ | 1 |
| 2 | $$x\_{2}$$ | 0 | 0 | 1 | $$\frac{1}{2}$$ | 0 |
|  | $$∆$$ | 9 | 0 | 0 | $$-\frac{1}{2}$$ | 0 |

Напрямний стовпець – $A\_{3}$,

напрямний рядок – $x\_{2}$,

напрямний елемент – $x\_{23}$.

Розраховуємо елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 4

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | 3 | 2 | 0 | 0 |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ |
| 3 | $$x\_{1}$$ | **3** | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | $$x\_{4}$$ | 7 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | $$x\_{3}$$ | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 |
|  | $$∆$$ | 9 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Оптимальний розв'язок: $x\_{1}=3,x\_{2}=0,F\_{max}=9$***.***

Таким чином, якщо задачі ЛП мають місце умови-обмеження різного виду $(\leq $, $\geq $, $=)$, то після приведення математичної моделі до канонічного вигляду штучні змінні вводяться тільки в ті обмеження, де у вихідній системі були знаки $\geq $, $=$ (за всіх додатніх вільних членах).