Лабораторна робота №4

ДОСЛІДЖЕННЯ РЕКУРСИВНОГО ЦИФРОВОГО ФІЛЬТРУ

МЕТА: знаходження системної функції фільтра, імпульсної характеристики, частотної характеристики; побудова полюсів та нулів системної функції та початкової частини імпульсної характеристики.

Системна функція цифрового фільтра

Згортці в часовій області відповідає множення Z-перетворень, тому можна записати

$$Y(z) = H(z)X(z), \qquad (1)$$

де $H(z)$ – z-перетворення імпульсної характеристики $h(n)$:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}\ . \qquad (2)$$

Функцію $H(z)$ в літературі з цифровій обробки сигналів зазвичай називають *системною функцією* ЦФ, проте використовуються і інші назви, наприклад, передавальна функція лінійної дискретної системи, Z-перетворення імпульсної характеристики.

$H(z)$ аналогічна передавальній функції $K(p)$ для неперервних лінійних систем. Виходячи з цього, можна отримати низку корисних властивостей $H(z)$, грунтуючись на властивостях $K(p)$ і враховуючи зв'язок між точками z-площини та p-площини, що витікають із співвідношення $z = e^{pT}$.

Запишемо алгоритм цифрової фільтрації в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} y(n) &= a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \ldots + a_M x(n-M) + \\ &+ b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) + b_3 y(n-3) + \ldots + b_N y(n-N). \end{aligned} \qquad (3)$$

Формально застосувавши Z-перетворення до (3), з урахуванням властивостей лінійності і затримки для Z-перетворення, отримаємо

$$\begin{aligned} Y(z) &= a_0 X(z) + a_1 X(z) z^{-1} + a_2 X(z) z^{-2} + \ldots + a_M X(z) z^{-M} + \\ &+ b_1 Y(z) z^{-1} + b_2 Y(z) z^{-2} + b_3 Y(z) z^{-3} + \ldots + b_N Y(z) z^{-N}. \end{aligned}$$

Перенесемо складові із $Y(z)$ в ліву частину та винесемо $X(z)$ та $Y(z)$ за дужки

$$\begin{aligned} Y(z)\,(1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - b_3 z^{-3} - \ldots - b_N z^{-N}) &= \\ = X(z)\,(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_M z^{-M}). \end{aligned}$$

Тепер з урахуванням (6.10) легко отримати

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} a_i z^{-i}}{1 - \sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k}} = \frac{A(z)}{B(z)}\,. \qquad (4)$$

Оскільки (4) отримане із різницевого рівняння загального типу, можна стверджувати, що $H(z)$ завжди є дробово-раціональною функцією, тобто представляється відношенням двох поліномів. Поліном чисельника визначається нерекурсивною частиною, поліном знаменника – рекурсивною частиною алгоритму цифровий фільтрації. З виразу для $H(z)$ легко відразу ж отримати різницеве рівняння ЦФ. Це істотно полегшує синтез ЦФ. Слід зазначити, що для аналогових фільтрів отримання схеми фільтра за відомою передавальною функцією $K(p)$ пов'язане з розрахунками, обсяг яких залежить від типу фільтра, його порядку, і може бути значним.

Відомо, що кожен поліном $A(z)$ степеня M може бути єдиним способом представлений як добуток постійної величини і M лінійних множників виду $(z-z_k)$, де z_k – корені полінома $A(z)$. Використовуючи це правило, можна перетворити (3) до вигляду:

$$H(z)=a_0 z^{N-M}\frac{\prod_{i=1}^{M}(z-z_{0i})}{\prod_{k=1}^{N}(z-z_{\Pi k})}; \qquad (5)$$

тут z_{0i} – *нулі* системної функції $H(z)$, тобто точки на z-площині, в котрих $H(z) = 0$;

$z_{\Pi k}$ – *полюси* (*особливі точки*) системної функції $H(z)$, тобто точки, для яких справедливо наступне: якщо $z \to z_{\Pi k}$, то $H(z) \to \infty$.

Як підсумок, системна функція $H(z)$ цілком визначається (з точністю до постійного коефіцієнта підсилення a_0) розташуванням її нулів та полюсів.

Нулі (як і полюси) системної функції $H(z)$ можуть бути дійсними або комплексними. Якщо всі коефіцієнти фільтра є числами дійсними, то комплексні нулі (як і полюси) мають утворювати комплексно-спряжені пари: якщо є нуль

$$z_0 = \mathrm{Re}\, z_0 + j\, \mathrm{Im}\, z_0 = |z_0|\, exp\,(j\varphi_0),$$

то обов'язково має бути нуль

$$z_0^* = \mathrm{Re}\, z_0 - j\, \mathrm{Im}\, z_0 = |z_0|\, exp\,(-j\varphi_0),$$

де $|z_0|$ та φ_0 – модуль та аргумент комплексного числа z_0 відповідно.

Пересвідчимось, що добуток двох лінійних множників із комплексно-спряженими нулями буде поліномом другого степеня із дійсними коефіцієнтами.

$$(z-z_0)(z-z_0^*) = [z-|z_0|\, exp\,(j\varphi_0)]\,[z-|z_0|\, exp\,(-j\varphi_0)] =$$
$$= z^2 - |z_0|\,[exp\,(j\varphi_0) + exp\,(-j\varphi_0)]\, z + |z_0|\, e^0 .$$

Оскільки $exp\,(j\varphi_0) + exp\,(-j\varphi_0)] = 2\cos\varphi_0$, а $e^0 = 1$, отримаємо

$$(z-z_0)(z-z_0^*) = z^2 - 2z\,|z_0|\cos\varphi_0 + |z_0|.$$

Якщо ж хоча один нуль або полюс системної функцію не буде мати комплексно-спряженого, не всі коефіцієнти різницевого рівняння будуть дійсними.

Отже, нулі і полюси $H(z)$ будуть розташовуватися на комплексній z-площині симетрично відносно осі $\mathrm{Re}\, z$.

Поліноми чисельника і знаменника системної функції $H(z)$ можна представити добутком множників типу $\gamma_0+\gamma_1\, z^{-1}$ (в разі дійсного кореня) або $\gamma_0+\gamma_1\, z^{-1}+\gamma_2\, z^{-2}$ (в разі комплексно-спряжених коренів). Із цього витікає, що системна функція може бути записана у такий спосіб

$$H(z) = a_0 \cdot \widehat{H}_1(z) \cdot \widehat{H}_2(z) \cdot \ldots \cdot \widehat{H}_R(z) \cdot \widetilde{H}_1(z) \cdot \widetilde{H}_2(z) \cdot \ldots \cdot \widetilde{H}_G(z); \; R + 2G = N; \quad (6)$$

де $\widehat{H}_k(z) = (1 + \alpha_{k1} z^{-1}) / (1 - \beta_{k1} z^{-1})$ – системна функція фільтра першого порядку із дійсними коефіцієнтами; кількість таких складових дорівнює кількості дійсних полюсів $H(z)$;

$\widetilde{H}_k(z) = (1 + \alpha_{k1} z^{-1} + \alpha_{k2} z^{-2}) / (1 - \beta_{k1} z^{-1} - \beta_{k2} z^{-2})$ – системна функція фільтра другого порядку із дійсними коефіцієнтами; кількість таких складових дорівнює половині кількості комплексних полюсів $H(z)$.

Деякі з коефіцієнтів α_{ki} та β_{ki} можуть бути нульовими.

Приклад виконання роботи

1. Цифровий фільтр описується наступним різницевим рівнянням:

$$y(n) = 0{,}4x(n) - 0{,}57x(n-1) + 0{,}4x(n-2) - 0{,}59y(n-2)$$

з періодом дискретизації T = 0,25 с

2. Системна функція даного фільтра має вигляд

$$H(z) = \frac{0.4 - 0.57z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 + 0.59z^{-2}} = \frac{0.4z^2 - 0.57z^1 + 0.4}{z^2 + 0.59}$$

3. Проведемо аналіз даного цифрового фільтра в середовищі Matlab

`>> b=[0.4 -0.57 0.4];`	Введення коефіцієнтів полінома чисельника
`>> a=[1 0 0.59];`	Введення коефіцієнтів полінома знаменника
`>> roots(b)`	

`ans =`
 	
`0.7125 + 0.7017i`
`0.7125 - 0.7017i`
	Знаходження коренів чисельника (нулів системної функції)

`>> roots(a)`	

`ans =`
 	
`0 + 0.7681i`
`0 - 0.7681i`
	Знаходження коренів знаменника (полюсів системної функції)

`>> fvtool(b,a)`	Запуск візуалізації характеристик фільтрів

3. Наведемо графіки аналізу досліджуваного фільтра: розташування нулів та полюсів (рис.4.1), АЧХ(рис.4.2.а.) та ФЧХ (рис.4.2.б.), імпульсної характеристики (рис.4.3.).

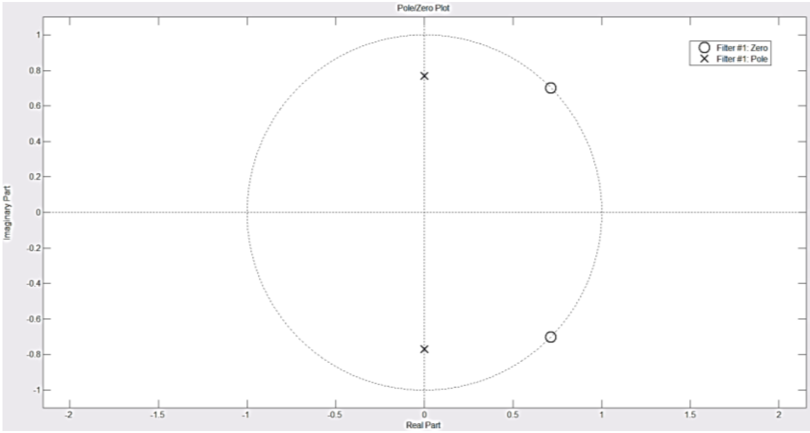
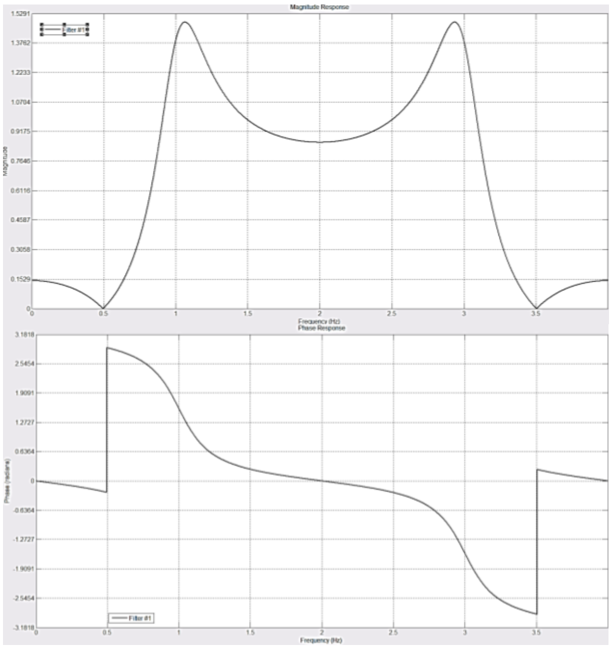


Рис.4.1



а) б)

Рис.4.2

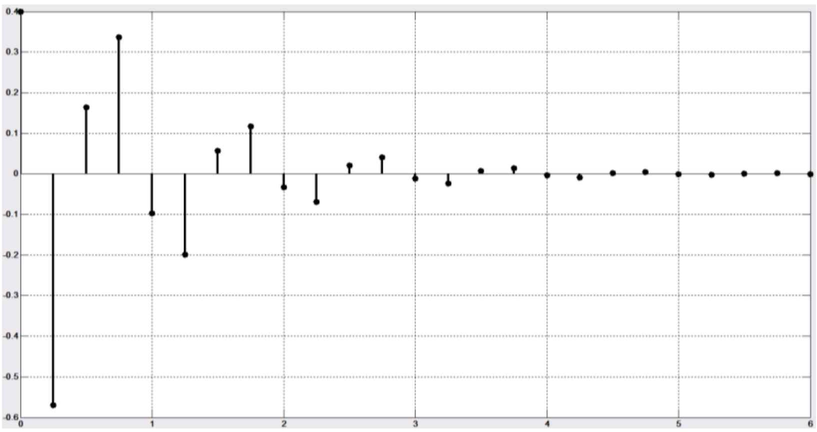


Рис.5.3

Завдання для виконання роботи

Варіант	Рівняння фільтру	Період дискретизації, с
1	y(n)=2x(n) – 2x(n-2)+0,8y(n-1) – 0,64y(n-2)	0,2
2	y(n)=0,5x(n) – x(n-1)+0,7y(n-1) – 0,49y(n-2)	0,003
3	y(n)=3x(n) + 3x(n-2)+1,74y(n-1) – 0,81y(n-2)	5
4	y(n)=0,8x(n) + 0,8x(n-1)+1,56y(n-1) – 0,81y(n-2)	0,007
5	y(n)=1,5x(n) – 1,5x(n-1)+1,34y(n-1) – 0,9y(n-2)	0,4
6	y(n)=2x(n) + 2x(n-2)+1,65y(n-1) – 0,9y(n-2)	0,008
7	y(n)=2x(n) + 1,37x(n-1)+2x(n-2) – 0,72y(n-2)	0,001
8	y(n)=0,5x(n) – 1,5x(n-1) + x(n-2) + 1,56y(n-1) – 1,2y(n-2)	0,006
9	(n)=0,7x(n) + 1,4x(n-1)+0,7x(n-2) + 0,75y(n-1) – 0,56y(n-2)	0,015
10	y(n)=x(n) + x(n-2)+1,81y(n-1) – 0,85y(n-2)	0,12
11	y(n)=0,3x(n) – 0,6x(n-1) + 0,28y(n-1) – 0,67y(n-2)	0,024
12	y(n)=x(n) – 1,5x(n-1) + 0,5x(n-2) – 1,4y(n-1) – 0,66y(n-2)	0,01
13	y(n)=2,5x(n) + 2,5x(n – 2) – 0,7y(n – 1) – 0,49y(n – 2)	4
14	y(n)=0,4x(n) – 0,57x(n – 1) + 0,4x(n – 2) – 0,59y(n – 2)	0,25
15	y(n)=0,6x(n) – 0,3x(n-1) – 0,3x(n-2) + 1,23y(n-1) – 0,64y(n-2)	0,005
16	y(n)=2x(n) – 4x(n-1) + 0,94y(n-1) – 0,53y(n-2)	8
17	y(n)=1,2x(n) – 2,7x(n-2) – 1,44y(n-2)	0,3
18	y(n)=1,5x(n) + 3x(n-1) – 0,51y(n-1) – 0,55y(n-2)	0,018
19	y(n)=0,8x(n) + 1,28x(n-1) + 0,48x(n-2) + 1,56y(n-1) – 0,69y(n-2)	0,05
20	y(n)=0,7x(n) + 0,7x(n-2) + 1,43y(n-1) – 0,76y(n-2)	8
21	y(n)=1,5x(n) – 1,5x(n-2) – 1,26y(n-1) – 0,79y(n-2)	0,1
22	y(n)=x(n) – 1,2x(n – 1) + 1,04y(n – 1) – 0,83y(n – 2)	0,002
23	y(n)=2,2x(n) + 1,32x(n-1) – 0,87y(n-1) – 0,58y(n-2)	0,003
24	y(n)=2x(n) + 1,28x(n-2) + 0,48y(n-1) – 0,86y(n-2)	0,003
25	y(n)=1,4x(n) + 1,4x(n-2) – 2,13y(n-1) – 1,7y(n-2)	0,005
26	y(n)=1,2x(n) – 0,24x(n-1) – 0,58x(n-2) – 1,63y(n-1) – 0,88y(n-2)	0,008
27	y(n)=1,8x(n) + 1,46x(n-2) – 1,65y(n-1) – 0,77y(n-2)	0,01
28	y(n)=3x(n) + 1,02x(n-1) + 3x(n-2) + 1,4y(n-1) – y(n-2)	0,015
29	y(n)=0,4x(n) – 0,57x(n-1) + 0,4x(n-2) + 0,8y(n-1) – 0,64y(n-2)	0,003
30	y(n)=x(n) + x(n-2) + 1,65y(n-1) – 0,9y(n-2)	0,007

ВИСНОВОК: в даній лабораторній роботі було знайдено системну функцію фільтра, імпульсну характеристику, частотну характеристику; побудовано полюси та нулі системної функції та початкову частину імпульсної характеристики. Графічні зображення наведені на рис.4.1. – 4.3.