Лабораторна робота № 3.
ГЕНЕРАЦІЯ КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЙ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Головна задача комбінаторики – підрахунок та перелік елементів у скінчених множинах.

Правило додавання: якщо елемент – x може бути вибрано n способами, а y- іншими m способами, тоді вибір „ x або y" може бути здійснено (m+n) способами.

Правило добутку: якщо елемент – x може бути вибрано n способами, після чого y - m способами, тоді вибір упорядкованої пари (x,y) може бути здійснено (m*n) способами.

Набір елементів $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{im}$ з множини $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ називається вибіркою об'єму m з n елементів – *(n,m) – вибіркою*.

Упорядкована (n,m) – вибірка, в якій елементи не можуть повторюватися, називається *(n,m)-розміщеням*, кількість всіх можливих розміщень обчислюється за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Упорядкована (n,m) – вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається *(n,m)-розміщеням з повторюваннями*, кількість всіх можливих таких розміщень обчислюється за формулою:

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

Неупорядкована (n,m) – вибірка, в якій елементи не можуть повторюватися, називається *(n,m)-сполученням*, кількість всіх можливих сполучень обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Неупорядкована (n,m) – вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається *(n,m)-сполученням з повторюваннями*, кількість всіх можливих таких сполучень обчислюється за формулою:

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m$$

A_n^n - називається *перестановкою*, а кількість різних перестановок позначається та обчислюється за формулою:

$$P_n = n!.$$

Якщо в перестановках є однакові елементи, а саме перший елемент присутній n_1 разів, другий елемент - n_2 разів, ... , k-ий елемент - n_k разів, причому $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то їх називають *перестановками з повторенням* та кількість їх можна знайти за формулою

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}.$$

Нехай $X = \{X_1, X_2, ..., X_k\}$ - *розбиття множини* X ($|X| = n$) на k підмножин таких, що: $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X, \quad X_i \cap X_j = 0 \text{ при } i \neq j, \quad |X_i| = n_i$.

Їх кількість при фіксованих n_i та *упорядкованих* $X_1, X_2, ..., X_k$ обчислюється за формулою:

$$C_n^{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$$

Якщо ж множину X ($|X| = n$) потрібно розбити на підмножини, серед яких для усіх i=1,…,n є $m_i \geq 0$ підмножин з *i* елементами, де $\sum_{i=1}^{n} i * m_i = n$, та при цьому набір підмножин в розбитті *не є упорядкованим*, тоді їх кількість обчислюється за формулою:

$$N(m_1, ..., m_n) = \frac{n!}{m_1! m_2! ... m_n! (1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \cdots (n!)^{m_n}}$$

<u>Формула включень та виключень.</u> Нехай X_i- скінчені множини, де i=1,…,n, тоді:

$$|X_1 \cup ... \cup X_n| = (|X_1| + ... + |X_n|) - (|X_1 \cap X_2| + ... + |X_{n-1} \cap X_n|) +$$
$$+ (|X_1 \cap X_2 \cap X_3| + ... + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n|) - .... +$$
$$+ (-1)^{n+1} |X_1 \cap ... \cap X_n|$$

Наслідок.

$$\left|X \setminus (X_1 \cup ... \cup X_n)\right| = |X| - \left(|X_1| + ... + |X_n|\right) +$$
$$\left(|X_1 \cap X_2| + ... + |X_{n-1} \cap X_n|\right) - ... + (-1)^n |X_1 \cap ... \cap X_n|$$

Приведемо ще одну форму запису формули включень та виключень. Нехай X – скінчена множина з N елементів, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ – деякі властивості, якими володіють чи ні елементи з X. Позначимо через $X_i = \{x \in X \mid \alpha_i(x)\}$ - множину елементів в X, які володіють властивістю α_i, а

$N(\alpha_{i1},...,\alpha_{ik}) = |X_{i1} \cap ... \cap X_{ik}| = \left|\{x \in X \mid \alpha_{i1}(x) \wedge ... \wedge \alpha_{ik}(x)\}\right|$ - кількість елементів в X, які володіють одночасно властивостями $\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ik}$, $N_0 = |X \setminus (X_1 \cup ... \cup X_n)|$ - кількість елементів, які не володіють жодною з властивостей $\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ik}$. Тоді маємо формулу:

$$N_0 = N - S_1 + S_2 - ... + (-1)^n S_n$$

де
$$S_k = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} N(\alpha_{i1},...,\alpha_{ik}) \quad k = 1,2,...,n$$

Якщо треба знайти кількість елементів, які володіють рівно m властивостями, тоді використовують наступну формулу:

$$\hat{N}_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_{m+k}^m S_{m+k}$$

Приклади.

1. Кожен день, протягом 10 днів, клієнт брав з картки гроші а) кожен день різну суму 5, 10, 15,…, 50 грн; б) 3 дні у сумі 100 грн, 5 днів у сумі 50 грн., 2 дня у сумі 20 грн, Скількома способами він це міг зробити?

Розв’язання:

а) усього 10 днів (n=10), і в усі ці дні клієнт брав гроші (m=10), кожен день різну суму, тобто має значення лише в який день була яка сума, тому маємо перестановку: $P_{10} = 10! = 3628800$;

б) усього 10! перестановок, але 3! перестановок не відрізняються між собою тому, що в три дні сума однакова – 100 грн, також – 5! та 2! перестановки однакові, тому різних способів буде:

$$P_{10}^{3,5,2} = \frac{10!}{3!5!2!} = 2520;$$

2. Скільки п’ятицифрових чисел можна утворити з шести цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Розв’язання.

З шести цифр (n=6) необхідно вибрати – п’ять (m=5), причому цифри у числі можуть повторюватися, і має значення в якому порядку вони записані, тому усього можливо утворити: $\overline{A_6^5} = 6^5 = 7776$ чисел.

3. Із 10 робітників фірми директору треба назначити бухгалтера, його помічника, двох менеджерів і трьох кур’єрів. Скількома способами це можливо зробити?

Розв’язання.

З початку з 10 чоловік виберемо бухгалтера – маємо 10 способів, потім з дев’яти залишених чоловік – його помічника – 9 способів, потім з восьми – двох менеджерів - $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$ способів та з шести, що залишилися, - трьох кур’єрів - $C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$ способів. За теоремою добутку загальна кількість способів буде: 10*9*28*20=50400.

4. Скількома способами можна поставити в одну шеренгу гравців двох команд (по 5 чоловік) так, щоб при цьому два чоловіка однієї команди не стояли поруч?

Розв’язання.

З початку поставимо в шеренгу гравців однієї команди, це можливо зробити – P_5=5!=120 способами. Потім будемо ставити між ними гравців другої команди. Усього можливих міст маємо – 6, з котрих треба вибрати п’ять без повторювань та упорядковано, тому різних способів буде - $A_6^5 = \frac{6!}{(6-5)!} = 720$. За правилом добутку усього різних способів поставити в одну шеренгу гравців двох команд буде – 120*720=86400.

5. Скількома способами можна роздати 6 однакових іграшок трьом дітям так, щоб кожен з них отримав хоча б по однієї іграшки?

Розв'язання.

З початку роздамо по одній іграшці кожній дитині, між останніми трьома іграшками введемо два роздільника, так щоб кількість іграшок до першого з них були для першої дитини, кількість іграшок між першим та другим роздільником – для другої дитини, а після другого роздільника – для третьої дитини. Тоді кількість різних способів отримання дітьми іграшок буде дорівнювати кількості можливих варіантів вибору двох міст для роздільників з п'ятьох можливих, тобто - $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = 10$.

6. Скількома способами можна роздати 6 різних предметів трьом особам так, щоб кожна отримала по 2 предмети?

Розв'язання.

Це упорядковане розбиття, де $n=6$, $n_1=n_2=n_3=2$. Тобто можливих способів буде - $C_6^{2,2,2} = \dfrac{6!}{2!2!2!} = 90$.

7. Дев'ятьох робітників одного цеху мають розподілити на групи в 2, 3 і 4 чоловіка для проходження однакових курсів підвищення кваліфікації, які проходять в різних 7 навчальних закладах, з яких можливо вибрати будь-який. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання.

З початку виберемо 3 навчальних заклади, це можливо зробити $\overline{A_7^3} = 7^3 = 343$ способами, потім розіб'ємо робітників на три групи, це буде не упорядковане розбиття, тобто маємо:

$$N(0,1,1,1,0,0,0,0,0) = \frac{9!}{1!1!1!(2!)^1(3!)^1(4!)^1} = 1260 \ .$$

Далі за правилом добутку отримаємо – 343 * 1260 = 432180 різних способів.

8. У спортивному клубі займаються 38 чоловік. З них 16 грають у баскетбол, 17 – у хокей, 18 – у волейбол. Баскетболом і хокеєм захоплюється 4 чоловіки, баскетболом і волейболом – 7, волейболом і хокеєм – 5. Скільки чоловік захоплюється одночасно хокеєм, баскетболом і волейболом? Скільки чоловік захоплюється лише одним із цих видів спорту?

Розв'язання.

За формулою включень та виключень маємо:

N=38, N_0=0, S_1=16+17+18=51, S_2=4+7+5=16

$N_0 = N - S_1 + S_2 - S_3$, тоді $S_3 = N - S_1 + S_2 - N_0 = 38 - 51 + 16 = 3$ - чоловік захоплюється одночасно хокеєм, баскетболом і волейболом .

Лише одним із цих видів спорту захоплюються:

$$\hat{N}_1 = \sum_{k=0}^{3-1} (-1)^k C_{1+k}^1 S_{1+k} = S_1 - \frac{2!}{1!\,(2-1)!} S_2 + \frac{3!}{1!\,(3-1)!} S_3 =$$
$$= 51 - 32 + 9 = 28 \quad \textit{чоловік}.$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання № 1. Використовуючи теоретичні відомості, розв'язати наступні комбінаторні задачі за своїм варіантом:

Варіант № 1

1. У мами було 2 яблука, 3 груші та 2 апельсини. Кожен день вона давала дитині по одному фрукту. Скількома способами вона могла це зробити?

2. Розклад на день містить 5 уроків. Визначити кількість таких можливих розкладів при виборі 11 дисциплін за умови, що жоден предмет не стоїть у розкладі двічі на день.

3. Скільки наборів із 17 тістечок можна скласти, якщо у продажу їх 4 сорти?

4. Із 15 робітників фірми директору треба назначити бухгалтера, його помічника, двох менеджерів і чотирьох кур'єрів. Скількома способами це можна зробити?