

Z-перетворення

$$X(z) = Z\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} \quad (3.1)$$

$$x(nT)|_{n<0} = 0 \quad (3.2)$$

$$z = e^{pT} \quad (3.3)$$

$$p = \sigma + j\omega \quad (3.4)$$

$$z = \xi + j\eta \quad (3.5)$$

$$z = re^{j\varphi} \quad (3.6)$$

$$r = |z| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (3.7)$$

$$\varphi = \mathit{arg}(z) = \mathit{arctg}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) \quad (3.8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)z^{-n}| < \infty \quad (3.9)$$

$$|z| > R, \quad (3.10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |a^n z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty \quad (3.11)$$

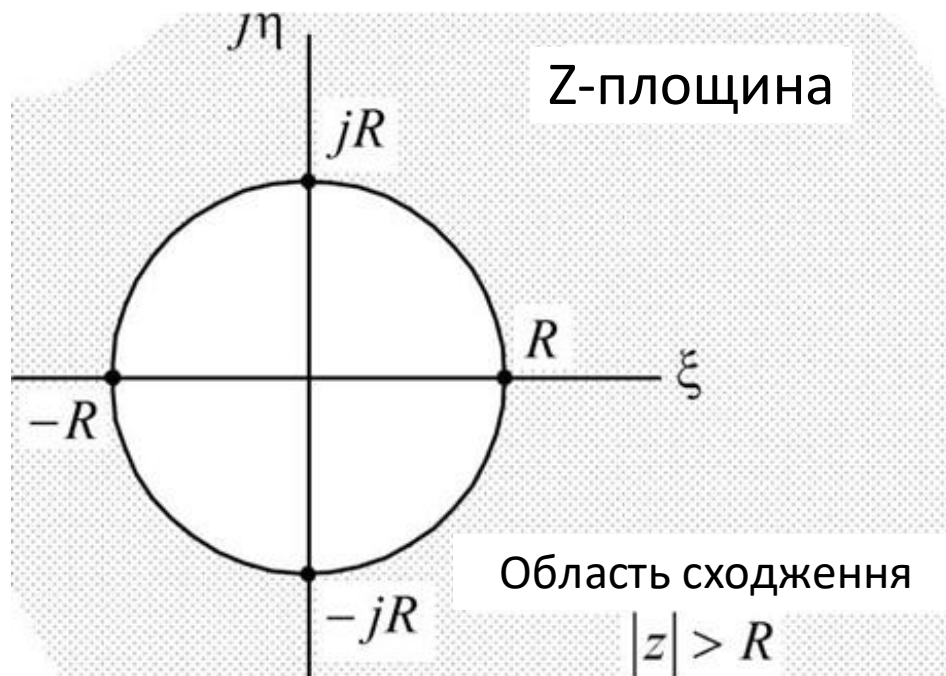


Рис. 3.1. Область сходимости z-зображення

$$z = e^{pT} = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \quad (3.12)$$

$$z = e^{\sigma T} [\cos(\omega T) + j \sin(\omega T)] \quad (3.2)$$

$$\xi = e^{\sigma T} \cos(\omega T) \quad (3.13)$$

$$\eta = e^{\sigma T} \sin(\omega T) \quad (3.14)$$

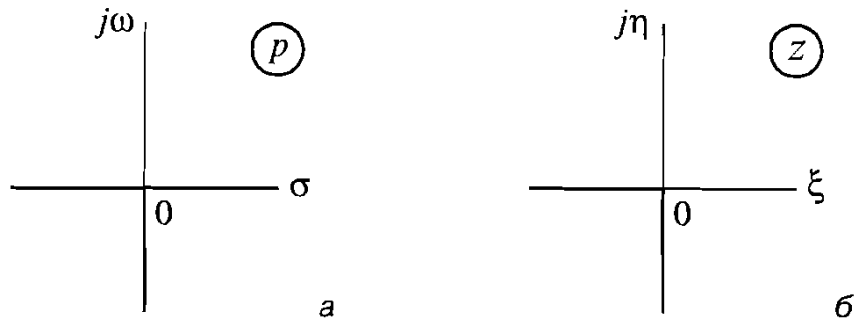


Рис. 3 2 . Комплексні p -площина (а) і z -площина (б)

$$r = e^{\sigma T} \quad (3.15)$$

$$\varphi = \omega T = \omega \quad (3.16)$$

Оскільки $e^{j\varphi} = e^{j\omega} = e^{j(\omega \pm 2\pi k)}$.

$$\varphi = \omega \pm 2\pi k \quad (3.17)$$

$$-\pi < \varphi \leq \pi \quad (3.18)$$

Відображення p - площини на z -площину

1. Початок координат p -площини – точка с координатами ($\sigma = 0$; $\omega = 0$) – відображається в точку z - площини с координатами ($\xi = 1$; $\eta = 0$) або з полярними координатами ($r = 1$; $\varphi = 0$) (рис. 3.3):

$$z = e^{pT} = e^{0 \cdot T} e^{j0 \cdot T} = 1 \cdot e^{j0} = 1.$$

2. Точка p - площини с координатами $(\sigma = -\infty; \omega = 0)$ відповідає початку координат z - площини – точці с координатами $(\xi = 0; \eta = 0)$ або з полярними координатами $(r = 0; \varphi = 0)$

$$z = e^{pT} = e^{-\infty} e^{j0 \cdot T} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0.$$

3. Точка p - площини на осі частот $j\omega$ с координатами $(\sigma = 0; \omega = \pi/2T)$ відображається в точку z - площини с координатами $(\xi = 0; \eta = 1)$ або з полярними координатами $(r = 1; \varphi = \pi/2)$ (рис. 3.3)

$$z = e^{pT} = e^{0 \cdot T} e^{j\frac{\pi}{2T}T} = e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j.$$

4. Точка p - площини на осі частот $j\omega$ с координатами $(\sigma = 0; \omega = -\pi/2T)$ відображається в точку z - площини с координатами $(\xi = 0; \eta = -1)$ або з полярними координатами $(r = 1; \varphi = -\pi/2)$ (рис. 3.3).

$$\square \quad z = e^{pT} = e^{0 \cdot T} e^{-j\frac{\pi}{2T}T} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -j.$$

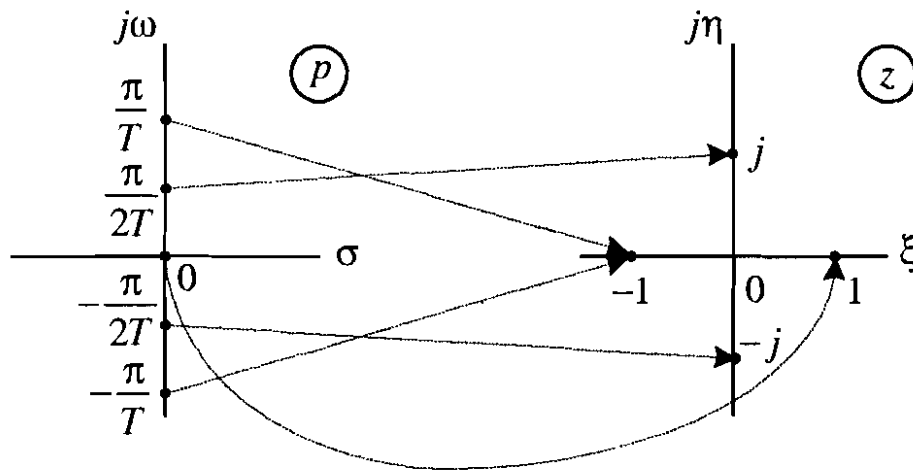


Рис. 3.3. Відображення точок p - площини на z - площину

5. Дві точки p - площини на осі частот $j\omega$ з координатами $(\sigma = 0; \omega = \pm\pi/T)$ відображається в одну точку z - площини с координатами $(\xi = -1; \eta = 0)$ або з полярними координатами $(r = 1; \varphi = \pm\pi)$ (рис. 3.3)

$$z = e^{pT} = e^{0 \cdot T} e^{\pm j\frac{\pi}{T}T} = e^{\pm j\pi} = \cos(\pm\pi) + j \sin(\pm\pi) = -1.$$

б. Відрізок осі частот у $j\omega$ p - площини

$$\sigma = 0; -\frac{\pi}{T} < \omega \leq \frac{\pi}{T} = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_D$$

відображається на z - площині у коло одиничного радіуса (одиничне коло)

$$z = e^{pT} = e^{0T} e^{j\omega T} = e^{j\omega T} = e^{j\omega};$$
$$r = 1; -\pi < \omega \leq \pi = \Delta\omega = 2\pi.$$

Радіус-вектор виконує *один* повний оберт *проти* часової стрілки, починаючи з точки $z = e^{-j\pi} = -1$ (рис. 3.4), т. ч. кут φ на z - площині обмежено областю *головних значень* (3.18).

При русі точки с початковими координатами ($\sigma = 0; \omega = \pi/T$) вздовж осі $j\omega$ вверх частотний інтервал $k\omega_D = \frac{2\pi k}{T}$, $k = 1, 2, \dots$ відображається на z - площині в k співпадаючих одиничних кіл $z = e^{j\omega}$ (рис. 3.4):

$$\pi < \omega \leq (\pi + 2\pi k) = \Delta\omega = 2\pi k, k = 1, 2, \dots$$

При русі точки с початковими координатами ($\sigma = 0; \omega = -\pi/T$) вздовж осі $j\omega$ вниз частотний інтервал $k\omega_D = \frac{2\pi k}{T}$, $k = 1, 2, \dots$ відображається на z - площині в k співпадаючих одиничних кіл $z = e^{j\omega}$ (рис. 3.4):

$$-(\pi + 2\pi k) < \omega \leq -\pi = \Delta\omega = 2\pi k, k = 1, 2, \dots$$

Уявна ось $j\omega$ відображається в нечисленну безліч співпадаючих одиничних кіл, в наслідок чого виникає *неоднозначність* відображення точок p - площини на z - площину. Для їх взаємно *однозначного* відображення обмежуються частотним діапазоном (рис. 3.4)

$$-\frac{\pi}{T} < \omega \leq \frac{\pi}{T} = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_D$$

в результаті чого p - площина обмежується "коридором" між двома лініями, паралельними осі абсцис σ і що перетинають вісь ординат $j\omega$ в точках $\pm j\frac{\pi}{T}$

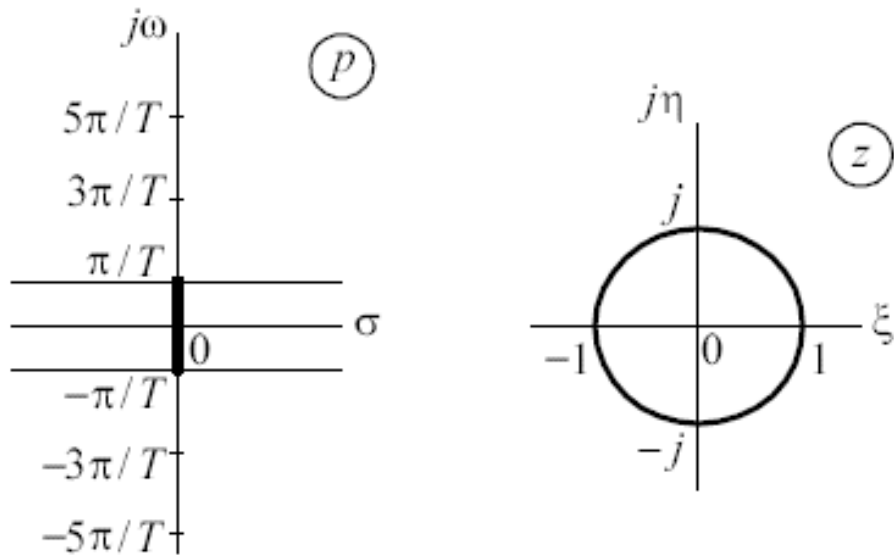


Рис. 3.4. Відповідність між p - і z - площинами при їх взаємно однозначному відображенню

7. "Коридор" в лівій p -на півплощині

$$\sigma \leq 0; -\frac{\pi}{T} < \omega \leq \frac{\pi}{T} = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_D$$

відображається на z - площині в коло одиничного радіуса (одиничне коло) (рис. 3.5):

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\omega};$$

$$r \leq 1; -\pi < \omega \leq \pi = \Delta\omega = 2\pi$$

Вся ліва p - напівплощина також відображається на z - площині в одиничне коло.

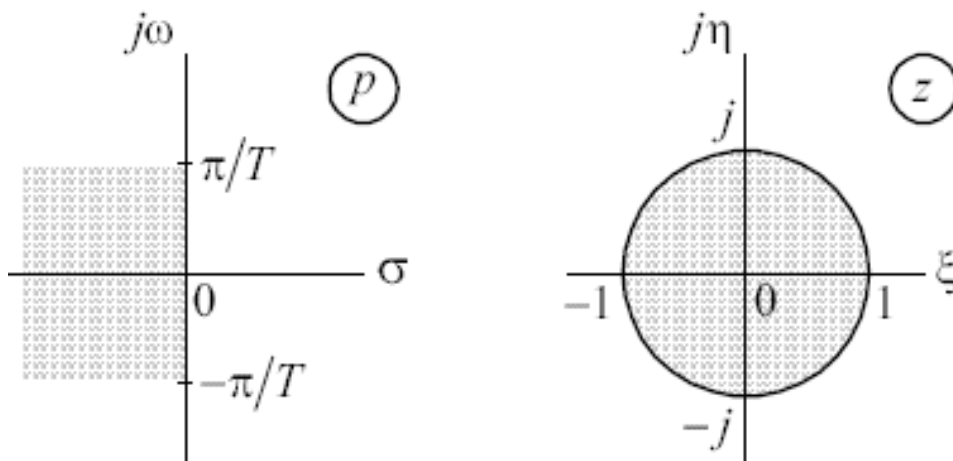


Рис. 3.5. Відображення "коридору" в лівій p - напівплощині на z площину

8. "Коридор" в правій p -на півплощині

$$\sigma \leq 0; -\frac{\pi}{T} < \omega \leq \frac{\pi}{T} = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_D$$

відображається на z - площині в область поза одиничного круга (рис. 3.6):

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\omega};$$

$$r > 1; -\pi < \omega \leq \pi = \Delta\omega = 2\pi.$$

Вся права p - напівплощина також відображається на z - площині в поза *одиничним* *кругом*.

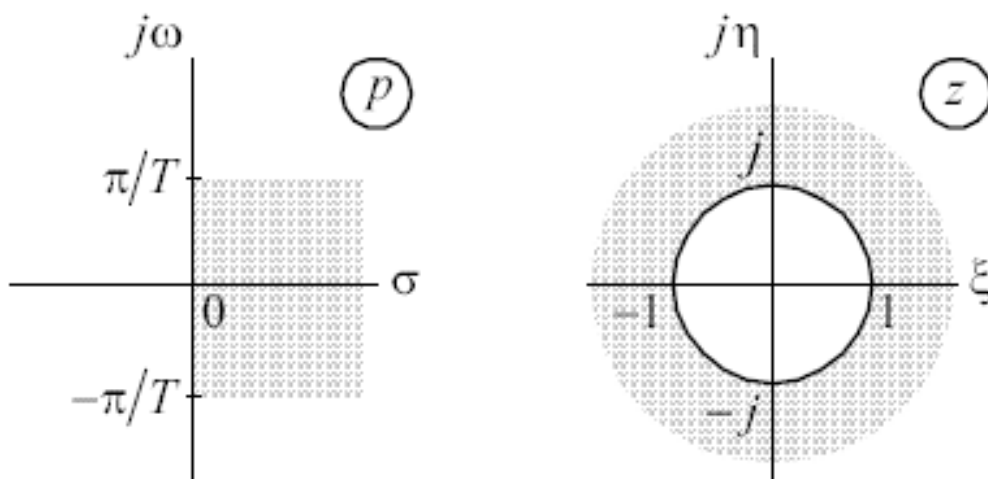


Рис. 3.6. Відображення "коридору" в правій p - напівплощині на z - площину

Таблиця 3.1 відображення p -полу площини на z - площини

№	p - площина $p = \sigma + j\omega$		z - площина $z = \xi + j\eta = re^{j\varphi}$			
	σ	ω	ξ	η	r	φ
1	0	0	1	0	1	0
2	$-\infty$	0	0	0	0	0
3	0	$\pi/2T$	0	1	1	$\pi/2$
4	0	$-\pi/2T$	0	-1	1	$-\pi/2$
5	0	$\pm\pi/T$	-1	0	1	$\pm\pi$
6	Відрізок уявної осі		Одиничне коло (один оберт)			
	0	$-\frac{\pi}{T} < \omega \leq \frac{\pi}{T}$	$r = 1$		$-\pi < \omega \leq \pi$	
7	Коридор в лівій p -на півплощині		Одиничний круг			
	$\sigma \leq 0$	$-\frac{\pi}{T} < \omega \leq \frac{\pi}{T}$	$r \leq 1$		$-\pi < \omega \leq \pi$	
8	Коридор в правій p -на півплощині		Область поза одиничного круга			
	$\sigma > 0$	$-\frac{\pi}{T} < \omega \leq \frac{\pi}{T}$	$r > 1$		$-\pi < \omega \leq \pi$	

3.4. Основні властивості Z-перетворення

1. Лінійність.

Якщо послідовність $x(nT)$ (3.2) дорівнює лінійній комбінації послідовностей

$$x(nT) = a_1x_1(nT) + a_2x_2(nT) + \dots,$$

то її z-зображенням дорівнює лінійній комбінації z-перетворень даних послідовностей:

$$Z\{x(nT)\} = X(z) = a_1X_1(z) + a_2X_2(z) + \dots$$

2. Z-перетворення затриманої послідовності (теорема про затримку).

Z-перетворення послідовності $x[(n-m)T]$, затриманої на m ($m > 0$) відліків дорівнює z-перетворенню незатриманої послідовності $x(nT)$ (3.2), помноженому на z^{-m}

$$\begin{aligned} Z\{x(nT)\} &= X(z); \\ Z\{x[(n-m)T]\} &= X(z)z^{-m} \end{aligned}$$

3. Z-перетворення згортки послідовностей (теорема про згортку).

Згортокою послідовностей $x_1(nT)$ и $x_2(nT)$ називають послідовність $x(nT)$, що визначається співвідношенням

$$x(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(mT)x_2[(n-m)T]$$

Z-перетворення згортки дорівнює добутку Z-перетворень послідовностей, що згортаються

$$Z\{x(nT)\} = X(z) = X_1(z)X_2(z).$$

3.5. Z-перетворення типових дискретних сигналів

$$X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{3.19}$$

1. Z-зображення цифрового одиничного імпульсу $u_0(n)$ (1.3)

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$Z\{u_0(n)\} = U_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_0(n)z^{-n} = u_0(0)z^{-0} = 1.$$

2. Z-зображення затриманого цифрового одиничного імпульсу $u_0(n-m)$ (1.4)

$$u_0(n-m) = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}$$

$$Z\{u_0(n-m)\} = U_0(z)z^{-m} = z^{-m}$$

3. Z-зображення цифрового одиничного стрибка $u(n)$ (1.6)

$$u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

$$Z\{u_1(n)\} = U_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_1(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \tag{3.20}$$

при $q = z^{-1}$.

В області абсолютного сходження ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} |q|^n < \infty,$$

Що відповідає

$$|q| < 1, \tag{3.21}$$

сума ряду (сума некінцевої геометричної прогресії, що спадає) має кінцеву межу, що дорівнює

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \tag{3.22}$$

Підставляємо $q = z^{-1}$ в (3.22), знаходимо z -зображення

$$U_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

і область его сходження (3.21)

$$|z^{-1}| < 1 = \frac{1}{|z|} < 1 = |z| > 1,$$

Що визначається радіусом сходження $R = 1$.

4. Z- зображення затриманого цифрового одиничного стрибка $u_1(n-m)$ (1.7)

$$u_1(n-m) = \begin{cases} 1, n \geq m \\ 0, n < m \end{cases}$$

На основі теореми про затримку маємо

$$Z\{u_1(n-m)\} = U_1(z)z^{-m} = \frac{z^{-m}}{1-z^{-1}}$$

5. Z- зображення дискретної експоненти, що спадає (1.8)

$$x(n) = \begin{cases} (\pm a)^n, n \geq 0, |a| < 1 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

Підставимо $x(n) = (\pm a)^n$ в (3.19), отримаємо ряд типу (3.20):

$$\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm a)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm az^{-1})^n$$

Підставимо $q = \pm az^{-1}$ в (3.22), знаходимо z-зображення

$$X(z) = \frac{1}{1 \mp az^{-1}} \quad (3.23)$$

і область його сходження(3.21)

$$|az^{-1}| < 1 = \frac{|a|}{|z|} < 1 = |z| > |a|, \quad (3.24)$$

що визначається радіусом сходження $R = |a|$

6. Z- зображення послідовності

$$x(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin\varphi_*}$$

Підставимо $x(n)$ в (3.19)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n \frac{\sin [(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*} = \frac{1}{\sin \varphi_*} \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n \sin [(n+1)\varphi_*] z^{-n}$$

й розкриємо $\sin [(n+1)\varphi_*]$ по формулі Ейлера

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{\sin \varphi_*} \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n \frac{e^{j(n+1)\varphi_*} - e^{-j(n+1)\varphi_*}}{2j} z^{-n} = \\ &= \frac{l}{2j \sin \varphi_*} \left[\sum_{n=0}^{\infty} r_*^n e^{j(n+1)\varphi_*} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n e^{-j(n+1)\varphi_*} z^{-n} \right] = \\ &= \frac{l}{2j \sin \varphi_*} \left[e^{j\varphi_*} \sum_{n=0}^{\infty} (r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})^n - e^{-j\varphi_*} \sum_{n=0}^{\infty} (r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})^n \right]. \end{aligned}$$

Кожна з сум являє собою ряд типу (3.20). Підставимо $q = r_* e^{j\varphi_*} z^{-1}$ и $q = r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1}$ в (3.22), знайдемо z -зображення

$$X(z) = \frac{l}{2j \sin \varphi_*} \left[\frac{e^{j\varphi_*}}{1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1}} - \frac{e^{-j\varphi_*}}{1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1}} \right]$$

і область його сходження (3.21)

$$|r_* e^{\pm j\varphi_*} z^{-1}| < 1 = \frac{r_*}{|z|} < 1 = |z| > r_*,$$

що визначається радіусом сходження $R = r_*$.

Приведемо до спільного знаменника дроби в квадратних дужках

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{l}{2j \sin \varphi_*} \left[\frac{e^{j\varphi_*} - r_* z^{-1} - e^{-j\varphi_*} + r_* z^{-1}}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})} \right] = \\ &= \frac{l}{2j \sin \varphi_*} \left[\frac{e^{j\varphi_*} - e^{-j\varphi_*}}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{\sin \varphi_*} \left[\frac{\sin \varphi_*}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})} \right] = \\ &= \frac{1}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Полюсами такої функції називають значення z , при яких її знаменник звертається в нуль. Помноживши чисельник і знаменник (3.25) на z^2 :

$$X(z) = \frac{z^2}{(z - r_* e^{j\varphi_*})(z - r_* e^{-j\varphi_*})} \quad (3.26)$$

знайдемо два комплексно-сполучених полюса — два корені знаменника

$$z_{*1,2} = r_* e^{\pm j\varphi_*}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1} - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1} + r_*^2 z^{-2}} = \frac{1}{1 - (r_* e^{-j\varphi_*} + e^{j\varphi_*}) z^{-1} + r_*^2 z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2r_* \cos \varphi_* z^{-1} + r_*^2 z^{-2}}$$

$$a_1 = -2r_* \cos \varphi_*;$$

$$a_2 = r_*^2,$$

$$X(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

Таблиця 3.2. Таблиця відповідностей

№	Послідовність	z -зображення
1	$u_0(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$	$U_0(z) = 1$
2	$u_0(n - m) = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}$	$z^{-m}U_0(z) = z^{-m}$
3	$u_1(n - m) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$	$U_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$
4	$u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$	$U_l(z)z^{-m} = \frac{z^{-m}}{1 - z^{-l}}$
5	$x(n) = (\pm a)^n$ $ a < 1$	$X(z) = \frac{1}{1 \mp az^{-1}}$
6	$x(n) = r_*^n \frac{n \sin [(n + 1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}$	$X(z) = \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$ де $a_1 = -2r_* \cos \varphi_*$, $a_2 = r_*^2$
7	$x(n) = r_*^n \sin (\varphi_*n)$	$X(z) = \frac{b_1z^{-1}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$ де $a_1 = -2r_* \cos \varphi_*$, $a_2 = r_*^2$, $b_1 = r_* \sin \varphi_*$
8	$x(n) = r_*^n \cos (\varphi_*n)$	$X(z) = \frac{1 + b_1z^{-1}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$ де $a_1 = -2r_* \cos \varphi_*$, $a_2 = r_*^2$, $b_1 = r_* \sin \varphi_*$

Приклад 3.1

Знайти z -зображення послідовності

$$x(n) = b_0(-a_1)^n + b_1(-a_1)^{n-1} \quad (3.27)$$

Розв'язок. Згідно властивості лінійності

$$X(z) = b_0Z\{(-a_1)^n\} + b_1Z\{(-a_1)^{n-1}\}.$$

На основі теореми про затримку

$$X(z) = b_0Z\{(-a_1)^n\} + b_1z^{-1}Z\{(-a_1)^n\}.$$

Використовуємо результати таблиці відповідностей (див. табл. 3.2, строку 5):

$$x(n) = (-a_1)^n = X(z) = \frac{1}{1 + a_1z^{-1}},$$

маємо

$$X(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}},$$

після приведення до спільного знаменника отримаємо z -зображення

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}. \quad (3.28)$$

Приклад 3.2

Знайти z -зображення послідовності

$$x(n) = b_0 r_*^n \frac{\sin [(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*} + b_1 r_*^{n-1} \frac{\sin (n\varphi_*)}{\sin \varphi_*} + b_2 r_*^{n-2} \frac{\sin [(n-1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}. \quad (3.29)$$

Розв'язок. Згідно властивості лінійності

$$X(z) = b_0 Z\left\{r_*^n \frac{\sin [(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}\right\} + b_1 Z\left\{r_*^{n-1} \frac{\sin (n\varphi_*)}{\sin \varphi_*}\right\} + b_2 Z\left\{r_*^{n-2} \frac{\sin [(n-1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}\right\}.$$

На основі теореми про затримку

$$X(z) = b_0 Z\left\{r_*^n \frac{\sin [(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}\right\} + b_1 z^{-1} Z\left\{r_*^n \frac{\sin [(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}\right\} + b_2 z^{-2} Z\left\{r_*^n \frac{\sin [(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}\right\}.$$

Використовуємо результати таблиці відповідностей (див. табл. 3.2, строку б):

$$x(n) = r_*^n \frac{\sin [(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*} = X(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

маємо

$$X(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} + \frac{b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

після приведення до спільного знаменника отримаємо z -зображення

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (3.30)$$

$$\text{де } a_1 = -2r_* \cos \varphi_*; a_2 = r_*^2,$$

3.6. Зворотне Z-перетворення

Послідовність (оригінал) $x(n)$ за відомим z -зображенням $X(z)$ знаходиться за допомогою зворотного Z -перетворення

$$Z^{-1}\{X(z)\} = x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} \quad (3.31)$$

Де:

$Z^{-1}\{X(z)\}$ – символічне позначення зворотного Z -перетворення;

C – будь-який замкнутий контур в області сходження підінтегральної функції, що охоплює всі її особливі точки (полюси) і початок координат комплексної z -площині.

Способи визначення зворотного Z -перетворення на основі:

- таблиці відповідностей;
- теореми Коші про відрахування;
- розкладання z -зображення на прості дроби.

3.6.1. Використання таблиці відповідностей

Приклад 3.3

Знайти послідовність (оригінал) $x(n)$ за відомим z -зображенням

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \quad (3.32)$$

Розв'язок. Чисельник $X(z)$ (3.32) – многочлен ненульового ступеня, тому його слід представити у вигляді суми дробів

$$X(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} = x(n) = a^n \quad (3.33)$$

Відповідно до властивості лінійності

$$\begin{aligned} x(n) &= Z^{-1}\left\{\frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}\right\} = \\ &= b_0 Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}\right\} + b_1 Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}\right\}. \end{aligned}$$

$$x(n) = b_0 a^n + b_1 a^{n-1}$$

Приклад 3.4

Знайти послідовність (оригінал) $x(n)$ за відомим z -зображенням

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (3.34)$$

Розв'язок. Чисельник $X(z)$ (3.34) – многочлен ненульового ступеня, тому його слід представити у вигляді суми дробів

$$X(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} + \frac{b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = x(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}. \quad (3.35)$$

Відповідно до властивості лінійності

Згідно властивості лінійності

$$\begin{aligned} X(z) &= Z^{-1}\left\{\frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}\right\} \\ &+ Z^{-1}\left\{\frac{b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}\right\} \\ &= b_0 Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}\right\} + b_1 Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}\right\} \\ &+ b_2 Z^{-1}\left\{\frac{z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}\right\}. \end{aligned}$$

$$+b_1 Z^{-1} \left\{ \frac{z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \right\} + b_2 Z^{-1} \left\{ \frac{z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \right\}.$$

$$x(n) = b_0 r_*^n \frac{\sin [(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*} + b_1 r_*^{n-1} \frac{\sin (n\varphi_*)}{\sin \varphi_*} + b_2 r_*^{n-2} \frac{\sin [(n-1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}.$$

3.6.2. Пряме обчислення інтеграла на основі теореми Коші про відрахування

$$x(n) = \sum_{k=1}^K \text{Res}_{\alpha_k} [X(z)z^{n-1}] \quad (3.36)$$

Де $\text{Res}_{\alpha_k} k(Z)z^{n-1}$ називається вирахуванням (Res - початкові букви французького слова *résidu*) - залишок підінтегральної функції в особливій точці - k-му полюсі $\alpha_k = z_{*k}$.

Якщо дрібно-раціональна функція $X(z)$ має прості (не кратні, тобто не рівні між собою) полюси, то відрахування в простому k-му полюсі дорівнює

$$\text{Res}_{\alpha_k} [X(z)z^{n-1}] = \lim_{z \rightarrow \alpha_k} [(z - \alpha_k)X(z)z^{n-1}]. \quad (3.37)$$

Приклад 3.5

Знайти послідовність (оригінал) $x(n)$ за відомим z-зображенням

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

Розв'язок. Z-зображення $X(z)$ являє собою дрібно-раціональну функцію першого порядку, що має тільки один полюс a_1 . Помноживши чисельник і знаменник $X(z)$ на z :

$$X(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z + a_1},$$

знаходимо цей полюс (корінь знаменника):

$$\alpha_1 = -a_1.$$

Отже, в сумі (3.36) маємо один доданок - одне відрахування (3.37) і послідовність має вигляд

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{Res}_{\alpha_1} [X(z)z^{n-1}] = \lim_{z \rightarrow -a_1} [(z + a_1) \left(\frac{b_0 z + b_1}{z + a_1} \right) z^{n-1}] = \\ &= \lim_{z \rightarrow -a_1} (b_0 z^n + b_1 z^{n-1}) = b_0 (-a_1)^n + b_1 (-a_1)^{n-1} \end{aligned}$$

Це збігається з результатом, отриманим іншим способом в прикладі 3.3.

Приклад 3.6

Знайти послідовність (оригінал) $x(n)$ за відомим z -зображенням

$$X(z) = \frac{1}{1-0,5z^{-1}+0,06z^{-2}}. \quad (3.38)$$

Розв'язок. Z - зображення $X(z)$ являє собою дрібно-раціональну функцію другого порядку, що має два простих дійсних полюса $a_1 = 0,2$ і $a_2 = 0,3$, які легко знаходяться по теоремі Вієта

Отже, в сумі (3.36) маємо два доданки - два вирахування (3.37). Відрахування в полюсі $a_1 = 0,2$ дорівнює

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\alpha_1} [X(z)z^{n-1}] &= \lim_{z \rightarrow 0,2} [(z - 0,2) \left(\frac{z^2}{(z - 0,2)(z - 0,3)} \right) z^{n-1}] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0,2} \left[\left(\frac{z^2}{z - 0,3} \right) z^{n-1} \right] = \left(\frac{0,2^2}{-0,1} \right) 0,2^{n-1} = \left(\frac{0,2}{-0,1} \right) 0,2 \cdot 0,2^{n-1} = -2 \cdot 0,2^n \end{aligned}$$

Відрахування в полюсі $a_2 = 0,3$ р дорівнює

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\alpha_2} [X(z)z^{n-1}] &= \lim_{z \rightarrow 0,3} [(z - 0,3) \left(\frac{z^2}{(z - 0,2)(z - 0,3)} \right) z^{n-1}] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0,3} \left[\left(\frac{z^2}{z - 0,2} \right) z^{n-1} \right] = \left(\frac{0,3^2}{0,1} \right) 0,3^{n-1} = \left(\frac{0,3}{0,1} \right) 0,3 \cdot 0,3^{n-1} = 3 \cdot 0,3^n \end{aligned}$$

Згідно (3.36) послідовність дорівнює сумі

$$x(n) = -2 \cdot 0,2^n + 3 \cdot 0,3^n$$

При наявності у дрібно-раціональній функції $X(z)$ кратних полюсів відрахування в полюсі a_k кратності l_k в (3.36) визначається за формулою

$$\operatorname{Res}_{\alpha_k} [X(z)z^{n-1}] = \frac{1}{(l_k - 1)!} \lim_{z \rightarrow \alpha_k} \frac{d^{l_k-1}}{dz^{l_k-1}} [z - \alpha_k]^{l_k} X(z)z^{n-1}$$

Приклад 3.7

Знайти послідовність (оригінал) $x(n)$ за відомим z -зображенням

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}+0,25z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{(1-0,5z^{-1})^2}.$$

Розв'язок. Z - зображення $X(z)$ являє собою дрібно-раціональну функцію другого порядку, що має матеріальний полюс $a_1 = -0,5$ кратності $l_1 = 2$ (тобто два однакових полюси). Тому сума (3.36) містить одне відрахування і послідовність має вигляд:

$$x(n) = \operatorname{Res}_{\alpha_1} [X(z)z^{n-1}] = \frac{1}{(l_1 - 1)!} \lim_{z \rightarrow \alpha_1} \frac{d^{l_1-1}}{dz^{l_1-1}} [(z - \alpha_1)^{l_1} X(z)z^{n-1}] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0,5} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} [(z-0,5)^2 X(z) z^{n-1}] = \\
&= \lim_{z \rightarrow 0,5} \frac{d}{dz} [(z-0,5)^2 \frac{z^{-1}}{(1-0,5z^{-1})^2} z^{n-1}] = \\
&= \lim_{z \rightarrow 0,5} \frac{d}{dz} [(z-0,5)^2 \frac{z}{(z-0,5)^2} z^{n-1}] = \\
&= \lim_{z \rightarrow 0,5} \frac{d}{dz} [z^n] = \lim_{z \rightarrow 0,5} [nz^n] = n \cdot 0,5^n
\end{aligned}$$

3.6.3. Розкладання z-зображення на прості дроби

$$X(z) = \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right) \quad (3.39)$$

де:

$\alpha_k = z_{*k}$ – простий k -й полюс (дійсне або комплексне число)

A_k - коефіцієнт розкладання при k -му полюсі (константа A_k - завжди число того ж типу, що й полюс α_k);

$(M-1)$ - кількість полюсів α_k (і констант A_k).

$$x(n) = Z^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right) \right\} = \sum_{k=1}^{M-1} A_k Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right\},$$

$$x(n) = \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k^n \quad (3.40)$$

Приклад 3.8

Знайти послідовність (оригінал) $x(n)$ за відомим z -зображенням

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1} + 0,06z^{-2}} \quad (3.41)$$

Розв'язок. При відомих простих полюсах $a_1 = 0,2$ і $a_2 = 0,3$ (див. приклад 3.6) представлення $X(z)$ у вигляді суми простих дроби (3.39) має вигляд

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - 0,2z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - 0,3z^{-1}} \quad (3.42)$$

де A_1 і A_2 коефіцієнти розкладання при полюсах (дійсні числа).

$$\frac{1}{1 - 0,5z^{-1} + 0,06z^{-2}} = \frac{A_1}{1 - 0,2z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - 0,3z^{-1}} \quad (3.43)$$

:

$$\frac{1}{(1 - 0,2z^{-1})(1 - 0,3z^{-1})} = \frac{(A_1 + A_2) - (0,3A_1 + 0,2A_2)z^{-1}}{(1 - 0,2z^{-1})(1 - 0,3z^{-1})}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ 0,3A_1 + 0,2A_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = -2 \\ A_2 = 3 \end{cases}$$

$$X(z) = \frac{-2}{1 - 0,2z^{-1}} + \frac{3}{1 - 0,3z^{-1}}$$

$$x(n) = -2 \cdot 0,2^n + 3 \cdot 0,3^n$$

$$(N - 1) = (M - 1),$$

$$(z) = A_0 + \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right) \quad (3.44)$$

де A_0 – дійсна константа.

$$x(n) = A_0 u_0(n) + \sum_{k=1}^{M-1} A_k a_k^n \quad (3.45)$$