

Практичне заняття №1

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕТЕРМІНОВАНИХ І ВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

МЕТА: вивчити математичний опис дискретних сигналів та опанувати програмні засоби їх моделювання в MATLAB.

1. Короткі теоретичні відомості

У теорії ЦОС прийнято розділяти операції дискретизації за часом і квантування за рівнем. Вважаючи операцію квантування відсутньою, вивчають дискретні сигнали та лінійні дискретні системи (ЛДС), а потім, окремо, ефекти нелінійної операції квантування.

Дискретним називають сигнал, дискретний за часом і безперервний станом (рівнем), який описується послідовністю чисел нескінченної розрядності $x(nT)$ або $x(n)$, або коротко – послідовністю. Значення nT , $n = 0, 1, \dots$ називають дискретним часом, де T — період дискретизації, а n — дискретним нормованим часом.

У теорії ЦОС терміни " дискретний сигнал " і " послідовність " використовують у тотожному сенсі.

Цифровим називають сигнал, дискретний за часом і квантований за станом (рівнем), який описується послідовністю чисел кінцевої розрядності — квантованою послідовністю $\tilde{x}(nT)$ або $\tilde{x}(T)$.

При комп'ютерному моделюванні під дискретним сигналом умовно розуміють послідовність чисел максимально можливої розрядності, а під цифровим - послідовність чисел заданої розрядності.

У MATLAB числа з максимальною розрядністю відносяться до типу `doubl` (з плаваючою точкою подвійної точності (double-precision floating point), який вибирається за умовчанням.

Детерміновані дискретні сигнали

Детермінованим дискретним сигналом називають сигнал, значення якого будь-якої миті часу n (або nT) заздалегідь відомі або можуть бути визначені точно за заданою математичною моделлю.

Детермінований дискретний сигнал описується послідовністю $x(nT)$ або $x(n)$ при цьому термін "детермінований" прийнято опускати.

Для детермінованого дискретного сигналу (послідовності) цікаві такі його характеристики, як середнє значення, енергія, середня потужність, автокореляційна та автоковаріаційна функції.

Середнім значенням послідовності називають суму її значень, віднесену до довжини.

Енергією послідовності називають суму квадратів її значень, а середньою потужністю енергію, віднесену до довжини послідовності.

У MATLAB середнє значення m обчислюється за допомогою функції:

$M = \text{mean}(x)$

де x - вектор відліків послідовності.

Енергія E та середня потужність P обчислюються відповідно до їх визначення:

$$E = \text{sum}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{A2})$$

$$P = \text{sum}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{A2}) / \text{length}(\mathbf{x})$$

де $\text{length}(\mathbf{x})$ - довжина послідовності.

Автокореляційна функція (АКФ) (в англomовній літературі – аббревіатура ACF (Autocorrelation Function)) $R_x(m)$ послідовності довжини N дозволяє оцінити залежність між її відліками при різних зрушеннях за часом m :

$$R_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|} x(n)x(n+m), \quad -(N-1) \leq m \leq (N-1). \quad (1)$$

Автоковаріаційна функція $r_x(m)$ дозволяє оцінити залежність між відхиленнями відліків послідовності від середнього значення μ_x при різних зсувах за часом m :

$$r_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|} [x(n) - \mu_x][x(n+m) - \mu_x], \quad -(N-1) \leq m \leq (N-1). \quad (2)$$

Згідно з визначенням, $R_x(m)$ (1) та $r_x(m)$ (2) є парними функціями довжини $L = 2N - 1$, центрованими щодо $m = 0$:

$$R_x(m) = R_x(-m);$$

$$r_x(m) = r_x(-m).$$

При цьому в точці $m = 0$ маємо:

$$R_x(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = P_{cp\ x} = \sigma_x^2 + \mu_x^2; \quad (3)$$

$$r_x(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - \mu_x]^2 = \sigma_x^2, \quad (4)$$

де $P_{cp\ x}$ і σ_x^2 – середня потужність і дисперсія послідовності $x(n)$.

Очевидно, що при $\mu_x = 0$ отримуємо рівності:

$$R_x(m) = r_x(m);$$

$$R_x(0) = r_x(0) = \sigma_x^2.$$

У MATLAB АКФ та автоковаріаційна функція розраховуються за допомогою функцій (без урахування множника $1/N$):

$$R = \text{xcorr}(\mathbf{x})$$

$$r = \text{xcov}(\mathbf{x})$$

де \mathbf{x} - вектор відліків вихідної послідовності довжини N ; R і r — вектори довжини $L = 2N - 1$ значень АКФ $R_x(m)$ та автоковаріаційної функції $r_x(m)$, відповідно, центрованих щодо $m = N$:

$$R_x(N+m) = R_x(N-m), \quad m = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5)$$

$$r_x(N+m) = r_x(N-m), m=1,2,\dots,N-1. \quad (6)$$

При цьому в точці $m = N$ маємо:

$$R_x(N) = P_{\varphi x} = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \quad (7)$$

$$r_x(N) = \sigma_x^2. \quad (8)$$

Для виведення графіка АКФ, центрованого щодо $m = 0$, слід вибрати інтервал $m \in [-(N-1); (N-1)]$.

2. Зміст практичної роботи

Зміст роботи пов'язаний з моделюванням детермінованих та випадкових послідовностей, у тому числі типових послідовностей, та розрахунком їх характеристик програмними засобами MATLAB.

3. Завдання на практичну роботу

Практична робота виконується на основі script-файлу pr_04.

Перед виконанням роботи слід зберегти шлях до папки з файлом pr_04 за командою контекстного меню Add to Path | Selected Folders.

Вихідні дані пунктів завдання наводяться в табл. 4.1 для номера бригади $N_{бр}$, де $N_{бр} = 1, 2, \dots$ відповідає номеру за списком групи, 30. Функція $N = N_{бр} \bmod M$ у запису вихідних даних означає обчислення значення $N_{бр}$ по модулю M .

Таблиця 1.

Змінна	Призначення	Значення	Ідентифікатор	Приклад розрахунку для № = 1
$N_{бр}$	Номер бригади	$N_{бр}$	Nb =	Nb = 1
N	Довжина послідовності	$N = 30 + N_{бр} \bmod 5$	N =	N = 31
T	Період дискретизації	$T = 0,0005(1 + N_{бр} \bmod 3)$	T =	T = 0.01
a	Основа експоненти	$a = (-1)^{N_{бр}}(0,8 + 0,005N_{бр})$	a =	a = -0.805
C	Амплітуда гармонійного сигналу	$C = 1 + N_{бр} \bmod 5$	C =	C = 2
$\hat{\omega}_0$ (рад)	Частота гармонійного сигналу	$\hat{\omega}_0 = \pi/(6 + N_{бр} \bmod 5)$	w0 =	w0 = pi/17
m	Затримка	$m = 5 + N_{бр} \bmod 5$	m =	m = 6
U	Амплітуда імпульсу	$U = N_{бр}$	U =	U = 1
n_0	Початковий момент імпульсу	$n_0 = N_{бр} \bmod 5 + 3$	n0 =	n0 = 4

n_{imp}	Довжина імпульсу	$n_{imp} = N_{\text{бр}} \bmod 5 + 5$	$n_{imp} =$	$n_{imp} = 6$
B_1, B_2, B_3	Амплітуди гармонійних сигналів	$B_1 = 1,5 + N_{\text{бр}} \bmod 5$ $B_2 = 5,7 - N_{\text{бр}} \bmod 5$ $B_3 = 2,2 + N_{\text{бр}} \bmod 5$	Вектор $B = [\dots]$	Вектор $B = [2.5 \ 4.7 \ 3.2]$
$\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3$	Частоти гармонійних сигналів	$\hat{\omega}_1 = \pi/(4 + N_{\text{бр}} \bmod 5)$ $\hat{\omega}_2 = \pi/(8 + N_{\text{бр}} \bmod 5)$ $\hat{\omega}_3 = \pi/(16 + N_{\text{бр}} \bmod 5)$	Вектор $w = [\dots]$	Вектор $w = [\pi/5 \ \pi/9 \ \pi/17]$
a_1, a_2, a_3	Коефіцієнти лінійної комбінації гармонійних сигналів	$a_1 = 1,5 - N_{\text{бр}} \bmod 5$ $a_2 = 0,7 + N_{\text{бр}} \bmod 5$ $a_3 = 1,4 + N_{\text{бр}} \bmod 5$	Вектор $A = [\dots]$	Вектор $A = [0.5 \ 1.7 \ 2.4]$
mean	Математичне очікування	$\text{mean} = N_{\text{бр}} \bmod 5 + 3$	Mean =	Mean = 4
var	Дисперсія	$\text{var} = N_{\text{бр}} \bmod 5 + 5$	Var =	Var = 6

Завдання на лабораторну роботу пов'язане з моделюванням та аналізом послідовностей.

Вимоги до звіту

Звіт складається в редакторі MS Word і містить вихідні дані та результати виконання кожного пункту завдання, включаючи результати обчислень (шрифт Courier New), що копіюються з вікна Command Window, створені графіки (копіюються за командою Edit | Copy Figure у вікні Figure) і відповіді на поставлені питання (шрифт Times New Roman).

Контрольні питання

1. Дайте визначення дискретного та цифрового сигналів.
2. Як математично описується дискретний сигнал?
3. Який тип даних використовується за умовчанням при описі послідовностей у MATLAB?
4. Що таке період та частота дискретизації і як вони пов'язані один з одним?
5. Дайте визначення дискретного нормованого часу.
6. Дайте визначення нормованої частоти.
7. Які дискретні сигнали називають детермінованими?
8. Назвіть основні характеристики детермінованих дискретних сигналів.
9. Поясніть, з якою метою та як обчислюються автокореляційна та автоковаріаційна функції.
10. Які властивості має АКФ?
11. Які дискретні сигнали називаються випадковими?
12. Що таке комплекс реалізацій випадкового дискретного сигналу?

13. Назвіть основні статистичні характеристики випадкових дискретних сигналів.
14. Як визначаються основні статистичні характеристики випадкових дискретних сигналів щодо ансамблю реалізацій?
15. Які випадкові дискретні сигнали називають стаціонарними у широкому сенсі?
16. Які випадкові дискретні сигнали називають ергодичними?
17. Дайте визначення рівномірного білого шуму та нормального білого шуму.
18. Який вигляд мають АКФ нормального білого шуму та автоковаріаційна функція рівномірного білого шуму?