Минулого разу ми з вами завершили на тому, що показали, що не існує такого поняття, як універсальна множина. Зафіксували, що ми будуємо множини за певними правилами.
Але, якщо у нас є операція доповнення, то у нас повинна бути якась універсальна множина. Тобто на практиці в певних галузях знань, в яких ми використовуємо теорію множин, універсальною множиною позначається множина всіх можливих об'єктів. І це оговорюється з самого початку. Що саме ця множина для нас виступає як універсальна.
Тобто, якщо ми, скажімо, працюємо зі словами, як у лінгвістиці, то у нас універсальна множина – це всі можливі буквосполучення певної довжини. Якщо у нас, скажімо, теорія графів: у нас є графи і є ребра між ними, – то усі можливі ребра – це універсальна множина. І так далі.
Коли ми будемо входити в нову галузь математики, то там буде оголошуватися, що таке універсальна множина.
Тепер у нас є операції. І зараз ми з вами будемо формулювати їх властивості. **Ці властивості мають бути виписані у вас десь окремо, щоб ви знали куди дивитися і які ви повинні пам'ятати**.
Зараз буде багато формул і декілька страшних слів. Якщо я слово буду брати у дужечки, то його можна не запам'ятовувати, якщо не буду, то його треба запам'ятовувати. *Добре?*

Алгебраїчні властивості операцій над множинами

1) (Ідемпотентність) Якщо ви об'єднаєте множину саму з собою, що ви одержите? Цю саму множину.
$A \cup A = A$
Якщо ви перетнете множину саму з собою? Знов те ж саме.
$A \cap A = A$
Тісно з цим зв'язана інша властивість – (інволютивність).
Якщо ви візьмете множину (А), доповнення до цієї множини ($\overline{A}$), а потім доповнення до доповнення цієї множини ($\overline{\overline{A}}$), то отримаєте ту ж саму множину:
$\overline{\overline{A}} = A$.
Тобто перше доповнення – це всі елементи, які не входять в множину А, друге доповнення – це всі елементи, які не входять в доповнення, тобто всі елементи, які входять в множину А.

2) Комутативність операцій. Для деяких операцій нам не важливо, в якому порядку стоять її елементи.
$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
$A \Delta B = B \Delta A$

3) Асоціативність. Якщо в мене є декілька однакових операцій одна з одною, то мені не важливо, в якому порядку їх виконувати – результат від цього не зміниться.
Тобто, якщо ви об'єднаєте множину В з множиною С, а потім – об'єднаєте з множиною А, то це все рівно, що множину А об'єднати з В, а потім об'єднати з С:
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
Що з цього випливає? Якщо у вас є декілька однакових операцій ($\cup, \cap, \Delta$) підряд, то ви можете не писати дужки. Тобто ви можете прибрати дужки і робити виконувані операції так, як вам заманеться. А враховуючи комутативність, ви можете ще й переставляти аргументи в тому порядку, в якому вам зручно.

4) Дистрибутивність. Властивість дистрибутивності поєднує різні операції між собою. Якщо вам потрібно об'єднати множину А та перетин множин В та С, то ви можете внести операцію об'єднання в дужки і спочатку об'єднати множину А з множиною В, потім об'єднати множину А з множиною С, а те, що вийшло – перетнути: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Так само буде і навпаки: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Тут є певна аналогія з додаванням та множенням: якщо ви множите число на суму чисел, то можна помножити окремо це число на кожний з доданків, і ці два добутки додати. Але, як всяка аналогія вона є неповна, тому, що ці дві операції повністю однакові за своїми арифметичними властивостями, а додавання і множення – не однакові.

$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$. Зауважимо, що якщо замість $\cap$ поставити $\cup$, то нічого не вийде. Тобто властивість об'єднання для симетричної різниці не виконується (не працює). І ми потім покажемо чому.

5) Правила поглинання. Якщо я візьму множину А і об'єднаю її з перетином множини А і множини В, – що я одержу? … Я одержу множину А:

$A \cup (A \cap B) = A$

Ви берете В – звужуєте його до перетину з А, потім розширюєте до А – і ви отримуєте А. При цьому в якості В може виступати довільна множина – і вона поглинається множиною А ось таким способом.

Аналогічно: $A \cap (A \cup B) = A$ (розширили В до А, і звузили до А – і отримали А).

Це правила, які виходять за межі інтуїтивної арифметики, тому пам'ятайте.

6) Два важливих правила, які називаються **законами де Моргана**:

Якщо ви хочете обчислити доповнення до об'єднання двох множин, то ви берете доповнення до першої множини, берете доповнення до другої множини і перетинаєте їх між собою: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (доповнення об'єднання є перетином доповнень).

Аналогічно: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Закони де Моргана дозволяють нам певним чином розкривати дужки, якщо перед дужками стоїть своєрідний «гумус» до множин – операція доповнення. При цьому операції змінюються.

Ще трошки залишилося.

7) Далі в нас без назви – це **властивості порожньої множини та універсальної множини**. Порожня та універсальна множина – це певні межі для нас. Не може бути нічого менше за порожнє, нічого більше – за універсальне.

Так от. Що буде, якщо я множину А об'єднаю з універсальною множиною? … Буде універсальна множина: $A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U}$. Бо все, що є в А є і в універсальній множині.

$A \cap \mathrm{U} = \mathrm{A}$

$A \cup \varnothing = \mathrm{A}$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \setminus A = \varnothing$

$A \Delta A = \varnothing$, тому, що, як ми пам'ятаємо: симетрична різниця це перше без другого об'єднати з другим без першого; перше без другого – це порожня множина і друге без першого теж порожня множина; об'єднання двох порожніх множин – це порожня множина.

І останнє.

8) Якщо об'єднати множину зі своїм доповненням – ми одержимо взагалі все, що у нас є:

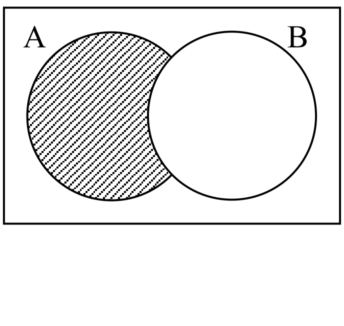
$A \cup \overline{A} = U$

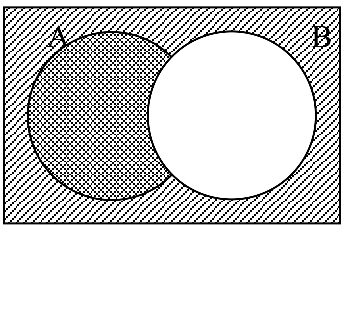
$A \cap \overline{A} = \varnothing$

Мабуть все.

У вас повинне виникнути питання… Які питання у вас виникають, коли ви на все це дивитися? …
Питання в тому: звідкіля воно взялося?
Не може ж такого бути, щоб хтось сів і відразу 8 помножити на багато формул написав з голови… Ні. Цього всього не має. Ці всі властивості доведені. Зараз ми з вами будемо розбирати як вони доводились.
Ви їх повинні пам’ятати, тому, що вам не треба кожного разу доводити асоціативність об’єднання. Це такий ходовий інструмент, що треба одразу використовувати цю формулу. Але ви повинні знати, як це доводиться, тому що потім у вас будуть більш складні твердження – і ви повинні знати метод, яким це все доводиться. Але перед цим зверніть увагу… от, скажімо, дистрибутивність…так? Я фактично поміняла місцями об’єднання на перетин, а перетин на об’єднання – і перша формула перейшла в другу формулу. Асоціативність – аналогічно. Тобто серед усіх цих формул можна вже інтуїтивно проглянути так званий «**принцип двоїстості**».
Як я вже казала: у нас об’єднання і перетин – це дві рівноправні операції. Це виражається навіть в тому, що якщо ми беремо коректну формулу, замінюємо в ній всі об’єднання на перетини і всі перетини – на об’єднання, всі універсальні множини – на порожні, а всі порожні – на універсальні, то ми одержимо знову коректну формулу. Таким чином нам потрібно доводити вдвічі менше формул. Тому, що одну половину довели, – інша робиться заміною операцій.
Зафіксуйте.
Принцип двоїстості
Якщо у нас є істинне твердження, що використовує лише об’єднання, перетин та доповнення множин, і в цьому твердженні ми замінимо всі об’єднання на перетини, а перетини – на об’єднання, всі універсальні множини – на порожні, а всі порожні – на універсальні, то ми одержимо істинне твердження:
$\cup \Leftrightarrow \cap$, **Ø** $\Leftrightarrow U$ **, то одержимо істинне твердження.**

Я вам зараз формулюю без доведення, а потім, коли у вас почнеться курс мат логіки – ви будете доводити це більш загальним випадком… фактично буде виконуватися для багатьох конструкцій, а не тільки для теорії множин.
Зафіксували? Можете користуватися.
Але знову ж таки:
По-перше, вам потрібне істинне твердження, тобто твердження, яке вам потрібно довести;
По-друге, я зафіксувала, що ми використовуємо об’єднання, перетин та доповнення… тут немає різниці… що робити з різницею? Різницю та симетричну різницю можна виразити окремими формулами через об’єднання та доповнення.
Наприклад,
Приклади доведення тверджень
1) Доведемо, що різниця двох множин є перетином першої множини і доповненням до другої множини: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
Перша ваша реакція, якщо вас просять щось довести: малюємо діаграми – і дивимося чи це справедливо.

$A \setminus B$




$A \cap \overline{B}$

Діаграмка показує, що твердження може бути вірне. Чи можна вважати діаграмки доведенням? Ні. Чому? Це моє питання до вас…
Чому діаграмами не може побудуватися доведення?
По-перше: діаграмки не описують множину; вони певним чином ілюструють, певним чином візуалізують… ви бачите, як вони між собою розташовані, але вони не можуть описати елементи, що входять в ці множини.
По-друге: хто вам сказав, що множини A та B розташовані саме так? Що в них є перетин, що в них є елементи, які не входять в інші множини?
Скільки взагалі способів намалювати діаграму для 2 множин?
Відповідь: вони можуть

1) перетинатися,
2) можуть не перетинатися,
3) перша множина може належати (включати, містити) другій,
4) друга може включатися в першу.

Тобто на діаграмах для двох множин потрібно розглядати щонайменше 4 випадки і перевіряти для кожного з них.
Якщо у вас буде 3 множини. Скільки взаємно розташувальних випадків буде? … Скільки? 64. Тому, що у вас є 3 пари і для кожної пари 4 варіанти взаємного розташування. 4*4*4=64 випадки, які потрібно розглядати… Воно вам треба? Якщо у вас буде 4 множини? … ну все, мабуть.
Тому діаграмами ми лише перевіряємо себе: чи дійсно те, що ми доводимо буде вірне. Якщо воно не буде вірно, – діаграмка нам про це може сказати зразу, тоді ми побудуємо контр приклад, який це порушує.
Але це твердження є вірним, тому ми будемо його доводити <u>методом розглядання елементів</u>. *Ото ж зараз – магія!*
Я розглядаю довільний елемент x: $\forall x:\quad x \in (A \setminus B)$. Нехай елемент x належить різниці множин A і B. Тоді за визначенням операції різниці:

$\forall x:\quad x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$ (Визначення операції різниці ми вводили минулої лекції… так?)

Що є в фігурних дужках? … всі повинні знати… Це є одночасне виконання всіх вимог. Так? Дивіться: за визначенням операції доповнення – якщо елемент $x \notin B$, то він належить доповненню:

$\forall x:\quad x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \overline{B} \end{cases}$. За визначенням операції $\cap$: якщо елемент x належить множині A та множині доповнення до B, то він належить їх перетину:

$$\forall x:\quad x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \overline{B} \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}\ .$$

Значить, на кожному кроці я користувалася певним визначенням: визначенням різниці, визначення доповнення, визначення перетину. Я не використовувала більш нічого. Визначення всі задавалися логічними еквівалентностями… так?.. тобто, якщо це різниця, то це дві такі умови і навпаки. Тому, якщо елемент належить $x \in (A \setminus B)$, то він одразу належить $x \in A \cap \overline{B}$. А якщо $x \in (A \setminus B)$, то по цьому ж ланцюгу в зворотній бік – $x \in (A \setminus B)$. Звідси випливає рівність цих множин.
Чи все зрозуміло в тому, як я будую ці логічні переходи?
Звісно, з цього всього: ($\forall x:\quad x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \overline{B} \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}$) буде випливати рівність цих множин: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
Так?

Це перший метод.
Ми можемо розглядати елементи зліва, можемо розглядати елементи справа. Не завжди буде так райдужно… це ми в наступному прикладі побачимо.
Другий метод
В нас є пакован формул, які ми вважаємо правильними і ми можемо їх використовувати. Скажімо, пам’ятаєте: минулого разу, коли ми вводили симетричну різницю – ми її ввели, що це: $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, – а потім, дивлячись на діаграмки, певним чином вивели, що це буде: $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ -? Цього ми не доводили. Зараз доведемо. Діаграмки ми малювали минулого разу… зараз ми будемо використовувати еквівалентні перетворення, тобто це ми це будемо доводити шляхом еквівалентних перетворень.
Ми беремо першу формулу $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ – переписуємо ще раз. Кожну операцію різниці ми можемо позбутися за вище доведеною формулою (оскільки ми її довели – ми можемо її використовувати):
$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})=$.
Я зараз лише проговорюю, що я використовую на кожному кроці. <u>Моя вам добра порада – ви пишіть</u>. Далі… в мене є якась множина, яку я об’єдную з перетином двох множин. Якщо я об’єдную множину з перетином двох множин – я можу використати властивість дистрибутивності і тоді я повинна першу множину об’єднати з другою, першу множину об’єднати з другою другою і результат перетнути:
$=((A\cap\overline{B})\cup B)\cap((A\cap\overline{B})\cup\overline{A})=$
Чому обов’язково ставити дужки? Тому, що операції об’єднання і перетину еквівалентні. Якщо ви не поставите дужки – ви можете їх виконати не в тому порядку, в якому потрібно. Так?
Далі... кожне з цих великих дужок я можу розкрити за дистрибутивністю. Тут є об’єднання з перетином і тут є об’єднання з перетином.
$=(A\cup B)\cap(B\cup\overline{B})\cap(A\cup\overline{A})\cap(\overline{B}\cup\overline{A})=$
Оскільки тут підряд ідуть 3 перетини, то я не ставлю дужок… за асоціативністю.
$=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=$ … за законом де Моргана: якщо у вас є об’єднання доповнень, то це буде доповнення до перетину:
$=(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}=$ за формулою з прикладу 1: якщо у вас є перетин з доповненням до множини – це фактично різниця між цими множинами:
$=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. Все.
Знову ж таки: якщо ви зараз просто перемалюєте всі ці літери, не надпишете над кожним знаком «=» що саме використовувалося на цьому кроці, – то ви зробили зайву роботу.
І знову таки… зверніть увагу, що на кожному кроці я використовувала лише те, що в нас вважається істиною: або це визначення, або (як в даному випадку) перевірка тих властивостей, які ми взяли істинними, щоб не доводити їх. Але, знов-таки: всі ці властивості доведені. Серед іншого ви повинні в якості розумової вправи вчитися доводити їх: сіли – і довели.
Ще у когось є питання? Ні, нам все зрозуміло!!! ☺ Практика покаже.
Зараз доведемо один з законів поглинання, щоб ви бачили, що воно не так все райдужно.
3).
$A\cup(A\cap B)=A$
Потрібно довести, що для довільних множин А та В виконується ось така рівність.
Отже, нам потрібно довести, що одна множина дорівнює іншій множині. В першому прикладі ми це зробили не явно. Але, якщо ми доводимо рівність множин, то що потрібно довести? Що множина $A\cup(A\cap B)$ включається в множину А, а множина А включається в множину $A\cup(A\cap B)$. Адже рівність множин ми визначали як взаємне включення.

Отже, у нас з'являється перше твердження, яке нам потрібно довести:
а) $A \cup (A \cap B) \subseteq A$
що всі елементи множини зліва є елементами множини справа.
Доводимо. Як доводимо? Знову методом розглядання елементів.
Нехай $\Big(\ \forall x \in A \cup (A \cap B) \Rightarrow$. Тоді за визначенням об'єднання:

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in A \cap B \end{array}\right. \Rightarrow$ … тут з'являється <u>квадратна дужка</u>, тобто <u>сукупність</u>… у вас виконується або перше або друге твердження. Далі за визначенням перетину:

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ \begin{cases} x \in A \overset{!}{\Rightarrow} \\ x \in B \end{cases} \end{array}\right.$ – умова $x \in A \cap B$ розпадається на дві умови, які повинні виконуватися одночасно. А далі я роблю магію… якщо у мене елемент *x* одночасно належить множині А та множині В, то він точно належить множині А, – тоді про умову $x \in B$ можна забути (*закреслюю*). Але, що важливо (над «⇒» ставлю знак «!»): <u>це не еквівалентне перетворення</u>! Тобто з цієї умови випливає:

$\overset{!}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in A \end{array}\right. \Rightarrow$, *x* належить А. Але з того, що він належить А я не можу сказати, що він належить множині В. Тому, якщо в попередніх перетвореннях замість «$\Rightarrow$» я могла поставити «$\Leftrightarrow$», то тут я цього зробити не можу. Це наслідок. Це ланцюг лише в один бік. Тобто тут елемент *x* або належить А, або належить А.

$\Rightarrow x \in A \Big) \Rightarrow$. І що у нас вийшло: якщо елемент $x \in A \cup (A \cap B)$, то він обов'язково належить А. З цього за визначенням операції включення з усього цього логічного ланцюга (беру його в дужки) випливає, що множина зліва є підмножиною множини А:
$\Rightarrow A \cup (A \cap B) \subseteq A$.
б) тепер нам потрібно довести, що:
$A \subseteq A \cup (A \cap B)$
Я можу тут сказати, що це є очевидним, тому, що, якщо у мене є об'єднання множини А з чимось, то вся множина А в це об'єднання входить. Але ми підемо складним шляхом; знову я розглядаю певний елемент х, що належить А:
$\forall x \quad x \in A \Rightarrow$. Для чого <u>я йду складним шляхом, щоб показати вам техніку, щоб ви бачили що ви можете робити, що ви не можете робити. І потім цю техніку будете використовувати для доведення більш складних тверджень</u>.
Якщо у мене є елемент *x*, то він же належить певному універсуму, який клас окреслює, тому я можу сказати, що:

$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in U \end{cases} \Rightarrow$ … добре, якщо елемент належить універсуму, то він або належить множині В, або їй не належить… згодні?

$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \left[\begin{array}{l} x \in B \Rightarrow \\ x \in \overline{B} \end{array}\right. \end{cases}$ … дві альтернативи. Пам'ятаєте… якщо об'єднати В з доповненням до В, то ми одержимо універсум. Якщо щось не зрозуміло тут – питайте.
Даля я дивлюсь на оце все і бачу, що х обов'язково належить множині А і або належить множині В, або не належить множині В. Тому я можу умову $x \in A$ приписати до оцих двох одночасно:

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \\ \begin{cases} x \in A \\ x \in \overline{B} \end{cases} \end{array} \right. \overset{!}{\Rightarrow}$$ … що я тут зробила?.. я дужки розкрила… це практично дистрибутивність: я зробила один перетин, другий перетин та об'єднала їх між собою.

Якщо $x \in A$ та $x \in \overline{B}$, то про $x \in \overline{B}$ можу забути – елемент x однозначно належить А.

І знову над «=» ставлю знак «!» – логічний наслідок, який не є зворотним. Тобто я спрощую собі умови, тому я не можу потім повернутися в зворотній бік:

$$\overset{!}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \\ x \in A \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \cap B \\ x \in A \end{array} \right. \Rightarrow x \in A \cup (A \cap B).$$

Отже із того, що $x \in A$ випливає, що він належить $x \in A \cup (A \cap B)$, – звідси випливає, що множина А є підмножиною множини $A \cup (A \cap B)$.

в) А уже з того, що $A \cup (A \cap B) \subseteq A$, а $A \subseteq A \cup (A \cap B)$ – за визначенням рівності множин: $A = A \cup (A \cap B)$.

Чи все вам зрозуміло? Все, що я роблю – законно… послаблюю умову,.. але з того, що я не можу повернути цей логічний наслідок в інший бік – я не можу обійтись одним ланцюгом, як я це зробила в першому прикладі. Там в мене були одні логічні еквівалентності, тому я логічно довела двостороннє включення одразу. Тут я цього зробити не можу, бо ось тут мені потрібно було зробити наслідок… і тому я довела лише включення. Щоб довести включення в інший бік – треба побудувати інший ланцюг в інший бік. Але його я також побудувала… я молодець ☺.

Зрозуміло?