Лекція 2

Математичний апарат опису сигналів та лінійних систем

$$x(t)_{t<0} = 0. \tag{2.1}$$

Перетворення Лапласа

пряме перетворення

$$\mathrm{X(p)} = \mathrm{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}dt\ ; \tag{2.2}$$

зворотне перетворення

$$(t) = L^{-1}\{X(p)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X(p)e^{pt}dp, \tag{2.3}$$

p — оператор Лапласа

$$p = \sigma + j\omega; \tag{2.4}$$

X(p) — *L-зображення* (L-образ) функції *x(t)*, результат перетворення Лапласа;

Перетворення Лапласа справедливо тільки в області абсолютної збіжності інтеграла (2.2)

$$\int_0^{\infty} |x(t)^{-pt}|dt = \int_0^{\infty} \left|x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\right|dt =$$

$$= \int_0^{\infty} |x(t)|\left|e^{-j\omega t}\right|e^{-\sigma t} = \int_0^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t}dt < \infty, \tag{2.5}$$

Перетворення Фур'є

пряме перетворення

$$X(j) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}; \qquad (2.6)$$

зворотне перетворення

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}dt, \qquad (2.7)$$

Перетворення Фур'є справедливо тільки в області абсолютної збіжності інтеграла (2.6)

$$\int_{0}^{\infty} \left|x(t)e^{-j\omega t}\right|dt = \int_{0}^{\infty} |x(t)|dt < \infty. \qquad (2.8)$$

Зв'язок перетворення Фур'є з перетворенням Лапласа

$$X(j\omega) = X(p)_{p=j\omega} \qquad (2.9)$$

Ряд Фур'є

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\Delta\omega t}, \qquad (2.10)$$

де:

$\Delta\omega$ — період дискретизації по частоті:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_s}\left(T_s = \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right); \qquad (2.11)$$

X(k) — коефіцієнти Фур'є (комплексні числа):

$$X(k) = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} x(t)^{-jk\Delta\omega t} dt \qquad (2.12)$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\Delta t\omega}, \qquad (2.13)$$

де:

Δt — період дискретизації за часом:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_s}\left(= \frac{2\pi}{\Delta t} \neq \frac{2\pi}{T_s}\right); \qquad (2.14)$$

$x(n)$ — коефіцієнти Фур'є (комплексні числа):

$$x(n) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} X(\omega)^{jn\Delta t\omega} d\omega; \qquad (2.15)$$

n — номер коефіцієнта Фур'є, що відповідає часу $n\Delta t$

Співвідношення для періодів функцій і періодів дискретизації в часовій і частотній областях

$$T_s \Delta\omega = \omega_s \Delta t$$

$$x(nT)_{n<0} = 0. \qquad (2.16)$$

Дискретне перетворення Лапласа

В результаті переходу від неперервного часу к дискретному

$$t \Rightarrow nT$$

и заміні неперервної функції послідовністю

$$x(t) \Rightarrow x(nT)$$

інтеграл в (2.2) заміняємо сумою.

$$X(e^{pt}) = D\{x(nT)\} = \sum_{n=0} x(nT)e^{-pnt}\ , \qquad (2.17)$$

$\sum_{n=0}^{\infty}|x(nT)e^{-pnT}| = \sum_{n=0}^{\infty}|x(nT)||e^{-j\omega nT}|e^{-\sigma nT} =$
$\sum_{n=0}^{\infty}|x(nT)|e^{-\sigma nT} < \infty, \sum_{n=0}^{\infty}|x(nT)e^{-pnT}| = \sum_{n=0}^{\infty}|x(nT)||e^{-j\omega nT}|e^{-\sigma nT} =$
$\sum_{n=0}^{\infty}|x(nT)|e^{-\sigma nT} < \infty,$ (2.18)

Z- перетворення

$$z = e^{pT} \qquad (2.19)$$

$$(z) = Z\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}, \qquad (2.20)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|x(nT)z^{-n}| < \infty. \qquad (2.21)$$

$$X\left(e^{j\omega Tn}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega Tn}, \qquad (2.22)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|x(nT)e^{-j\omega Tn}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}|x(nT)| < \infty. \qquad (2.23)$$

$$e^{j\omega T} = e^{j(\omega \pm k\frac{2\pi}{T})T} = e^{j\omega T}e^{\pm j2\pi k} = e^{j\omega T}. \qquad (2.24)$$

Якщо $\omega_s = \omega_д$, $\Delta t = T$

$$(\omega) = X\left(e^{j\omega T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\Delta t\omega} = \sum_{0}^{\infty} x(n)e^{-j\omega nT}, \qquad (2.25)$$

$$(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n}\, d\omega \qquad (2.26)$$

$$X\left(e^{j\omega T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n T} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega n T}.$$

Перетворення Фур'є послідовності $x(nT)$:

□ пряме перетворення

$$X\left(e^{j\omega T}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega T n}; \qquad (2.27)$$

□ зворотне перетворення

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n}\, d\omega. \qquad (2.28)$$

Зв'язок перетворення Фур'є з перетворенням Лапласа

$$X(e^{j\omega T}) = X(z)_{z=e^{j\omega T}}. \qquad (2.29)$$