Лекція 4

Опис лінійних дискретних систем в часовій області

Системою обробки сигналів (системою) називається об'єкт, що виконує необхідне перетворення вхідного сигналу в вихідний.

Вхідний сигнал системи називається впливом, вихідний - реакцією.

У загальному випадку взаємозв'язок між вхідними та вихідними сигналами системи з декількома входами і виходами - співвідношення вхід/вихід - описується рівнянням в операторної формі

$$Y=F(X),$$

(4.1)

де:

X, Y – вектори, елементами яких є вплив і реакції (функції часу) відповідно;

F – оператор, який визначає математичне перетворення (лінійне або нелінійне алгебраїчне, диференціальне та т.п.).

Для систем с одним входом і одним виходом, рівняння (4.1) приймає вид:

$$y = F(x), \tag{4.2}$$

де x, y – вплив і реакція (функції часу) відповідно.

За замовчуванням будемо розглядати системи з одним входом і одним виходом.

Відповідно до визначення, системою можна назвати як фізичний пристрій, так і оператор F (математичне перетворення).

Наведемо необхідні визначення:

1. Система називається лінійною, якщо вона відповідає двом умовам:
   - реакція на суму впливів дорівнює сумі реакцій на кожний з впливів (властивість адитивності або принцип суперпозиції):

$$F(x_1 + x_2 + ...) = F(x_1) + F(x_2)\ldots; \qquad (4.3)$$

- множенню впливу на ваговий коефіцієнт відповідає реакція, помножена на той же коефіцієнт (властивість однорідності):

$$F(ax) = aF(x) \,. \qquad (4.4)$$

Співвідношення вхід/вихід лінійної системи описується рівнянням (4.2) з лінійним оператором F, що є також лінійним рівнянням.

2. Система називається дискретною, якщо вона перетворює вхідний дискретний сигнал $x(nT)$ в вихідний дискретний сигнал $y(nT)$ (рис. 4.1). Ці сигнали можуть бути дійсними або комплексними (див. Лекцію 1)

$$y(nT)=F[x(nT)].$$

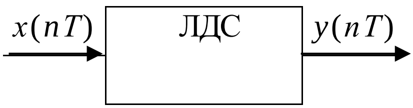

Рис. 4.1. Визначення лінійної дискретної системи

3. Дискретна система називається стаціонарною, якщо її реакція інваріантна по відношенню до початку відліку часу (властивість інваріантності у часі), т. ч. для реакцій $y(nT)$і $y_1(nT) = y[(n- m)T]$ при будь-якому цілому m справедлива рівність

$$y(nT) = y_1[(n+m)T].$$

Параметри стаціонарної системи незмінні в часі. За замовчуванням будемо розглядати стаціонарні системи.

У стаціонарній системі затримка впливу на час mT $(m > 0)$ призводить до затримки реакції на той же час

$$x[(n-m)T] \Rightarrow y[(n-m)T].$$

4. Початкові умови в дискретній системі можуть бути нульовими або ненульовими.

Ознакою нульових початкових умов є відсутність реакції $y(nT)=0$ при відсутності впливу $x(nT)=0$.

Позначивши момент початку впливу n=0, нульові початкові умови можна записати в наступному загальному вигляді

$$\begin{cases} x[(n-i)T]_{|n-i<0, i=1,2,\ldots}; \\ y[(n-k)T]_{|n-k<0, k=1,2,\ldots}, \end{cases} \qquad (4.5)$$

що означає: всі значення впливу і реакції, які може пам'ятати дискретна система, в моменти часу, що передують початковому, дорівнюють нулю

Ознакою ненульових початкових умов є наявність ненульових значень реакції (вільних коливань) при відсутності впливу.

5. Дискретна система називається такою, що фізично реалізована, якщо для неї виконуються умови фізичної можливості бути реалізованим: при нульових початкових умовах реакція не може виникнути раніше впливу; значення реакції $y(nT)$ в кожен момент часу n) залежать від поточного $x(nT)$ і попередніх значень впливу $x[(n-m)T]$, m> 0, але не залежать від його подальших значень $x[(n-m)T]$, $m \geq 1$.

Умови фізичної можливості бути реалізованою відображають причинно-наслідковий зв'язок реакції з впливом (принцип причинності).

Розглянемо опис лінійної дискретної системи (ЛДС) у часовій області, основну характеристику і співвідношення вхід/вихід.

4.1. Імпульсна характеристика

У часовій області основною характеристикою лінійної дискретної системи, так само як і лінійної аналогової системи, є імпульсна характеристика (ІХ).

Імпульсною характеристикою $h(nT)$ лінійної дискретної системи називається її реакція на цифровий одиничний імпульс $u_0(nT)$ при нульових початкових умовах (рис. 4.2).

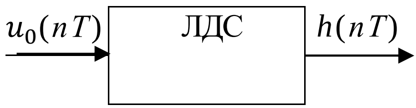

Рис. 4.2. Імпульсна характеристика

Імпульсну характеристику $h(nT)$ вважають основною характеристикою лінійної системи, тому що, знаючи її, можна визначити реакцію на будь-який (довільний) вплив.

У часовій області ЛДС може також описуватися перехідною характеристикою. Перехідною характеристикою $g(nT)$ лінійної дискретної системи називається її реакція на цифровий одиничний стрибок $u_0(nT)$ при нульових початкових умовах (рис. 4.3).

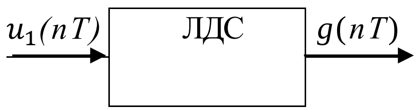

Рис. 4.3. Перехідна характеристика

Як відомо [9], перехідна характеристика лінійної аналогової системи пов'язана з її імпульсною характеристикою співвідношенням

$$g(t) = \int_0^t h(t)dt \quad .$$

Аналогічно, перехідна характеристика лінійної дискретної системи пов'язана з її імпульсною характеристикою співвідношенням

$$g(nT) = \sum_{m=0}^{n} h\,(mT)$$

Наприклад, якщо імпульсна характеристика має вигляд дискретної експоненти, що спадає

$$h(n) = \alpha^n, |\alpha| < 1,$$

то перехідна характеристика визначається як сума кінцевої геометричної прогресії, що спадає, і має такий вигляд:

$$g(nT) = \sum_{m=0}^{n} h\,(mT) = \sum_{m=0}^{n} \alpha^m = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Знаючи перехідну характеристику $g(nT)$, також можна визначити реакцію на довільний вплив.

4.2. Співвідношення вхід/вихід

Співвідношення вхід/вихід відображає взаємозв'язок між вхідним $x(nT)$ і вихідним $y(nT)$ сигналами ЛДС, т. ч. реакцію ЛДС на довільній вплив.

У часовій області співвідношення вхід/вихід ЛДС описується лінійними рівняннями.

- *формулою згортки* (згорткою), якщо використовується імпульсна характеристика;
- *різницевим рівнянням,* якщо будуть використовуватися параметри ЛДС.

4.2.1. Формула згортки

Отримаємо рівняння взаємозв'язку між вхідним $x(nT)$ і вихідним $y(nT)$ сигналами для ЛДС, заданої своєю імпульсною характеристикою $h(nT)$.

Скористаємося визначенням ІХ і властивостями ЛДС Будемо послідовно записувати відповідності, які вказуються стрілкою, між впливом і реакцією:

- за визначенням, впливу у вигляді цифрового одиничного імпульсу відповідає реакція, що називається імпульсною характеристикою

$$u_0(nT) => h(nT)\ ;$$

- на підставі властивості інваріантності у часі для стаціонарних лінійних систем впливу, затриманому на час mT, відповідає реакція, затримана на той же час

$$u_0[(n-m)T] => h[(n-m)T];$$

- на підставі властивості однорідності (4.4) лінійних систем, множенню впливу на константу $x(mT)$ відповідає реакція, помножена на ту ж константу

$$u_0[(n-m)T]x(mT) => h[(n-m)T]x(mT)\ ;$$

- а підставі властивості адитивності (4.3) лінійних систем реакція на суму впливів дорівнює сумі реакцій на кожний з впливів

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} u_0\,[(n-m)T]x(mT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h\,[(n-m)T]x(mT);$$

- для фізично реалізованих систем

$$\sum_{\mathrm{m=0}}^{\infty} \mathrm{u_0\,[(n\text{-}m)T]x(mT)} = \sum_{\mathrm{m=0}}^{\infty} \mathrm{h\,[(n\text{-}m)T]x(mT)}$$

- зліва маємо вплив у вигляді (1.5)

$$x(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} u_0\,[(n-m)T]x(mT)$$

справа – реакцію

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h\,[(n-m)T]x(mT) \qquad (4.6)$$

де $h[(n- m)T]$ - імпульсна характеристика, затримана на m періодів дискретизації..

Лінійне рівняння (4.6) називають формулою згортки (згорткою): реакція $y(nT)$ обчислюється як дискретна згортка впливу $x(nT)$ і імпульсної характеристики $h(nT)$,

Виконавши в (4.6) заміну змінних, можна отримати інший варіант запису формули згортки

$$\boldsymbol{y}(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h\,(mT)x[(n-m)T] \tag{4.7}$$

Для нормованого часу (Лекція 1) формули (4.6) і (4.7) приймають вид відповідно

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h\,(n-m)x(m) \tag{4.8}$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h\,(m)x(n-m) \tag{4.9}$$

При стандартному позначенні операції згортки, формули (4.8) і (4.9) записуються в компактному вигляді

$$y(n) = x(n) * h(n)\ .$$

Лінійна дискретна система, співвідношення вхід/вихід якої описується в вигляді формули згортки, відповідає умовам фізичної можливості бути реалізованою: при нульових початкових умовах

$$\begin{cases} x(n-m)_{|n-m<0} = 0; \\ h(n-m)_{|n-m<0} = 0 \end{cases}$$

реакція не може виникнути раніше впливу. Значення реакції $y(nT)$ в кожен момент часу n залежать від поточного і попередніх значень впливу, але не залежать від його подальших значень.

Лінійні рівняння (4.8) і (4.9) вирішуються методом прямої підстановки при нульових початкових умовах, тому формула згортки безпосередньо описує алгоритм обчислення реакції за відомим впливом і імпульсній характеристиці ЛДС.

Відзначимо, що для обчислення реакції лінійної аналогової системи за формулою згортки у вигляді інтеграла необхідно вибрати метод (алгоритм) чисельного інтегрування, однак всі подібні методи є наближеними і принципово вносять методичну похибку.

Покажемо тотожність результатів при обчисленні за формулою згортки в двох варіантах її запису (4.8) і (4.9) при нульових початкових умовах. Визначимо реакцію в точці $n = 3$:

- по формулі згортки (4.8) маємо:

$$y(3) = h(3)x(0) + h(2)x(1) + h(1)x(2) + h(0)x(3) \;;$$

- за формулою (4.9) отримуємо той же результат:

$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0).$$

Приклад 4.1

Обчислити реакцію ЛДС за формулою згортки при нульових початкових умовах. Імпульсна характеристика і вплив задані графічно на рис. 4.4. Потрібно визначити 8 відліків реакції.

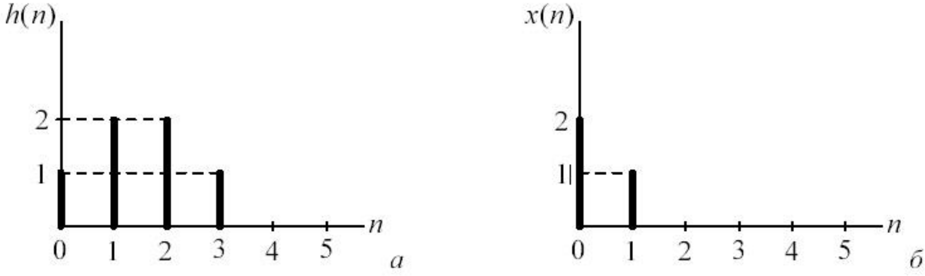

Рис. 4.4. Імпульсна характеристика (а) і вплив (б)

Рішення. Обчислення реакції наведено в табл. 4.1, а графік отриманої реакції - на рис. 4.5.

Таблиця 4.1. *Обчислення реакції по формулі згортки*

n	**Реакция**
0	$y(0)=h(0)\,x(0)+h(1)\,x(-1)+h(2)\,x(-2)+...=h(0)\,x(0)=1\cdot 2=2$
1	$y(1)=h(0)\,x(1)+h(1)\,x(0)+h(2)\,x(-1)+...=h(0)\,x(1)+h(1)\,x(0)=1\cdot 1+2\cdot 2=5$
2	$y(2)=h(0)\,x(2)+h(1)\,x(1)+h(2)\,x(0)+h(3)\,x(-1)+...=$ $=h(0)\,x(2)+h(1)\,x(1)+h(2)\,x(0)=1\cdot 0+2\cdot 1+2\cdot 2=6$
3	$y(3)=h(0)\,x(3)+h(1)\,x(2)+h(2)\,x(1)+h(3)\,x(0)+h(4)\,x(-1)+...=$ $=h(0)\,x(3)+h(1)\,x(2)+h(2)\,x(1)+h(3)\,x(0)=1\cdot 0+2\cdot 0+2\cdot 1+1\cdot 2=4$
4	$y(4)=h(0)\,x(4)+h(1)\,x(3)+h(2)\,x(2)+h(3)\,x(1)+h(4)\,x(0)+h(5)\,x(-1)+...=$ $=h(0)\,x(4)+h(1)\,x(3)+h(2)\,x(2)+h(3)\,x(1)+h(4)\,x(0)=$ $=1\cdot 0+2\cdot 0+2\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 2=1$
5	$y(5)=h(0)\,x(5)+h(1)\,x(4)+h(2)\,x(3)+h(3)\,x(2)+h(4)\,x(1)+h(5)\,x(0)+$ $+h(6)\,x(-1)+...=h(0)\,x(5)+h(1)\,x(4)+h(2)\,x(3)+h(3)\,x(2)+$ $+h(4)\,x(1)+h(5)\,x(0)=1\cdot 0+2\cdot 0+2\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 1=0$
6	$y(6)=0$
7	$y(7)=0$

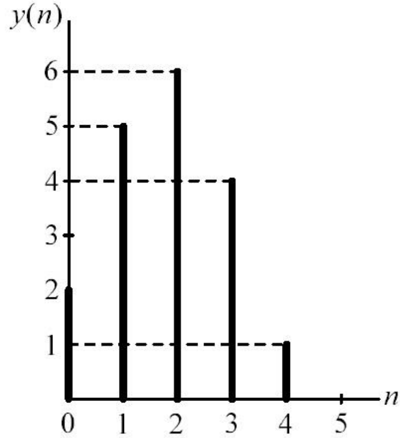

Рис. 4.5. Реакція

Механізм обчислення відліків реакції $y(n)$, $n = 0,1,2, \ldots$ за формулою згортки можна уявити як обчислення сум локальних добутків двох послідовностей - імпульсної характеристики і впливу.

При цьому одна з послідовностей фіксована, а інша дзеркально відображається щодо осі ординат і потім ковзає зліва направо по осі часу. При використанні формули згортки (4.9) фіксованою буде імпульсна характеристика, а ковзаючим - вплив.

Механізм обчислення згортки (4.9) для прикладу 4.1 наведено на рис. 4.6.

Фіксована імпульсна характеристика показана на рис. 4.6, а, вплив - на рис. 4.6, б, дзеркально відображений вплив - на рис. 4.6, в, а результат його послідовного ковзання - на рис. 4.6, г-з.

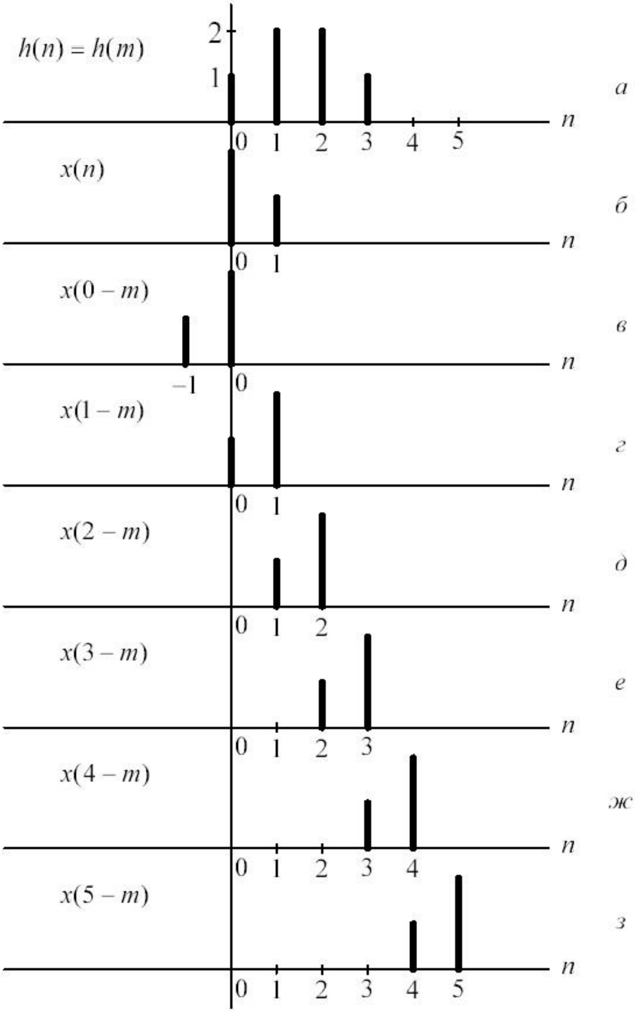

Рис. 4.6. Обчислення реакції за формулою згортки

Перший відлік реакції $y(0)$ обчислюється як сума локальних добутків послідовностей на рис. 4.6, а і в, другий відлік реакції $y(1)$ - як сума локальних добутків послідовностей на рис. 4.6, а і г, і т. Д. Очевидно, що обчислення слід припинити, як тільки всі локальні добутки виявляться рівними нулю. Це станеться, коли послідовності "розійдуться", т. ч. у двох послідовностей, що перемножуються, не буде жодного збігу відліків в жоден з моментів часу *n*. У розглянутому прикладі послідовності "розходяться" при зсуві змінного впливу по осі часу на $n = 5$ (рис. 4.6, з).

Розглянутий механізм обчислення реакції за формулою згортки дозволяє зробити наступні висновки:

- якщо тривалість впливу і/або імпульсної характеристики нескінченна, то тривалість реакції також нескінченна;
- якщо тривалості впливу $x(nT)$ і імпульсної характеристики $h(nT)$ кінцеві і рівні NT і MT відповідно, то тривалість реакції $y(nT)$ також кінцева і дорівнює LT, де

$$L = N + M - 1. \tag{4.10}$$

При $n \geq L$ послідовності (імпульсна характеристика і дзеркально відображений ковзаючий вплив) "розходяться" і $y(nT) = 0$.

Якщо вплив і імпульсна характеристика кінцеві, формули (4.8) і (4.9) набувають вигляду:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h\,(n-m)x(m) \tag{4.11}$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h\,(m)x(n-m) \tag{4.12}$$

У прикладі 4.1 маємо довжину впливу N = 2 і довжину імпульсної характеристики $M = 4$, тому довжина L реакції дорівнює (див. рис. 4.5)

$$L=4+2-1=5.$$

Операцію дискретної згортки в формулах (4.8) і (4.9) називають лінійною(аперіодичною) згорткою, на відміну від іншої її різновиди - колової (періодичної) згортки (див. Лекцію 11).

4.2.2. Різницеве рівняння

Поряд з формулою згортки взаємозв'язок між впливом $x(nT)$ і реакцією $y(nT)$ - співвідношення вхід/вихід – може описуватися лінійним різницевим рівнянням (РР).

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i\, x[(n-i)T] - \sum_{k=1}^{M-1} a_k\, y[(n-k)T] \tag{4.13}$$

де:

b_i, $a_к$ – коефіцієнти (дійсні константи);

$x(nT)$, $y(nT)$ – вплив і реакція (дійсні або комплексні);

i, $к$ – значення затримок для впливу і реакції відповідно;

N, M – константи;

$x[(n-i)T]$, $y[(n-k)T]$ – вплив і реакція, затримані на i і k періодів дискретизації відповідно.

Коефіцієнти b_i, $a_к$ називають внутрішніми параметрами (параметрами) ЛДС

Для нормованого часу різницеве рівняння (4.13) приймає вид

$$\boldsymbol{y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i\, x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k\, y(n-k)} \tag{4.14}$$

Лінійна дискретна система, співвідношення вхід/вихід якої описується в вигляді різницевого рівняння (4.14), відповідає умовам фізичної можливості бути реалізованою: при нульових початкових умовах (4.5) реакція не може виникнути раніше впливу.

Значення реакції $y(nT)$в кожен момент часу n залежать від поточного і попередніх значень впливу, але не залежать від його подальших значень.

Різницеве рівняння має пряму аналогію з лінійним диференціальним рівнянням, що описує співвідношення вхід/вихід аналогової лінійної системи [15],

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} - \sum_{k=1}^{M-1} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}, \tag{4.15}$$

де:

b_i, $a_к$ – коефіцієнти (дійсні константи), які визначаються значеннями резисторів, ємностей і індуктивностей;

$x(t)$, $y(t)$ – аналогові вплив і реакція (струми або напруги).

Перехід від диференціальних рівнянь до різницевих обумовлений відмінністю функцій, що описують вхідний і вихідний сигнали аналогових і дискретних лінійних систем. Аналогові сигнали описуються безперервними, а дискретні - ґратчастими функціями часу, тому обчислення похідних в (4.15) замінюється обчисленням розділених різниць в (4.14)[37].

Диференціальне рівняння (4.15) вирішується за допомогою одного з методів (алгоритмів) чисельного інтегрування. Вибір метода - досить складна проблема, проте будь-який з цих методів є наближеним, т. ч. принципово вносить методичну похибку. При невдало обраному методі похибка обчислення функції часу може виявитися наростаючою, що призведе до непередбачуваного результату.

Різницеве рівняння (14.14) вирішується методом прямої підстановки при нульових початкових умовах, що не вносить методичної похибки, тому воно безпосередньо описує алгоритм обчислення реакції за відомим впливом і параметрам ЛДС

Приклад 4.2

Вирішити різницеве рівняння:

$$y(n) = x(n) - 0{,}5y(n-1)$$

методом прямої підстановки при заданому впливі:

$$x(n) = 0{,}1^n$$

і нульових початкових умовах. Обчислити 5 відліків реакції.

Рішення. Обчислення реакції наведено в табл. 4.2.

Таблиця 4.2. *Обчислення реакції методом прямої підстановки*

n	**Воздействие**	**Реакция**
0	$x(0)=1$	$y(0)=x(0)-0,5y(-1)=1-0,5\cdot 0=1$
1	$x(1)=0,1$	$y(1)=x(1)-0,5y(0)=0,1-0,5\cdot 1=-0,4$
2	$x(2)=0,01$	$y(2)=x(2)-0,5y(1)=0,01-0,5\cdot(-0,4)=0,21$
3	$x(3)=0,001$	$y(3)=x(3)-0,5y(2)=0,001-0,5\cdot 0,21=-0,104$
4	$x(4)=0,0001$	$y(4)=x(4)-0,5y(3)=0,0001-0,5\cdot(-0,104)=0,0521$
...	...	...

4.3. Рекурсивні та нерекурсивні лінійні дискретні системи

Лінійна дискретна система називається рекурсивною, якщо хоча б один з коефіцієнтів a_k, $k=1,\ 2,\ldots,M-1$ різницевого рівняння (4.14) не дорівнює нулю.

Порядок рекурсивної ЛДС дорівнює порядку РР (4.14), т. ч.

$$\max\{(\boldsymbol{M}-\mathbf{1}),(\boldsymbol{N}-\mathbf{1})\}. \qquad (4.16)$$

Згідно (4.14), реакція $y(n)$ рекурсивної ЛДС в кожен момент часу п визначається:

- поточним відліком впливу $x(n)$;
- передісторією впливу $x(n\text{-}i),\ i=1,2,\ldots,\ N\text{-}1$;
- передісторією реакції $y(n\text{-}\ k),\ к=1,2,\ldots,\ M\text{-}\ 1.$

Наведемо приклади різницевих рівнянь найпростіших рекурсивних ЛДС:

- першого порядку

$$y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)-a_1y(n-1)\ ; \qquad (4.17)$$

- другого порядку

$$y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)-a_1y(n-1)-a_2y(n-2) \quad (4.18)$$

Лінійна дискретна система називається нерекурсивною, якщо всі коефіцієнти a_k, $k=1,\ 2,\ldots,M\text{-}1$ різницевого рівняння (4.14) дорівнюють нулю.

$$a_k = 0, k = 1,2, \ldots , M - 1. \quad . \qquad (4.19)$$

Для нерекурсивної ЛДС різницеві рівняння (4.13) і (4.14) приймають вид:

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i\, [x(n-i)T] \qquad (4.20)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i\, x(n-i) \qquad (4.21)$$

Порядок нерекурсивної ЛДС дорівнює порядку РР (4.21), т. ч. *(N -1).*

Згідно (4.21), реакція $y(n)$ нерекурсивної ЛДС в кожен момент часу n визначається:

- поточним відліком впливу $x(n)$;
- передісторією впливу $x(n\text{-}i)$, $i=1, 2,\ldots,$ N-1.

Наведемо приклад різницевого рівняння найпростішої нерекурсивною ЛДС другого порядку:

$$\boldsymbol{y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2)}\ ; \qquad (4.22)$$

4.4. Системи з кінцевою і нескінченною імпульсною характеристикою

Оцінимо особливості імпульсних характеристик рекурсивних і нерекурсивних ЛДС, описуваних різницевими рівняннями (4.14) і (4.21) відповідно.

Розглянемо процедуру розрахунку ІХ безпосередньо по РР і порівняємо результати на прикладах найпростіших рекурсивної і нерекурсивною систем.

Приклад 4.3

Обчислити імпульсну характеристику нерекурсивної ЛДС другого порядку, співвідношення вхід/вихід якої описується РР (4.22)

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)\ ;$$

Рішення. Згідно з визначенням, ІХ - це реакція на цифровий одиничний імпульс (див. рис. 4.2), тому, виконавши заміну

$$\begin{cases} x(n) \to u_0(n); \\ y(n) \to h(n); \end{cases} \qquad (4.23)$$

перепишемо РР у вигляді

$$h(n) = b_0 u_0(n) + b_1 u_0(n-1) + b_2 u_0(n-2)$$

і вирішимо його методом прямої підстановки при нульових початкових умовах

$$h(0) = b_0 u_0(0) + b_1 u_0(-1) + b_2 u_0(-2) = b_0 * 1 + b_1 * 0 + b_2 * 0 = b_0;$$
$$h(1) = b_0 u_0(1) + b_1 u_0(0) + b_2 u_0(-1) = b_0 * 0 + b_1 * 1 + b_2 * 0 = b_1;$$
$$h(2) = b_0 u_0(2) + b_1 u_0(1) + b_2 u_0(0) = b_0 * 0 + b_1 * 0 + b_2 * 1 = b_2;$$
$$h(3) = b_0 u_0(3) + b_1 u_0(2) + b_2 u_0(1) = b_0 * 0 + b_1 * 0 + b_2 * 0 = 0;$$
$$h(n) = 0 \text{ при } n > 3.$$

Поширюючи отримані результати на нерекурсівні ЛДС довільного порядку, приходимо до наступних висновків:

- імпульсна характеристика нерекурсивної ЛДС має кінцеву тривалість;
- значення відліків ІХ рівні коефіцієнтам різницевого рівняння

$$h(n) = b_i,\ n = i = 0,\ 1, \ldots, N\text{-}1. \qquad (4.24)$$

Тому нерекурсівні ЛДС називають системами з кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ-системами).

Приклад 4.4

Обчислити імпульсну характеристику рекурсивної ЛДС першого порядку, співвідношення вхід/вихід якої описується РР (4.17) при b_1 = 0

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1).$$

Рішення. Виконаємо заміну (4.23), перепишемо РР у вигляді

$$h(n) = b_0 u_0(n) - a_1 h(n-1)$$

вирішимо його методом прямої підстановки при нульових початкових умовах:

$$h(0) = b_0 u_0(0) - a_1 h(-1) = b_0;$$

$$h(1) = b_0 u_0(1) - a_1 h(0) = -a_1 b_0;$$

$$h(2) = b_0 u_0(2) - a_1 h(1) = -a_1(-a_1 b_0) = \mathrm{a}^2 b_0;$$

$$h(3) = b_0 u_0(3) - a_1 h(2) = -a_1(\mathrm{a}^2 b_0) = -\mathrm{a}^3 b_0;$$

Обчислення ІХ можна продовжувати нескінченно за формулою

$$\mathrm{h(n)} = (-1)^n \mathrm{a}^n b_0,\ \mathrm{n} = 4, 5, \ldots$$

Поширюючи отримані результати на рекурсивну ЛДС довільного порядку, приходимо до висновку, що імпульсна характеристика рекурсивної ЛДС має нескінченну тривалість

Тому рекурсивні ЛДС називають системами з нескінченною імпульсною характеристикою (БІХ-системами).

4.5. Властивості лінійних дискретних систем

Раніше було відзначено, що всі стаціонарні лінійні системи (аналогові і дискретні) мають загальні властивості:

□ адитивності;

□ однорідності;

□ інваріантності в часі.

Розглянемо ще дві найважливіших властивості лінійних дискретних систем:

□ властивість пам'яті;

□ стійкість.

4.5.1. Властивість пам'яті лінійних дискретних систем

Властивість пам'яті системи має на увазі її здатність "пам'ятати передісторію" (попередні відліки впливу) при обчисленні реакції в поточний момент часу. Тривалість передісторії (кількість попередніх відліків впливу) визначає тривалість пам'яті

Розглянемо властивість пам'яті нерекурсивних і рекурсивних ЛДС.

Згідно різницевого рівняння нерекурсивної ЛДС (4.21), при обчисленні реакції $y(n)$ в поточний n-й момент часу система "пам'ятає" (N-1) попередніх відліків впливу. Отже, нерекурсивна ЛДС має властивість пам'яті, її тривалість кінцева і дорівнює (N -1).

Згідно різницевого рівняння рекурсивної ЛДС (4.14), кожен поточний відлік реакції $y(n)$ можна виразити через попередні відліки впливу:

$$y(0) = b_0 x(0);$$

$$y(1) = b_0 x(1) + b_1 x(0) - a_1 y(0) = b_0 x(1) + b_1 x(0) - a_1 [b_0 x(0)].$$

$$y(2) = b_0 x(2) + b_1 x(1) + b_3 x(0) - a_1 y(1) - a_2 y(0) = b_0 x(2) + b_1 x(1) + b_3 x(0) - a_1\{b_0 x(1) + b_1 x(0) - a_1[b_0 x(0)]\} - a_2\{b_0 x(0)\}.$$

Таким чином:

□ відлік реакції $y(0)$ залежить від поточного відліку впливу $x(0)$;

□ відлік $y(1)$ залежить від поточного і попереднього відліків впливу $x(1–i)$, i = 0, 1;

□ відлік $y(2)$ залежить від поточного і двох попередніх відліків впливу $x(2—i)$, $i = 0, 1, 2$.

Аналогічним чином, нескладно показати, що відлік $y(3)$ залежить від відліків впливу $x(3\text{-}i)$, $i = 0,1, 2, 3$ і т. п.

Отже, при обчисленні відліку реакції в поточний i-й момент часу система "пам'ятає" всю передісторію впливу, це означає, що, рекурсивна ЛДС має властивість пам'яті і її тривалість в загальному випадку нескінченна. Ця властивість пам'яті рекурсивних ЛДС пояснюється наявністю зворотного зв'язку (4.14)), завдяки чому будь-який ненульовий відлік впливу циркулює в системі нескінченно. З плином часу він загасає, але присутній, принаймні, теоретично.

4.5.2. Стійкість лінійних дискретних систем

ЛДС називається стійкою, якщо при обмеженому впливі

$$\max_n |x(n)| \leq R_x$$

де R_x – будь-яке як завгодно велике позитивне число, не рівне нескінченності, і довільних, але обмежених початкових умовах реакція буде також обмеженою

$$\max_n |y(n)| \leq R_y,$$

где R_y – будь-яке як завгодно велике позитивне число, не рівне нескінченності.

Існують два критерії стійкості ЛДС. Один з них дозволяє оцінити стійкість ЛДС по її характеристиці в часовій області, інший по z-зображенню цієї характеристики в z-області.

4.5.3. Оцінка стійкості по імпульсної характеристиці: критерій стійкості

Розглянемо критерій, що дозволяє оцінити стійкість ЛДС по її імпульсної характеристиці.

Якщо жоден з коефіцієнтів розкладання імпульсної характеристики у вигляді (3.45)

$$\mathrm{h(n)} = A_0 u_0(n) + \sum_{k=0}^{M-1} A_k a_k^n$$

не рівний нулю:

$$A_k \neq 0, k = 1, 2, \dots, K,$$

критерій стійкості сформулюється так: для того щоб лінійна дискретна система була стійка, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова абсолютної збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| \ < \ \infty \qquad (4.25)$$

Доказ: При відомій імпульсній характеристиці $h(n)$ реакція може бути обчислена за формулою згортки (4.9)

$$y(n) = \sum_{n=0}^{\infty} h(m)x(n-m).$$

Для модуля реакції справедливі співвідношення:

$$|y(n)| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)x(n-m)|$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)|\,|x(n-m)|$$

Оцінимо максимальне значення $|y(n)|$, підставивши замість відліків впливу $|x(n\text{-}m)|$ їх максимально допустиму величину R_x:

$$\max_n |y(n)| \leq R_x \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| \qquad (4.26)$$

Якщо реакція обмежена значенням R_y :

$$\max_n |y(n)| \leq R_x \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| \leq R_y \qquad (4.26)$$

необхідно, щоб виконувалася умова (4.25).

З іншого боку, для того щоб реакція в (4.26) була обмеженою, досить виконання умови (4.25), що й треба було довести

Якщо хоча б один з коефіцієнтів розкладання $A_к$ дорівнює нулю, можлива ситуація, коли умова (4.25) виконується, а ЛДС - нестійка. Приклад подібної ЛДС розглядається в лекції 5, де наводиться критерій стійкості в z-області.

Критерій (4.25) дозволяє стверджувати, що нерекурсивні ЛДС (КІХ- системи) принципово стійкі, оскільки їх імпульсна характеристика кінцева.

Приклад 4.5

Визначити, чи стійка рекурсивна ЛДС, імпульсна характеристика якої має вигляд дискретної експоненти (див. Лекцію 1)

$$h(n)=\begin{cases} a^n, n \geq 0; \\ 0, n < 0. \end{cases}$$

Рішення. Підставивши цю ІХ в (4.25), отримаємо ряд типу (3.20)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n. \qquad (4.27)$$

при q=|a| і область його збіжності |a| < 1.

У цій області імпульсна характеристика має вигляд затухаючої експоненти (рис. 1.6), а ЛДС, згідно з критерієм (4.25), є стійкою.

Поза області збіжності, при |a| > 1, ряд (4.27) виявляється розбіжним

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n \to \infty.$$

а ЛДС, згідно з критерієм (4.25), нестійкою.

Узагальнюючи даний результат, можна зробити наступні висновки:

- рекурсивні ЛДС (БІХ-системи) вимагають перевірки на стійкість;
- імпульсна характеристика стійкої рекурсивної ЛДС має характер загасаючої функції часу.