Лабораторна робота № 4.
ОСНОВНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ГРАФАМИ. ЗНАХОДЖЕННЯ ОСТОВА МІНІМАЛЬНОЇ ВАГИ ЗА АЛГОРИТМОМ ПРІМА-КРАСКАЛА

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Теорія графів дає простий, доступний і потужний інструмент побудови моделей прикладних задач, є ефективним засобом формалізації сучасних інженерних і наукових задач у різних областях знань.

Графом G називається пара множин (V, E), де V – множина вершин, перенумерованих числами $1,2,...,n = v$; $V = \{v\}$, E – множина упорядкованих або неупорядкованих пар $e = (v', v'')$, $v' \in V$, $v'' \in V$, називаних дугами або ребрами, $E = \{e\}$. При цьому не має примусового значення, як вершини розташовані в просторі або площині і які конфігурації мають ребра.

Неорієнтованим графом G називається граф у якого ребра не мають напрямку. Такі ребра описуються неупорядкованою парою (v', v''). *Орієнтований граф (орграф)* – це граф ребра якого мають напрямок та можуть бути описані упорядкованою парою (v', v''). Упорядковане ребро називають *дугою*. Граф є *змішаним*, якщо наряду з орієнтованими ребрами (дугами) є також і неорієнтовані. При розв'язку задач змішаний граф зводиться до орграфа.

Кратними (паралельними) називаються ребра, які зв'язують одні і ті ж вершини. Якщо ребро виходить та й входить у дну і ту саму вершину, то таке ребро називається *петлею*.

Мультиграф – граф, який має кратні ребра. *Псевдограф* – граф, який має петлі. *Простий граф* – граф, який не має кратних ребер та петель.

Будь яке ребро e *інцедентно* двом вершинам (v', v''), які воно з'єднує. У свою чергу вершини (v', v'') інцендентні до ребра e. Дві вершини (v', v'') називають *суміжними*, якщо вони належать до одного й того самого ребра e, і *несуміжні* у протилежному випадку.

Два *ребра називають суміжними*, якщо вони мають спільну вершину. Відношення суміжності як для вершин, так і для ребер є симетричним відношенням. *Степенем вершини* графа G називається число інцидент них їй ребер.

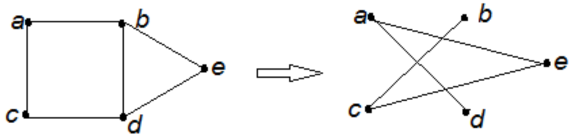
Граф, який не має ребер називається *пустим графом*. Граф, у якого не має вершин називається *нуль-графом*. Вершина графа, яка не інцедентна до жодного ребра, називається *ізольованою*. Вершина графа, яка інцедентна тільки до одного ребра, називається *звисаючій*.

Частина $G' = (V', E')$ графа $G = (V, E)$ називається *підграфом* графа G, якщо $V' \subseteq V$ і E' складається з тих і тільки тих ребер $e = (v', v'')$, у яких обидві кінцеві вершини $v', v'' \in V'$. Частина $G' = (V', E')$ називається *суграфом* або *остовим підграфом* графа G, якщо виконано умови: $V' = V$, $E' \subseteq E$.

Операції над графами

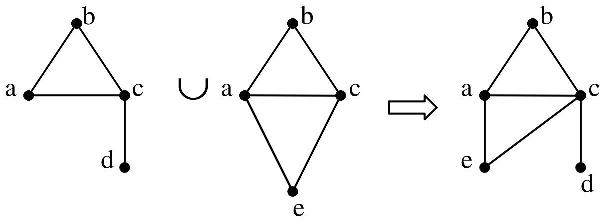
1. *Вилученням ребра* e ($e \in E$) з графа $G = (V, E)$ - є така операція внаслідок якої отримаємо новий граф G_1 для якого $G_1 = (V, E \setminus \{e\})$.

2. *Доповненням графа* $G = (V, E)$ називається граф $\overline{G} = (V, E')$, якщо він має одну і ту саму кількість вершин та дві його вершини суміжні тоді і тільки тоді коли вони не суміжні в G (тобто ребро $(v_i, v_j) \in E'$ тоді коли $(v_i, v_j) \notin E$). Наприклад:



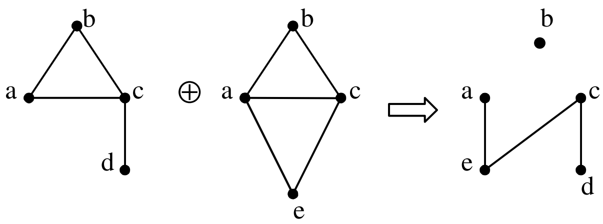
G $\overline{G}$

3. *Об'єднанням графів* $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ називається граф $G = (V, E) = G_1 \cup G_2$ у якому $V = V_1 \cup V_2$ та $E = E_1 \cup E_2$. Наприклад:



G_1 $\qquad$ G_2 $\qquad$ $G_1 \cup G_2$

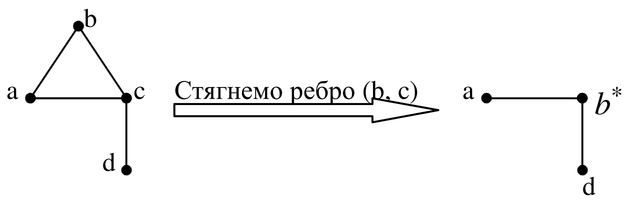
4. *Кільцевою сумою графів* $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ називається граф $G = (V, E) = G_1 \oplus G_2$ у якому $V = V_1 \cup V_2$ та $E = E_1 \Delta E_2 = (E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$. Наприклад:



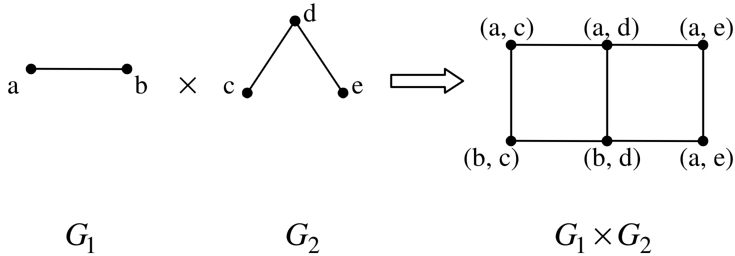
G_1 $\qquad$ G_2 $\qquad$ $G_1 \oplus G_2$

5. *Розщеплення (роздвоєння) вершини графа*. Нехай v - вершина графа $G = (V, E)$. Множину усіх суміжних з нею вершин довільним чином розділимо на дві множини $N_1(v)$ та $N_2(v)$, таких що $N_1(v) \cup N_2(v) = V$. Видаливши вершину v разом з інцидентними їй ребрами, додамо дві нові вершини v_1 та v_2, які з'єднані ребром (v_1, v_2). Вершину v_1 з'єднаємо ребром з кожною вершиною множини $N_1(v)$, а вершину v_1 - з кожною вершиною множини $N_2(v)$. Таким чином з графа G отримаємо новий граф G_v^*. Виконана операція називається *розщепленням вершини* v. Наприклад:

6. *Стягування ребра (дуги)*. Ця операція означає видалення ребра та ототожнення його суміжних вершин. Граф G_1 стягується до графа G_2, якщо граф G_2 може бути отриманим з G_1 в результаті деякої послідовності стягування ребер (дуг). Наприклад:



7. Добутком графів $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ називається граф $G = G_1 \times G_2$ у якого $V = V_1 \times V_2$ а множина ребер визначається наступним чином: вершини (u_1, v_1) та (u_2, v_2) суміжні у G тоді і тільки тоді коли $u_1 = u_2$ і v_1 та v_2 суміжні у G_2, або $v_1 = v_2$ і u_1 u_2 суміжні у G_1. Наприклад:



Таблицею (матрицею) суміжності $R = [r_{i,j}]$ графа $G = (V, E)$ називається квадратна матриця порядку n (n – число вершин графа), елементи якої $r_{i,j}$ (i=1, 2, …n; j=1,2, …n) визначаються наступним чином:

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1, \textit{якщо існує дуга з } v_i \textit{ в } v_j; \\ 0, \textit{в іншому випадку}. \end{cases}$$

Матриця суміжності повністю визначає структуру графа.

Діаметром зв'язного графа називається максимально можлива довжина між двома його вершинами.

Нехай дано неорієнтований граф $G = (V, E)$. *Маршрутом* довжини $l - 1$ з вершини v_1 у v_l називається послідовність $M = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_i, v_{i+1}), \ldots, (v_{l-1}, v_l)\}$, яка складається з ребер $l = (v_s, v_{s+1}) \in E$, при цьому кожні два сусідніх ребра мають спільну кінцеву вершину. Маршрут називається *ланцюгом*, якщо всі його ребра різні. Відкритий ланцюг називається *шляхом*, якщо всі його вершини різні. Замкнений ланцюг називається *циклом*, якщо різні всі його вершини, за винятком кінцевих. Шлях і цикл називаються *гамільтоновими*, якщо вони проходять через усі вершини графа.

Алгоритми знаходження найкоротшого кістякового дерева

Алгоритм Прима для даного n-вершинного графа G=(V, E) будує по кроках s=1, 2, …, $l \le n-1$ зростаюче дерево $D_s=(V_s, E_s)$, $V_s \subseteq V$, $E_s \subseteq E$.

S=1. Фіксуємо довільну вершину v_0, серед усіх ребер, інцидентних вершині v_0 знаходимо найкоротше ребро $e_1=(v_0, v_1)$. Покладемо, що $D_1=(V_1, E_1)$, $V_1=\{v_0, v_1\}$, $E_1=\{e_1\}$ і переходимо до кроку s =2.

Нехай здійснено $s<n-1$ кроків, у результаті чого в графі G виділено зростаюче дерево $D_s=(V_s, E_s)$. Тоді на кроці (s+1) серед усіх ребер e=(v', v''), таких що $v' \in V_s$, $v'' \in (V \setminus V_s)$, знаходимо найкоротше ребро $e_{s+1}=(v_r, v_{s+1})$ і приєднуємо його до дерева D_s, у результаті чого одержуємо дерево $D_{s+1}=(V_{s+1}, E_{s+1})$, $V_{s+1}= V_s \cup \{v_{s+1}\}$,

$E_{s+1} = E_s \bigcup \{e_{s+1}\}$. Алгоритм закінчує свою роботу в двох випадках: 1) результативно на кроці s=n–1 у випадку, якщо граф G зв'язний; 2) безрезультатно, якщо G – незв'язний граф.

Алгоритм Краскала. Перший етап – підготовчий, для даного графа G упорядковуються ребра $e \in E$ у послідовність $e_1, e_2, \ldots, e_m$, $m = |E|$, у порядку неспадання ваг цих ребер: $w(e_1) \le w(e_2) \le \ldots \le w(e_s) \le \ldots \le w(e_m)$.

Другий етап виконується по кроках $s=1, 2, \ldots, m_0 \le m$ у такий спосіб. На кроках s=1, 2 ребра e_1, e_2 з послідовності офарблюються. На кожному наступному кроці s розглядається ребро e_s з послідовності, і воно офарблюється тоді і тільки тоді, коли не утворює циклу з ребрами, пофарбованими на попередніх кроках. У противному випадку ребро e_s умовно викреслюється з графа G =(V, E). Алгоритм закінчує роботу на кроці $s=m_0$, коли пофарбованим виявиться (n–1) по рахунку ребро e_s, $n = |V|$, тому що по необхідності n–1 пофарбованих ребер утворюють кістякове дерево n-вершинного графа.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання № 1. Розв'язати на графах наступні задачі:

1. Виконати наступні операції над графами:
1) знайти доповнення до першого графу,
2) об’єднання графів,
3) кільцеву суму G1 та G2 (G1+G2),
4) розщепити вершину у другому графі,
5) виділити підграф A, що складається з 3-х вершин в G1 і знайти стягнення A в G1 (G1\ A),
6) добуток графів.