Лабораторна робота 2

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ МЕТОДОМ СИМПЛЕКС-ТАБЛИЦЬ

Мета: засвоїти метод симплекс-таблиць розв'язання задач ЛП.

2.1 Порядок виконання роботи

Розглянемо метод на прикладі такої задачі:

$$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 30 \\ 2x_2 \le 16 \qquad \to x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Математична модель задачі приводиться до канонічного вигляду.

Нерівності обертаються в рівності шляхом введення вільних змінних – x_3, x_4, x_5 відповідно:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_5) = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 21 \\ 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 30 \\ x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 8 \\ x_1, x_2, \dots, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Отримується початковий допустимий базисний розв'язок задачі, який задовольняє всім умовам-обмеженням:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 21, x_4 = 30, x_5 = 8.$$

Складається вихідна симплекс-таблиця

Таблиця 2.1

C	–	3	2	0	0	0

	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	21	**3**	1	1	0	0
0	x_4	30	2	3	0	1	0
0	x_5	8	0	1	0	0	1
	Δ	0	-3	-2	0	0	0

Оцінки індексного рядка розраховуються таким чином:

$\Delta_0 = 0 \cdot 21 + 0 \cdot 30 + 0 \cdot 8 = 0,$

$\Delta_1 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 - 3 = -3,$

$\Delta_2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 - 2 = -2,$

$\Delta_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$

$\Delta_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$

$\Delta_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$

Аналізуються оцінки індексного рядка.

Розв'язуємо задачу ЛП на max, маємо в індексному рядку найвід'ємнішу оцінку $\Delta_1 = -3$, а у відповідному стовпці додатні елементи, тому можливий перехід до іншого, більш кращого розв'язку задачі.

Визначається напрямний стовпець – A_1 (за найвід'ємнішою оцінкою), який вказує на змінну, що вводитиметься в базис для покращення розв'язку задачі – x_1.

Визначається напрямний рядок – x_3 (за найменшим з відношень елементів стовпця A_0 до елементів напрямного стовпця A_1 – min $\{\frac{21}{3}; \frac{30}{2}\} = 7$). Змінна x_3 виводитиметься з базису.

На перетині напрямного стовпця та напрямного рядка знаходиться напрямний елемент – $x_{31} = 3$.

Розраховуються елементи наступної симплекс-таблиці:

Таблиця 2.2´

C	–	3	2	0	0	0

B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
x_1	$21:3$	$3:3$	$1:3$	$1:3$	$0:3$	$0:3$
x_4	$30-\frac{21\cdot 2}{3}$	$2-\frac{3\cdot 2}{3}$	$3-\frac{1\cdot 2}{3}$	$0-\frac{1\cdot 2}{3}$	$1-\frac{0\cdot 2}{3}$	$0-\frac{0\cdot 2}{3}$
x_5	$8-\frac{21\cdot 0}{3}$	$0-\frac{3\cdot 0}{3}$	$1-\frac{1\cdot 0}{3}$	$0-\frac{1\cdot 0}{3}$	$0-\frac{0\cdot 0}{3}$	$1-\frac{0\cdot 0}{3}$
Δ						

Таблиця 2.2

	C	–	3	2	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
3	x_1	7	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
← 0	x_4	16	0	$\boldsymbol{\frac{7}{3}}$	$-\frac{2}{3}$	1	0
0	x_5	8	0	1	0	0	1
	Δ	21	0	-1	1	0	0

Оскільки серед оцінок індексного рядка ще є від'ємна ($\Delta_2 = -1$), а у відповідному стовпці A_2 є додатні елементи, то процес розв'язання продовжується, тому що можливий перехід до більш кращого розв'язку задачі, пов'язаного з більшим значенням цільової функції.

Напрямний стовпець – A_2, напрямний рядок – x_4, напрямний елемент – $x_{42} = \frac{7}{3}$.

Будується наступна симплекс-таблиця.

Таблиця 2.3´

C	–	3	2	0	0	0
B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
x_1	$7-(16\cdot\frac{1}{3}):\frac{7}{3}$	$1-(0\cdot\frac{1}{3}):\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}-(\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3}):\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}-(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}):\frac{7}{3}$	$0-(1\cdot\frac{1}{3}):\frac{7}{3}$	$0-(0\cdot\frac{1}{3}):\frac{7}{3}$
x_2	$16:\frac{7}{3}$	$0:\frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}:\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}:\frac{7}{3}$	$1:\frac{7}{3}$	$0:\frac{7}{3}$

x_5	$8-(16\cdot 1):\frac{7}{3}$	$0-(0\cdot 1):\frac{7}{3}$	$1-\left(\frac{7}{3}\cdot 1\right):\frac{7}{3}$	$0-\left(-\frac{2}{3}\cdot 1\right):\frac{7}{3}$	$0-(1\cdot 1):\frac{7}{3}$	$1-(0\cdot 1):\frac{7}{3}$
Δ						

Таблиця 2.3

	C	–	3	2	0	0	0
	B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
3	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{\frac{33}{7}}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0
2	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{\frac{48}{7}}$	0	1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	0
0	x_5	$\frac{8}{7}$	0	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	1
	Δ	$\frac{195}{7}$	0	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$	0

В індексному рядку всі оцінки $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_5 \geq 0$, тому отриманий оптимальний розв'язок задачі:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{33}{7}, x_2 = \frac{48}{7}, F_{max} = \frac{195}{7}}.$$

Завдання

Розв'язати задачу лінійного програмування методом симплекс-таблиць.

Таблиця 2.4

№ варіанту	Умови задачі
1	**2**
1	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 7 \\ -x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
2	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -3 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 42 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
3	$F(x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2 \to min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 9 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 27 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
4	$F(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + x_2 + 2x_3 \to max$ $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$
5	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
6	$F(x_1, x_2) = 8x_1 + 2x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4 \\ -4x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Продовження табл. 2.4

1	2
7	$F(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \\ -x_1 + x_2 \le 5 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
8	$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1 + 2x_2 \le 16 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
9	$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to max$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 30 \\ 2x_1 \le 16 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
10	$F(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \ge -2 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
11	$F(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 17 \\ 10x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
12	$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \le 4 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 2 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$

Продовження табл. 2.4

1	**2**
13	$F(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
14	$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 4 \\ 5x_1 - x_3 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq -4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$
15	$F(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \rightarrow max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$