2. Математичний апарат опису сигналів і лінійних систем

Обробці сигналів лінійною системою ставиться у відповідність математичний опис:

- вхідного сигналу;
- лінійної системи, що містить:
  - її характеристики;
  - співвідношення вхід–вихід.

У *часовій* області сигнали описуються функціями часу, а лінійна система – своїми формалізованими характеристиками, серед яких основною, як правило, вважається *імпульсна характеристика*.

Співвідношення вхід–вихід лінійної системи з одним входом і одним виходом у часовій області описується *лінійним рівнянням,* яке встановлює зв'язок між вхідним і вихідним сигналами – двома функціями часу.

Залежно від типу сигналів і лінійних систем – *аналогові* або *дискретні* – відповідні функції часу будуть:

- неперервними – *f(t)* або частково неперервними;

- дискретними – *f(nT)* послідовностями відліків, де *T* – період дискретизації, а *n – номер відліку*, *n* =0, 1, 2, 3, ...

Крім часової області, сигнали й лінійні системи можуть описуватися в областях інших незалежних змінних, при цьому відповідні функції часу *перетворяться* у функції іншого аргументу, наприклад у функції частоти.

Подібні перетворення не слід плутати з перетвореннями функцій однієї й тієї ж незалежної змінної, зокрема з перетворенням вхідного сигналу у вихідний. Зміст перетворення завжди зрозумілий з контексту.

Даний розділ містить короткі відомості про математичний апарат перетворення функцій, традиційно використовуваний при описі *аналогових* і *дискретних* сигналів і лінійних систем в областях різних незалежних змінних.

Доцільно об'єднати інформацію з даного питання в одному, вступному розділі й звертатися до нього в міру необхідності в процесі викладу матеріалу. Це дозволить показати:

- основні методи аналізу аналогових і дискретних сигналів і лінійних систем;
- взаємозв'язок однотипних перетворень неперервних і дискретних функцій;
- взаємозв'язок між різними перетвореннями.

2.1. Математичний опис аналогових сигналів і лінійних систем у *p*-області й у частотній області

Математичний опис аналогових сигналів і лінійних систем у *p*-області (на комплексній *p*-площині) і в частотній області засновано відповідно на однобічних перетвореннях Лапласа й Фур'є функції часу *f(t)*, для якої виконується умова:

$f(t) = 0, t < 0$ (нульові початкові умови).

2.1.1. Перетворення Лапласа

Однобічним перетворенням Лапласа функції *f(t)* називається наступна пара взаємних однозначних перетворень:

прямого

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \qquad (2.1)$$

зворотного

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \oint_C F(p) e^{pt} dp, \qquad (2.2)$$

де *f(t)* – *оригінал* – неперервна або частково неперервна функція, (дійсна або комплексна), що відповідає умовам Діріхле: на будь-якому кінцевому інтервалі в області завдання функція неперервна й має кінцеву кількість розривів першого роду, мінімумів і максимумів [2]; *p* — оператор Лапласа:

$$p = \sigma + j\omega \qquad (2.3)$$

F(p) – p-зображення функції; *f(t)* – результат перетворення Лапласа.

С – будь-який замкнений контур в області збіжності інтеграла (2.2), що охоплює початок координат *p*-площини й особливі точки підінтегральної функції $F(p)e^{pt}$.

Перетворення Лапласа (2.1) існує для $\mathrm{Re}(p) = \sigma \geq \sigma_0$, якщо інтеграл

$$\int_0^{\infty} \left| f(t)e^{\sigma t} \right| dt \tag{2.4}$$

збігається для $\sigma = \sigma_0$. Найменше значення σ_0 характеризує абсцису збіжності перетворення Лапласа [3].

2.1.2. Перетворення Фур'є

Однобічне перетворення Фур'є функції *f(t)* пов'язане з перетворенням Лапласа співвідношенням

$$F(j\omega) = F(p)\,\big|_{p=j\omega}. \tag{2.5}$$

Тому перетворення Фур'є функції *f(t)* тотожне перетворенню Лапласа цієї ж функції на комплексній осі $j\omega$ *p*-площини.

Відповідно, однобічним перетворенням Фур'є функції *f(t)* називається наступна пара взаємно однозначних перетворень:

прямого

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \tag{2.6}$$

і зворотного

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} dt \tag{2.7}$$

де *f(t)* – *оригінал* – неперервна або частково-неперервна функція (дійсна або комплексна), що задовольняє умови Діріхле;

F*(jω)* – *Фур'є-зображення* функції *f(t)* – результат перетворення Фур'є.

Перетворення Фур'є справедливо в області абсолютної збіжності інтеграла

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt < \infty . \qquad (2.8)$$

Порівнюючи умови збіжності інтегралів у перетвореннях Лапласа й Фур'є (2.4) і (2.8), зазначимо, що перетворення Фур'є справедливо для більш вузького класу сигналів, ніж перетворення Лапласа. Дійсно, припустимо, що умова збіжності (2.8) не виконується, однак можна підібрати таке значення σ, при якому буде виконуватися умова збіжності перетворення Лапласа (2.4).

З порівняння розглянутих перетворень видно, що подання неперервної функції *f(t)* у трьох областях (у часовій, частотній і *p*-області) однозначно взаємопов'язані, тому в якій би області не була задана вихідна функція, можна аналітично одержати її подання в інших областях, зрозуміло, при виконанні умов існування відповідних перетворень.

Надалі, говорячи про перетворення Лапласа й Фур'є, будемо за замовчуванням мати на увазі *однобічні* перетворення.

2.1.3. Ряд Фур'є

Неперервна періодична функція *часу f(t)* з періодом $T_Д$, що задовольняє в межах періоду умови Діріхле, може бути зображена рядом Фур'є:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k) e^{jk\Delta\omega t}, \qquad (2.9)$$

де $\Delta\omega$ — період дискретизації за частотою ω,

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_S},$$

k – нормована частота, що відповідає абсолютним значенням частоти ω, що дорівнює $k\Delta\omega$,

F(k) — коефіцієнти Фур'є (комплексні числа), що обчислюються за формулою:

$$F(k) = \frac{1}{T_S} \int_{-\frac{T_S}{2}}^{\frac{T_S}{2}} f(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt. \qquad (2.11)$$

Неперервна періодична функція *частоти* $F(\omega)$ з періодом ω_S, що задовольняють у межах періоду умови Діріхле, може бути зображена рядом Фур'є, симетричним ряду (2.9):

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-jn\Delta t\omega}, \qquad (2.12)$$

де Δt — період дискретизації за часом *t*,

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_S}, \qquad (2.13)$$

n — нормований час, що відповідає абсолютним значенням часу *t*, що дорівнює $n\Delta t$,

f(n) — коефіцієнти Фур'є (комплексні числа), що обчислюються за формулою:

$$f(n) = \frac{1}{\omega_S} \int_{-\frac{\omega_S}{2}}^{\frac{\omega_S}{2}} F(\omega) e^{jn\Delta t\omega} d\omega. \qquad (2.14)$$

Порівнюючи пари формул (2.9)—(2.11) і (2.12)—(2.14), легко бачити взаємозамінність незалежних змінних *t* та ω.

2.2. Математичний опис дискретних сигналів і лінійних систем у *z*-області й у частотній області

Математичний опис дискретних сигналів і лінійних систем у *z*-області (на комплексній *z*-площині) й у частотній області засновано на однобічному *z*-перетворенні й перетворенні Фур'є дискретної функції часу *f(nT),* для якої виконується умова:

$$f(nT) = 0, \ \text{n<0}.$$

2.2.1. Дискретне перетворення Лапласа

Дискретне перетворення Лапласа (*D*-перетворення) дискретної функції *f(nT)* має пряму аналогію з перетворенням Лапласа (2.1) неперервної функції. У результаті переходу від неперервного часу до дискретного

$$t \to nT$$

і заміни неперервної функції дискретною

$$f(t) \to f(nT)$$

обчислення інтеграла в (2.1) може бути замінене обчисленням суми

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-pnT}, \qquad (2.15)$$

де *f(nT) – оригінал* – дискретна функція (послідовність дійсних або комплексних відліків);
F(p) – D-зображення функції *f(nT) – результат* дискретного перетворення Лапласа.

Дискретне перетворення Лапласа однозначно пов'язане з функцією *f(nT)* й справедливе тільки в області абсолютної збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| f(nT) \right| e^{-\sigma nT} < \infty. \qquad (2.16)$$

2.2.2. Z-перетворення

Під час дослідження дискретних сигналів і лінійних дискретних систем, як правило, замість дискретного перетворення Лапласа використовується *z*-перетворення, що випливає з дискретного перетворення Лапласа (2.15) у результаті наступної заміни змінних:

$$z = e^{pT}. \qquad (2.17)$$

Прямим *z*-перетворенням функції *f(nT)* називають перетворення

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}, \qquad (2.18)$$

де *f(nT) – оригінал* – дискретна функція (послідовність дійсних або комплексних відліків),
P(z) – z-зображення функції *f(nT)* – результат *z*-перетворення.

Пряме *z*-перетворення однозначно пов'язане з функцією *f(nT)* й справедливе тільки в області абсолютної збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|f(nT)z^{-n}\right|<\infty. \qquad (2.19)$$

Більш докладно *z*-перетворення буде розглянуте в наступному розділі 3**.**

2.2.3. Перетворення Фур'є

Перетворення Фур'є функції *f(nT)* пов'язане з *z*-перетворенням (2.18) співвідношенням

$$F\left(e^{j\omega T}\right)=F(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}}, \qquad (2.20)$$

тому перетворення Фур'є функції *f(nT)* тотожне *z*-перетворенню даної функції на одиничному колі $z=re^{j\omega T}\Big|_{r=1}=e^{j\omega T}$ комплексної z-площини. Відповідно, прямим перетворенням Фур'є функції *f(nT)* називають

$$F(e^{j\omega T})=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)e^{-j\omega Tn}, \qquad (2.21)$$

де *f(nT) – оригінал* – дискретна функція (послідовність дійсних або комплексних відліків),

$F(e^{j\omega T})$ *– Фур'є-зображення* функції *f(nT)* – результат перетворення Фур'є.

Перетворення Фур'є однозначно пов'язане з функцією *f(nT)* й справедливе в області абсолютної збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|f(nT)\right|<\infty. \qquad (2.22)$$

З формули (2.21) видно, що результатом перетворення Фур'є дискретної функції *f(nT)* є *неперервна періодична* функція $F(e^{j\omega T})$, оскільки аргумент даної функції $e^{j\omega T}$ (у свою чергу функція) періодичний із періодом за частотою ω, що дорівнює $\frac{2\pi}{T}$:

$$e^{j\omega T}=e^{j(\omega\pm k\frac{2\pi}{T})T}=e^{j\omega T}e^{j2\pi k}\equiv e^{i\omega T}. \qquad (2.23)$$

Отже, співвідношення (2.21) є одночасно:

- *прямим* перетворенням Фур'є ґратчастої функції *f(nT)* ;

- рядом *Фур'є* (2.14) неперервної функції $F(e^{j\omega T})$

$$F(e^{j\omega T}) = F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-jn\Delta t\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-j\omega nT},$$

де інтервал Δt =T; *f(nT)* – дискретна функція в одиницях нормованого часу (T=1). Тому коефіцієнти *f(nT)* ряду Фур'є (2.23) можна обчислити за відомою формулою (2.16):

$$f(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} F(e^{j\omega T})e^{j\omega Tn} d\omega,$$

де період $\omega_S = \frac{2\pi}{T}$.

При цьому співвідношення (2.24) є одночасно:

- *оберненим* перетворенням Фур'є ґратчастої функції *f(nT)*;

- *коефіцієнтами* ряду Фур'є неперервної функції $F(e^{j\omega T})$.

Таким чином, однобічним *перетворенням Фур'є* дискретної функції *f(nT)* називається пара взаємно однозначних перетворень (2.21)—(2.24):

прямого

$$F(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-j\omega Tn};$$

оберненого

$$f(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} F(e^{j\omega T}) e^{j\omega Tn} d\omega . \qquad (2.24)$$

Отже зображення дискретної функції *f(nT)* у трьох областях (часовій, частотній та *z*-області) однозначно взаємозалежні, тому в якій би області не була задана вихідна функція, можна аналітично одержати її подання в інших областях, зрозуміло, при виконанні умов існування відповідних перетворень.