

3. Z-перетворення

При вивченні аналогових сигналів і лінійних аналогових кіл введення перетворення Лапласа виявилось дуже корисним. На його основі визначаються такі фундаментальні поняття, як передавальна функція, частотні характеристики, стійкість кіл і т.ін. У цифровій обробці сигналів подібним перетворенням є z-перетворення, яке дозволяє спростити багато формул, визначити основні фундаментальні поняття й виявляється наочною й зручною формою подання процесів, що протікають при цифровій обробці.

3.1. Співвідношення між p - і z -площинами

Раніше (див. розділ 2) було визначено пряме z -перетворення

$$F(z) = Z\{f(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}, \quad (3.1)$$

де $f(nT)$ – числова послідовність (дискретний сигнал);

n – номер відліку,

T – період дискретизації.

При цьому дискретний сигнал $f(nT)$ називається *оригіналом*, а функція $F(z)$ – *зображенням*.

Аргумент z функції $F(z)$ є комплексною величиною, тобто

$$z = \xi + j\eta, \quad (3.2)$$

або в полярних координатах

$$z = re^{j\theta} \quad (3.3)$$

де

$$r = |z| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \theta = \arg(z) = \arctg\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$$

Досить часто аргумент z називають оператором, а співвідношення (3.1) – операторним зображенням числової послідовності.

Функція $F(z)$ визначена тільки для значень z , при яких ряд (3.1) збігається. Умова збіжності ряду (3.1) визначається співвідношенням

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| f(nT) z^{-n} \right| < \infty.$$

Відомо, що модуль добутку дорівнює добутку модулів, тому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| f(nT) z^{-n} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| f(nT) \right| \cdot \left| z^{-n} \right|.$$

Винесемо нульовий член з-під знака суми

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| f(nT) \right| \cdot \left| z^{-n} \right| = \left| f(0) \right| \cdot \left| z^{-0} \right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| f(nT) \right| \cdot \left| z^{-n} \right| = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left| f(nT) \right| \cdot \left| z^{-n} \right|$$

Значення $\left| z^{-n} \right|$, з урахуванням співвідношення (3.3), дорівнює r^{-n} :

$$\left| z^{-n} \right| = \left| \left(r e^{j\theta} \right)^{-n} \right| = \left| r^{-n} (e^{j\theta})^{-n} \right| = r^{-n}.$$

Дві останніх рівності дозволяють зобразити умову збіжності ряду (3.1) у вигляді:

$$f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| f(nT) \right|^{\frac{1}{n}} r^{-1} \right)^n < \infty.$$

Значення будь-якого відліку, у тому числі й $f(0)$, завжди кінцеве (див. розд. 2), тому збіжність визначається співвідношенням:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| f(nT) \right|^{\frac{1}{n}} r^{-1} \right) < \infty$$

Отриманий ряд збігається, якщо

$$\left| z \right| > R \tag{3.4}$$

де R — верхня межа послідовності

$$\left| f(nT) \right|^{\frac{1}{n}},$$

$n=1,2,3,\dots$

Наприклад, якщо $f(nT) = a^n$ (цифрова експонента), то ряд збігається поза колом з радіусом $R = a$.

Область z -площини, де забезпечується виконання умови (3.4), називається областю збіжності, а значення R – радіусом збіжності. Область збіжності ряду (3.1) зображена на рис. 3.1.



Рис. 3.1. Область збіжності z -перетворення

Z -перетворення, що описує дискретний сигнал (числову послідовність) в z -площині, визначається на підставі перетворення Лапласа, що описує аналоговий сигнал у p -площині. Аналіз співвідношення між p - і z -площинами дозволяє виявити умови коректного застосування z -перетворення, а також сформулювати вимоги до аналогових сигналів, що обробляються засобами ЦОС.

Взаємозв'язок між p - і z -площинами визначається співвідношенням (див. розділ 2)

$$z = e^{pT}. \quad (3.5)$$

Аргумент p є комплексною величиною, тобто:

$$p = \sigma + j\Omega.$$

Тому вираз (3.5) можна записати як

$$\xi + j\eta = e^{\sigma T + j\Omega T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}. \quad (3.6)$$

З (3.6), із урахуванням формули Ейлера, випливає, що:

$$\xi = e^{\sigma T} \cos(\Omega T + 2\pi k). \quad (3.7)$$

$$\eta = e^{\sigma T} \sin(\Omega T + 2\pi k). \quad (3.8)$$

де $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Отже, (3.3) набуде вигляду

$$z = e^{\sigma T} e^{j(\Omega T + 2\pi k)}. \quad (3.9)$$

На підставі (3.9) розглянемо співвідношення між деякими характерними точками p - і z -площин:

1. точка p -площини з координатами $\sigma = 0; \Omega = 0$ відображається в точку z -площини з координатами $\xi = 1, \eta = 0$:

$$z = e^0 e^{j(0+2\pi k)} = e^{j2\pi k} = 1;$$

2. точка p -площини з координатами $\sigma = 0; \Omega = \pi/2T$ відображається в точку z -площини з координатами $\xi = 0; \eta = 1$:

$$z = e^0 e^{j(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = e^{j(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = j;$$

3. точка p -площини з координатами $\sigma = 0$ й $\Omega = -\pi/2T$ відображається в точку z -площини з координатами $\xi = 0$ й $\eta = -1$:

$$z = e^0 e^{j(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = e^{j(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = -j;$$

4. точка p -площини з координатами $\sigma = 0$ й $\Omega = \pm \pi/T$ відображається в точку z -площини з координатами $\xi = -1$ й $\eta = 0$:

$$z = e^0 e^{j(\pm \pi + 2\pi k)} = -1.$$

Розглянуті точки p -площини лежать на уявній осі ($\sigma = 0$) в інтервалі $[\Omega - \pi/T, \Omega + \pi/T]$. Їм відповідають точки z -площини

$$z = e^{j(\Omega T + 2\pi k)}. \quad (3.10)$$

Вираз (3.10) описує коло одиничного радіуса. При цьому інтервалу $[\Omega - \pi/T, \Omega + \pi/T]$ на уявній осі p -площини відповідає один повний оберт в z -площині;

5. точки лівої p -напівплощини ($\sigma < 0$) відображаються всередину кола одиничного радіуса z -площини, тому що:

$$|z| = e^{-\sigma T} < 1;$$

6. центру кола на z -площині ($z=0$) відповідає точка p -площини з координатами $\sigma = -\infty$ й $\Omega = 0$:

$$z = e^{-\infty} e^{j(\Omega T + 2\pi k)} = \frac{e^{j(\Omega T + 2\pi k)}}{e^{\infty}} = 0;$$

7. точки правої p -напівплощини ($\sigma > 0$) відображаються на z -площині поза одиничним колом, тому що:

$$|z| = e^{\sigma T} > 1.$$

Очевидно, що взаємно однозначне відображення p - і z -площин можливо тільки для смуги p -площини, що міститься між лініями, паралельними осі абсцис і перетинаючими вісь ординат у точках $\pm j\pi k/T$, де $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Співвідношення між деякими характерними точками p - і z -площин наведені в табл. 3.1 і зображені на рис. 3.2.

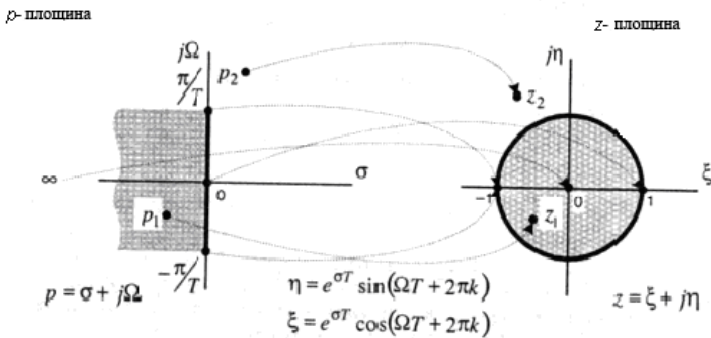


Рис. 3.2. Співвідношення між z - і p -площинами

Таблиця 3.1

Співвідношення між z - і p -площинами

	p -площина	z -площина
1	$\sigma = 0 ; \Omega = 0$	$\xi = 1, \eta = 0 ; (z=1)$
2	$\sigma = 0 ; \Omega = \pi/2T$	$\xi = 0 ; \eta = 1 ; (z=j)$
3	$\sigma = 0 ; \Omega = -\pi/2T$	$\xi = 0 ; \eta = 1 ; (z=-j)$
4	$\sigma = 0 ; \Omega = \pm \pi/T$	$\xi = -1 ; \eta = 0 ; (z=-1)$
5	$\sigma = -\infty ; \Omega = 0$	$\xi = 0 ; \eta = 0 ; (z=0)$
6	Уявна вісь $\left(-\frac{\pi}{T} \leq \Omega \leq \frac{\pi}{T} \right)$	Одиничне коло $ z = 1$ (один оберт)
7	Ліва напівплощина (у межах смуги $\pm j\pi/T$)	Внутрішня частина кола $ z \leq 1$ (взаємно однозначна відповідність)
8	Права напівплощина (у межах смуги $\pm j\pi/T$)	Площина поза одиничним колом $ z > 1$ (взаємно однозначна відповідність)

3.2. Основні властивості z -перетворення

Формула (3.1) встановлює співвідношення між часовим й операторним зображенням числової послідовності. Якщо умова збіжності виконується, співвідношення (3.1) є єдиним і взаємно однозначним. Розглянемо властивості цього перетворення, які найчастіше використовуються.

1. Властивість лінійності.

Задано деяку числову послідовність $f(nT)$, що являє собою суму зважених числових послідовностей $f_i(nT)$:

$$f(nT) = \sum_i a_i f_i(nT). \quad (3.11)$$

де a_i — ваговий коефіцієнт.

Якщо для всіх $f_i(nT)$ відомі z -зображення:

$$F_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_i(nT) z^{-n}.$$

тоді для послідовності $f(nT)$ z -зображення визначається формулою:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} = \sum_i a_i F_i(z). \quad (3.12)$$

Ця властивість впливає безпосередньо із самого визначення z -перетворення. Так, підставивши у вираз (3.1) замість функції $f(nT)$ її зображення (3.11) і помінявши порядок сумування, одержимо:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_i a_i f_i(nT) \right) z^{-n} = \sum_i \left(a_i \sum_{n=0}^{\infty} f_i(nT) z^{-n} \right) = \sum_i a_i F_i(z).$$

2. Z -перетворення затриманої числової послідовності (теорема запізнення).

Задано числову послідовність $f(nT) = 0$ при $n < 0$, і для неї відоме зображення $F(z)$. Тоді для затриманої числової послідовності

$f((n - n_0)T)$, де n_0 — додатна ціла константа, z -зображення визначається формулою:

$$F_3(z) = z^{-n_0} F(z). \quad (3.13)$$

У цьому неважко переконатися, застосувавши заміну змінної у виразі для прямого z -перетворення:

$$\begin{aligned} F_3(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f((n - n_0)T) z^{-n} \Big|_{n - n_0 = k} = \\ &= \sum_{k=-n_0}^{\infty} f(kT) z^{-n_0} z^{-k} = z^{-n_0} \sum_{k=-n_0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = \\ &= z^{-n_0} \left(\sum_{k=-n_0}^{-1} f(kT) z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \right). \end{aligned}$$

Враховуючи, що $f(kT) = 0$ при $k < 0$, остаточно одержуємо:

$$F_3(z) = z^{-n_0} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = z^{-n_0} F(z).$$

Таким чином, затримка n_0 тактів у часовій області еквівалентна множенню z -зображення на константу z^{-n_0} .

Зауваження

Для випереджаючої числової послідовності $f((n + n_0)T)$, де n_0 — додатна ціла константа, z -зображення визначається співвідношенням:

$$F_0(z) = z^{n_0} \left(F(z) - \sum_{k=0}^{n_0-1} f(kT) z^{-k} \right). \quad (3.14)$$

Це легко довести:

$$\begin{aligned}
F_0(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f((n-n_0)T)z^{-n} \Big|_{n-n_0=k} = \\
&= \sum_{k=n_0}^{\infty} f(kT)z^{n_0}z^{-k} = z^{n_0} \sum_{k=n_0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \\
&= z^{n_0} \left(\sum_{k=n_0}^{\infty} f(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n_0-1} f(kT)z^{-k} \right) = z^{n_0} \left(F(z) - \sum_{k=0}^{n_0-1} f(kT)z^{-k} \right).
\end{aligned}$$

Зокрема, при $n_0=1$

$$F_0(z) = z^{n_0} \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} f(kT)z^{-k} - f(0) \right). \quad (3.15)$$

3. *Z-перетворення згортки числових послідовностей.*

Згорткою числових послідовностей $f_1(nT)$ і $f_2(nT)$ називається співвідношення

$$f_c(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} f_1(mT)f_2((n-m)T). \quad (3.16)$$

Z-зображення згортки визначається формулою

$$F_c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_c(nT)z^{-n} = F_1(z)F_2(z). \quad (3.17)$$

де $F_1(z)$ і $F_2(z)$ – z-зображення послідовностей $f_1(nT)$ і $f_2(nT)$ відповідно.

Справедливість даної властивості можна довести в такий спосіб:

$$\begin{aligned}
F_c(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_c(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} f_1(mT)f_2((n-m)T) \right] z^{-n} = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} f_1(mT) \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_2((n-m)T)z^{-n} \right] =
\end{aligned}$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{\infty} f_1(mT) z^{-m} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_2(nT) z^{-n} \right] = F_1(z) F_2(z).$$

4. *Z-перетворення числової послідовності, помноженої на експоненту.*

Задано дискретний сигнал, що являє собою помножену на експоненту числову послідовність:

$$f_E(nT) = f(nT) a^n,$$

де a – додатне число.

Якщо для числової послідовності $f(nT)$ відоме z -зображення

$$F(z) = Z\{f(nT)\},$$

то для послідовності $f_E(nT)$ z -зображення буде визначатися за формулою:

$$F_E(z) = F\left(\frac{z}{a}\right). \quad (3.18)$$

Доведемо справедливість (3.18), скориставшись визначенням Z -перетворення:

$$\begin{aligned} F_E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{\text{экс}}(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} [f(nT) a^n] z^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) [a^n z^{-n}] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \left[\frac{z}{a}\right]^{-n} = F\left(\frac{z}{a}\right). \end{aligned}$$

Розглянуті властивості дозволяють досить просто знаходити зображення для більшості числових послідовностей, що зустрічаються на практиці. Покажемо це на прикладах.

Приклади розв'язування завдань.

При розв'язуванні завдань будемо розглядати числові послідовності як функції тільки параметра n (див. розд. 1). У цьому випадку z -перетворення визначається співвідношенням

$$F(z) = Z\{f(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}. \quad (3.19)$$

Приклад 3.1

Визначити z -зображення цифрового одиничного імпульсу (Рис. 1.2, а)

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases},$$

де $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Розв'язок

Скористаємося визначенням z -перетворення:

$$Z\{u_0(n)\} = U_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_0(n)z^{-n} = u_0(0)z^{-0} = 1.$$

Приклад 3.2

Визначити z -зображення затриманого цифрового одиничного імпульсу (Рис. 1.2, б)

$$u_0(n - n_0) = \begin{cases} 1, n = n_0 \\ 0, n \neq n_0 \end{cases},$$

де $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Розв'язок

На підставі теореми запізнення можемо записати:

$$Z\{u_0(n - n_0)\} = Z\{u_0(n)\}z^{-n_0} = 1z^{-n_0} = z^{-n_0}.$$

Приклад 3.3

Визначити z -зображення для цифрового одиничного стрибка (Рис. 1.3, а)

$$u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases},$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Розв'язок

Відповідно до визначення z -перетворення, можемо записати:

$$Z\{u_1(n)\} = U_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_1(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n.$$

Цей ряд є сумою членів нескінченної геометричної прогресії. Ряд збігається, якщо $|z| > 1$. У цьому випадку маємо кінцеву суму

$$S = \frac{a_1}{1 - q},$$

де $a_1 = 1, q = z^{-1}$

Таким чином, остаточно одержуємо:

$$Z\{u_1(n)\} = U_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

Приклад 3.4

Визначити z -зображення затриманого цифрового одиничного стрибка (Рис. 1.3, б)

$$u_1(n - n_0) = \begin{cases} 1, n \geq n_0 \\ 0, n < n_0 \end{cases},$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Розв'язок

Використовуючи теорему про зрушення й результат попереднього прикладу, можемо записати:

$$Z\{u_1(n - n_0)\} = z^{-n_0} U_1(z) = \frac{z^{-r_0}}{1 - z^{-1}}.$$

Приклад 3.5

Визначити z -зображення знакосталої спадної дискретної експоненти (Рис. 1.4, а)

$$x(n) = \begin{cases} a^n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases},$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Розв'язок

Підставимо вираз для $x(n)$ у формулу для z -перетворення:

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n.$$

Отриманий вираз являє собою суму членів ряду нескінченної геометричної прогресії. Ряд збігається за умови $|az^{-1}| < 1$, а його сума визначається за формулою:

$$S = \frac{a_1}{1 - q},$$

де $a_1 = 1, q = az^{-1}$

Таким чином,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

Приклад 3.6

Визначити z -зображення знакозмінної спадаючої дискретної експоненти (Рис. 1.4, в)

$$x(n) = \begin{cases} (-a)^n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases},$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Розв'язок

Цей приклад розв'язується аналогічно з попереднім. Необхідно тільки уважно ставитися до знака константи a

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-a)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-az^{-1})^n.$$

Одержали суму членів ряду нескінченної геометричної прогресії, яка збігається за умови $|-az^{-1}| < 1$, тобто:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-az^{-1})^n = \frac{1}{1+az^{-1}}.$$

Приклад 3.7

Визначити z -зображення числової послідовності

$$x(n) = b_0(-a)^n + b_1(-a)^{n-1},$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Розв'язок

Скористаємося властивостями лінійності й теоремою запізнення:

$$\begin{aligned} X(z) &= \underbrace{b_0 Z\{(-a)^n\} + b_1 Z\{(-a)^{n-1}\}}_{\text{лінійність}} = b_0 Z\{(-a)^n\} + \underbrace{b_1 z^{-1} Z\{(-a)^n\}}_{\text{запізнення}} = \\ &= Z\{(-a)^n\} (b_0 + b_1 z^{-1}) \end{aligned}$$

Формулу для послідовності $(-a)^n$ отримано в попередньому прикладі, тому остаточно z -зображення набуде вигляду

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + az^{-1}}.$$

Отримані в прикладах 1–7 вирази для оригіналів і їхніх зображень зведені в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Таблиця відповідностей

	Послідовність $x(n)$	z -зображення
1.	$u_0(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$	1
2.	$u_0(n - n_0) = \begin{cases} 1, n = n_0 \\ 0, n \neq n_0 \end{cases}$	z^{-n_0}
3.	$u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
4.	$u_1(n - n_0) = \begin{cases} 1, n \geq n_0 \\ 0, n < n_0 \end{cases}$	$\frac{z^{-n_0}}{1 - z^{-1}}$
5.	$\pm a^n$	$\frac{1}{1 \pm az^{-1}}$
6.	$r^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}$	$\frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}; a_1 \leq 2r$ $a_1 = -2r \cos \varphi_*, a_2 = r^2$
7.	$r^n \sin(\varphi_* n)$	$\frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$ $a_1 = -2r \cos \varphi_*,$ $a_2 = r^2; a_1 \leq 2r; b_1 = r \sin \varphi_*$
8.	$r^n \cos(\varphi_* n)$	$\frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$ $a_1 = -2r \cos \varphi_*,$ $a_2 = r^2; a_1 \leq 2r; b_1 = -r \cos \varphi_*$

3.3. Обернене z-перетворення

Завдання відновлення оригіналу за відомим зображенням розв'язується за допомогою *оберненого z-перетворення*:

$$f(nT) = Z^{-1}\{F(z)\} = F^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz, \quad (3.20)$$

де C – контур збіжності $F(z)z^{n-1}$, що охоплює початок координат z -площини.

Безпосередньо розв'язати такий інтеграл досить складно, а в більшості випадків неможливо. Тому розглянемо три простих способи знаходження оберненого z -перетворення:

1. Із використанням таблиці відповідностей.
2. На підставі теореми Коші про відліки.
3. Шляхом розкладання зображення на прості дроби.

3.3.1. Використання таблиці відповідностей

Обчислити обернене z -перетворення з використанням таблиці відповідностей дуже просто. Необхідно в довіднику, що містить таблиці оригіналів і відповідних їм зображень, знайти оригінал для заданого зображення. Основний недолік способу полягає в тому, що далеко не всі зображення наведені в довіднику.

Приклад 3.8

Визначити оригінал $x(n)$, якщо відоме z -зображення:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}.$$

Розв'язок

Розіб'ємо вираз на суму двох дробів:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}.$$

З огляду на властивість лінійності, оригінал $x(n)$ зображення $X(z)$ можна визначити за формулою

$$x(n) = b_0 x_1(n) + b_1 x_2(n),$$

де $x_1(n)$ — оригінал зображення

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}.$$

$x_2(n)$ — оригінал зображення

$$X_2(z) = \frac{z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}.$$

Скориставшись таблицею відповідностей (див. табл. 3.2), знаходимо оригінал зображення $X_1(z)$:

$$x_1(n) = a_1^n.$$

На підставі теореми запізнення, оригінал зображення $X_2(z)$ визначається формулою:

$$x_2(n) = a_1^{n-1}.$$

Таким чином, шуканий оригінал $x(n)$ має вигляд:

$$x(n) = b_0 a_1^n + b_1 a_1^{n-1}.$$

3.3.2. Використання теореми про відліки

Обчислення оберненого z -перетворення з використанням відліків базується на теоремі Коші. Причому відлік в k -му полюсі зображення $F(z)$ називається

$$\text{Res}_{z_{*k}} [F(z)z^{n-1}] = \lim_{z \rightarrow z_{*k}} [(z - z_{*k})F(z)z^{n-1}].$$

Нагадаємо, що полюс — це значення аргументу, при якому функція дорівнює нескінченності.

Суть теореми Коші про відліки полягає в тому, що якщо відомо зображення $F(z)$ і його N полюсів z_* , інтеграл (3.20) дорівнює сумі відліків у всіх особливих точках (полюсах z_*):

$$f(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\text{Res}_{z_{*k}} [F(z)z^{n-1}]}_{\text{відлік в } k\text{-ом полюсі } z_{*k} = a_k}. \quad (3.21)$$

Приклад 3.9

Задано z -зображення

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}.$$

Необхідно знайти оригінал $x(n)$.

Розв'язок

Задане зображення $X(z)$ має тільки один полюс $\alpha = a_1$, тому необхідно обчислити тільки один відлік:

$$\begin{aligned} x(n) &= \operatorname{Res}_{z=a_1} [F(z)z^{n-1}] = \lim_{z \rightarrow a_1} \left[(z - a_1) \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} z^{n-1} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow a_1} \left[(z - a_1) \frac{(b_0 + b_1 z^{-1})z}{(z - a_1)} z^{n-1} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow a_1} [b_0 z z^{n-1} + b_1 z^{-1} z z^{n-1}] = b_0 a_1^n + b_1 a_1^{n-1}. \end{aligned}$$

3.3.3. Використання розкладання на прості дробі

Відомо N полюсів зображення $F(z)$. Тоді можна подати $F(z)$ у вигляді суми простих дробів:

$$F(z) = \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}, \quad (3.22)$$

де β_k, α_k — коефіцієнти розкладання при k -му полюсі.

Якщо полюс дійсний, то й коефіцієнти розкладання дійсні; якщо полюс комплексний — коефіцієнти комплексні.

За властивістю лінійності оригінал $f(n)$ зображення $F(z)$ визначається за формулою:

$$f(n) = F^{-1}(z) = \sum_{k=1}^N \beta_k F_k^{-1}(z),$$

$$\text{де } F_k^{-1}(z) = Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right\}.$$

Остаточно, використовуючи таблицю відповідностей, одержимо:

$$f(n) = \sum_{k=1}^N \beta_k \alpha_k^n. \quad (3.23)$$

Таким чином, якщо z -зображення має вигляд (3.22) або може бути зведене до такого вигляду, то оригінал для нього визначається співвідношенням (3.23). Це і є суть методу знаходження оригіналу за допомогою розкладання на прості дроби.

Приклад 3.10

Визначити оригінал $x(n)$ якщо відомо зображення

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1} + 0,06z^{-2}}.$$

Розв'язок

Розкладемо z -зображення на суму простих дробів. Для цього зобразимо знаменник у вигляді співмножників першого ступеня:

$$\begin{aligned} 1 - 0,5z^{-1} + 0,06z^{-2} &= 1 - 0,2z^{-1} - 0,3z^{-1} + 0,06z^{-2} = \\ &= (1 - 0,2z^{-1}) - 0,3z^{-1}(1 - 0,2z^{-1}) = (1 - 0,3z^{-1})(1 - 0,2z^{-1}). \end{aligned}$$

Тоді задане z -зображення послідовності $x(n)$ можна записати у вигляді

$$X(z) = \frac{1}{(1 - 0,2z^{-1})(1 - 0,3z^{-1})}.$$

При цьому маємо два полюси:

$$\alpha_1 = 0,2; \alpha_2 = 0,3.$$

Розкладемо зображення на прості дроби й наведемо його у вигляді суми:

$$X(z) = \frac{\beta_1}{1 - 0,2z^{-1}} + \frac{\beta_2}{1 - 0,3z^{-1}},$$

де β_1 та β_2 – коефіцієнти розкладання.

Коефіцієнти розкладання β_1 та β_2 одержимо з умови рівності дробів

$$\frac{1}{(1-0,2z^{-1})(1-0,3z^{-1})} = \frac{\beta_1}{1-0,2z^{-1}} + \frac{\beta_2}{1-0,3z^{-1}}.$$

У правій частині останньої рівності зведемо суму двох простих дробів до загального знаменника:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1}{1-0,2z^{-1}} + \frac{\beta_2}{1-0,3z^{-1}} &= \frac{\beta_1 - 0,3\beta_1 z^{-1} + \beta_2 - 0,2\beta_2 z^{-1}}{(1-0,2z^{-1})(1-0,3z^{-1})} = \\ &= \frac{(\beta_1 + \beta_2) - (0,3\beta_1 + 0,2\beta_2)z^{-1}}{(1-0,2z^{-1})(1-0,3z^{-1})}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{1}{(1-0,2z^{-1})(1-0,3z^{-1})} = \frac{(\beta_1 + \beta_2) - (0,3\beta_1 + 0,2\beta_2)z^{-1}}{(1-0,2z^{-1})(1-0,3z^{-1})}.$$

Дроби рівні, якщо рівні їхні чисельники й знаменники. У нашому випадку рівність знаменників очевидно. Прирівнявши чисельники, отримаємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладання β_1 та β_2 :

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 &= 1 \\ 0,3\beta_1 + 0,2\beta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = -2 \\ \beta_2 = 3 \end{cases}.$$

Таким чином, z -зображення набуде вигляду

$$X(z) = \frac{-2}{1-0,2z^{-1}} + \frac{3}{1-0,3z^{-1}}.$$

Йому відповідає оригінал

$$x(n) = -2 * 0,2^n + 3 * 0,3^n.$$