# Лабораторна робота № 6.
# ПОТОКИ В МЕРЕЖАХ

## ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Потоки в мережах.

Постановка задачі. Маємо зважений орієнтовний граф $G=(V,E)$, ваги $c(e)$ на дугах якого є цілими додатними числами і називаються пропускними спроможностями дуг. В графі виділено дві вершини: $s \in V$, яка називається джерелом (вона інцидентна лише дугам, що виходять з неї), і $t \in V$, яка називається стоком (ця вершина інцидентна лише дугам, що входять у вершину). Потоком з s в t величини V називається задана на дугах графа невід'ємна функція $f(e)$, яка задовольняє наступним умовам:

1) $\sum\limits_{v' \in \Gamma(v)} f(v,v') - \sum\limits_{v'' \in \Gamma^{-1}(v)} f(v'',v) = \begin{cases} V, v = s \\ 0, v \neq s,t \\ -V, v = t \end{cases}$, де $\Gamma(v)$ - множина вершин суміжних з v через вихідні дуги, $\Gamma^{-1}(v)$ - множина вершин суміжних з v через вхідні дуги;

2) $f(e) \le c(e)$ для всіх $e \in E$.

Тобто потік починається у вершині s та закінчується у вершині t, а в усіх інших вершинах мережі кількість потоку, який входить у вершину дорівнює кількості потоку, який з неї виходить. Крім того, на кожній дузі потік не перевищує її пропускної спроможності.

Нехай $X \subset V$, $s \in X$, $t \notin X$, $\overline{X} = V \setminus X$. Розрізом $(X,\overline{X})$, що відділяє вершини s і t, називається множина дуг, які йдуть з $X$ в $\overline{X}$. Пропускна спроможність розрізу $(X,\overline{X})$ визначається як

$$C(X,\overline{X}) = \sum_{e \in (X,\overline{X})} c(e).$$

Розглянемо у якості прикладу мережу, зображену на рисунку 6.1, де числа біля дуг є їх пропускними спроможностями.

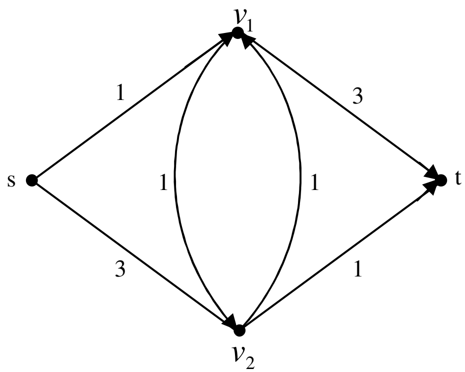



Рисунок 6.1

Нехай $X = \{s, v_1\}$. Тоді $(X, \overline{X}) = \{(s, v_2), (v_1, v_2), (v_1, t)\}$, $c(X, \overline{X}) = 3 + 1 + 3 = 7$.

Потік через розріз $f(X, \overline{X})$ визначається як різниця між сумою потоків по дугам із $X$ в $\overline{X}$ и сумою потоків по дугам із $\overline{X}$ в $X$

$$f(X, \overline{X}) = \sum_{e \in (X, \overline{X})} f(e) - \sum_{e \in (\overline{X}, X)} f(e).$$

Теорема. *(Ford, Fulkerson). Для будь-якої мережі максимальна величина потоку із s в t дорівнює мінімальної пропускної спроможності розрізу, який розділяє s і t.*

Алгоритм знаходження максимального потоку в мережі.

Виберемо в якості початкового припустимого потоку нульовий по всім дугам потік і будемо його послідовно нарощувати, збільшуючи величину потоку на кожному кроці на $\Delta \geq 1$. За скінчену кількість кроків буде, таким чином, побудовано максимальний потік. Нарощування потоку буде здійснюватися наступним чином. Нехай маємо деякий припустимий потік. Покажемо, як можна його збільшити чи вказати розріз, пропускна спроможність якого дорівнює величині потоку. Будемо шукати такий шлях з s в t, у якому можна йти по дугам як у прямому, так і в зворотному напрямі, але дуги, які проходимо в прямому напрямі, повинні бути ненасиченими

$(f(e) < c(e))$, а дуги, які проходимо в зворотному напрямі, повинні бути навантаженими $(f(e) > 0)$. Якщо такий шлях знайдено, то шукаємо мінімум по всім дугам шляху з величин $c(e) - f(e)$ для дуг, що проходилися в прямому напрямі і $f(e)$ для дуг, що проходилися в зворотному напрямі. Нехай цей мінімум дорівнює $\Delta \geq 1$. Будуємо новий потік, збільшуючи потік по дугам в прямому напрямі на $\Delta$ и зменшуючи потік по дугам в зворотному напрямі на ту ж саму величину. (Потоки по дугам, що не належать шляху, залишаються без змін).

Новий потік буде припустимим і мати величину на $\Delta$ одиниць більше попередньої. Якщо ж вершина t недосяжна подобнім чином із s, то це означає, що існує множина вершин $\overline{X} = V \setminus X$, недосяжних із s, причому $s \in X$, $t \in \overline{X}$. Тому що з множини $X$ неможливо перейти в множину $\overline{X}$ зазначеним вище чином, то всі дуги з $\overline{X}$ в $X$ ненавантажені. Тому потік $f(X, \overline{X})$ через розріз $(X, \overline{X})$, дорівнює величині потоку в мережі, та дорівнює пропускної спроможності розрізу $(X, \overline{X})$. Таким чином буде побудовано максимальний потік.

<u>Приклад.</u> Перша цифра за дужками на кожній дузі визначає пропускну спроможність, друга в дужках – потік по дузі.

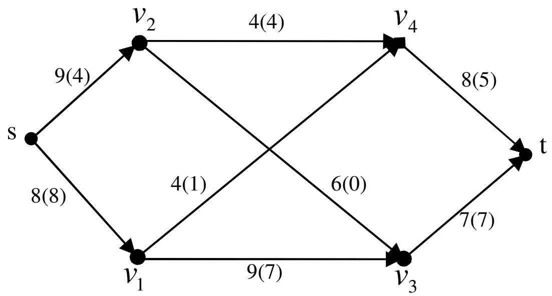



Рисунок 6.2

Зростаючим для потоку шляхом є $(s, v_2, v_3, v_1, v_4, t)$, $\Delta = \min\{9-4, 6-0, 7, 4-1, 8-5\} = 3$.

Новий потік прийме вид

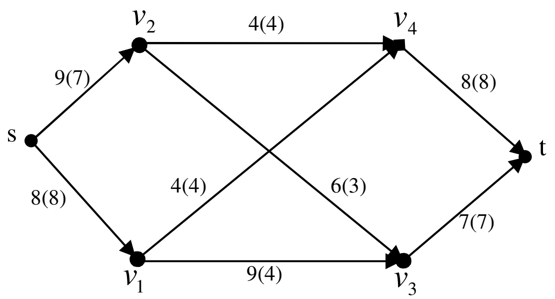



Рисунок 6.3

Спробуємо знову знайти зростаючий для потоку шлях. Із s можна потрапити в $v_2$, із $v_2$ - в $v_3$, із $v_3$ - в $v_1$. Ніяких інших вершин мережі з s досягнути не вдається. Тому $X = \{s, v_1, v_2, v_3\}$, $\overline{X} = \{t, v_4\}$ и $\left(X, \overline{X}\right) = \{(v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_3, t)\}$ - розріз с пропускною спроможністю 4+4+7=15, рівною величині потоку в мережі. Отже, знайдений потік є максимальним.

Приклад. Знайти максимальний потік для графа, зображеного на рисунку. Вважати дуги орієнтовними зліва направо.

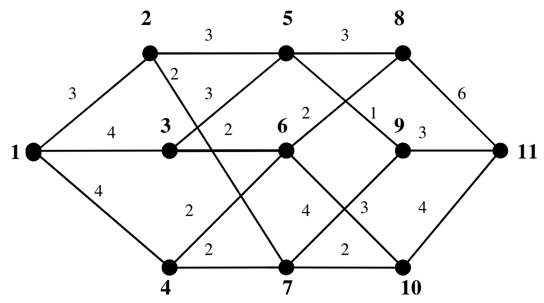



Рисунок 6.4

Спочатку робимо перебір всіх варіантів шляхів, які складаються лише з ненасичених дуг, побудований таким чином потік називається повним. Для цього обирають якомога верхні ненасичені дуги.

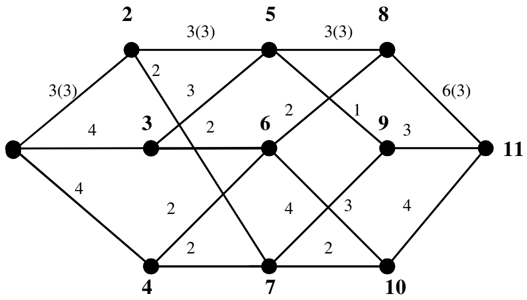



Рисунок 6.5

1) (1, 2, 5, 6, 11), $\Delta$=3; 2) (1, 3, 5, 9, 11), $\Delta$=1; 3) (1, 3, 6, 8, 11), $\Delta$=2;
4) (1, 4, 6, 10, 11), $\Delta$=2; 5) (1, 4, 7, 9, 11), $\Delta$=2.

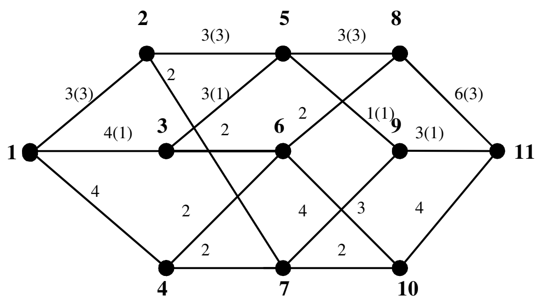



Рисунок 6.6

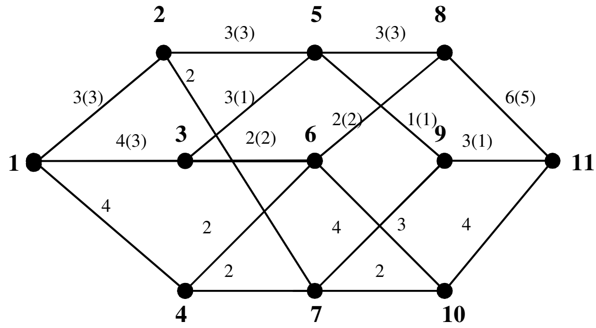



Рисунок 6.7

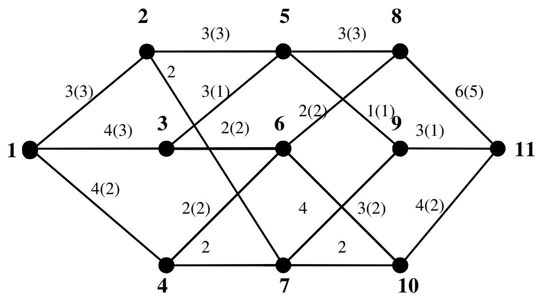



Рисунок 6.8

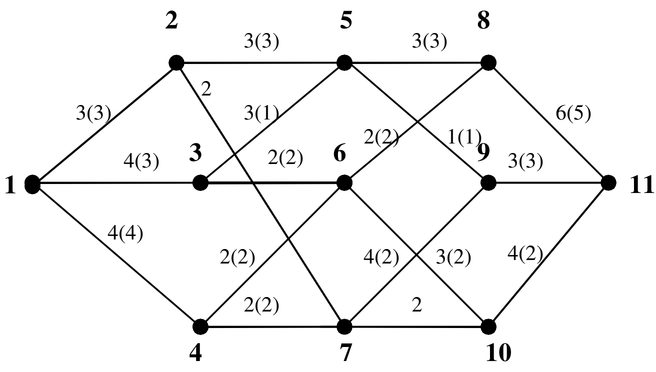



Рисунок 6.9

Значення повного потоку $V = 10$.

Далі шукаємо корегуючий шлях з врахуванням руху у зворотному напрямі - (1, 3, 5, 2, 7, 10, 11), $\Delta$=1.

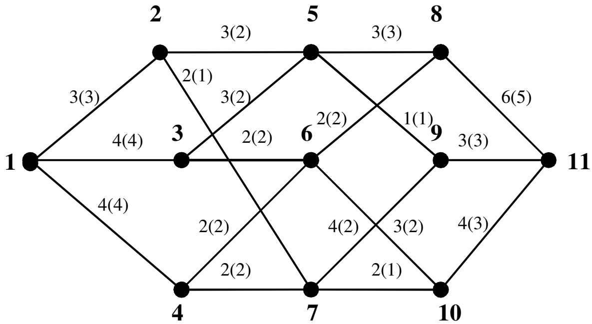


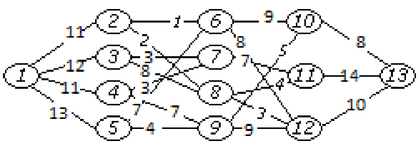

Рисунок 6.10

Цей потік є максимальний, оскільки вже 2, 3, 4 вершини є недосяжними, мінімальний розріз складають дуги (1,2), (1,3), (1,4). Величина максимального потоку V=11.

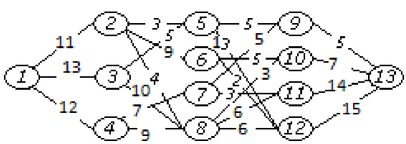
## ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

**Завдання № 1.** Побудувати повний потік, а потім скорегувати його до найбільшого (дуги спрямовані зліва направо).

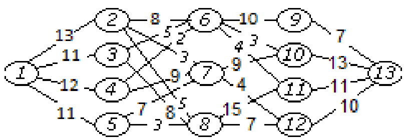
**1**



**2**



**3**



**4**