ВЛАСТИВОСТІ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ НА ОДНІЙ МНОЖИНІ

Я зараз сформулюю 11 властивостей, які можуть мати бінарні відношення, заданих на одній множині (A): $R \subseteq A^2$. *І в мене для вас погана новина: ви повинні ці всі слова знати і знати, що ці слова означають. Усі властивості я згрупувала в 4 блоки (усі властивості в кожному з блоків певним чином пов'язані між собою).*

Блок 1: 3 властивості

1) Рефлексивність

бінарне відношення R, визначене на множині A, називається рефлексивним, якщо для довільного елемента множини A він знаходиться у відношенні сам із собою: $\forall a \in A\ a\mathrm{R}a$.

Наприклад

Візьмемо множину цілих чисел Z і операцію $\leq$: чи вірно, що кожен $x \leq x$? Так. То це рефлексивне відношення, бо це виконується для довільного елемента з цієї множини.

Іррефлексивність

Бінарне відношення називається іррефлексивним, якщо для довільного елемента a з цієї множини елемент a не знаходиться у відношенні сам із собою: $\forall a \in A\ a\overline{\mathrm{R}}a$. (що таке $\overline{\mathrm{R}}$? Доповнення. Тобто всі ті a, які не входять у ваші оригінальні пари).

Приклад

Z, $<$ – за певною аналогією. Відношення строго < на множині цілих чисел є іррефлексивним, тому, що для кожного елементу *x* ви не можете сказати, що він строго < сам за себе. *Так?*

Нерефлексивність

Зазвичай в книжках з дискретної математики не виокремлюють цю властивість, тому, що зрозуміло: нерефлексивність – це коли не виконується рефлективність. *Так?* Але я зараз спеціально буду писати цю властивість, щоб ви бачили, що таке «не виконується».

Тобто у вас є умова: $\forall a \in A\ a\mathrm{R}a$, – нам потрібно порушити цю умову: що існує певний елемент a, для якого ця умова не виконується: $\exists a \in A\ a\overline{\mathrm{R}}a$, – тобто існує такий елемент, який не вступає у відношення сам із собою. *Бачите різницю між цим ($\exists a \in A\ a\overline{\mathrm{R}}a$ – тут існує хоча б один; тобто всі інші можуть вступати самі із собою у зв'язки, але один є такий… «паразит», що не вступає) і попереднім визначенням ($\forall a \in A\ a\overline{\mathrm{R}}a$ – тут для будь-якого елементу)?*

Приклад

R, $y = x^2$. Чи буде це відношення рефлексивним? Ні, бо $2^2 \neq 2$.

Чи буде це відношення іррефлексивним? Ні, тому, що $1^2 = 1$.

Отже, це просто не рефлексивне відношення.

Звісно, що умова іррефлексивності більш строга, ніж рефлективності. І коли вас будуть просити класифікувати відношення і воно є іррефлексивним, то ви повинні писати, що воно є іррефлексивним, а не обмежуватися тим, що воно нерефлексивне. *Зрозуміло? Добре.*

Блок 2: 4 властивості

2) Симетричність

Бінарне відношення на множині A називається симетричним, якщо для двох довільних елементів з множини A: $\forall a, b \in A$ – виконується наступна умова: якщо елемент *a* знаходиться у відношенні з елементом *b*, то елемент *b* знаходиться у відношенні з елементом *a*: $a\mathrm{R}b \Rightarrow b\mathrm{R}a$.

Приклад

Множина Z і відношення рівності (=) на ній: якщо $x = y$, то $y = x$.

Але зауважте: в рефлективності умова формулювалася як певне твердження (тобто умова, яку потрібно перевірити і все), тут умова формулюється як логічний наслідок (тобто якщо виконується умова $a\mathrm{R}b$ (елемент a знаходиться у відношенні до b), то обов'язково повинна виконуватися умова bRa). А якщо елемент *a* не знаходиться у відношенні з елементом *b* – ми взагалі не розглядаємо такі елементи. *Це знову ж таки різниця між твердженнями і логічними наслідками, які ви повинні розуміти. Чому? Тому, що потім, коли ми будемо порушувати цю умову – ви повинні розуміти, як її порушувати.*

Антисеметричність

Це найскладніша для розуміння властивість. Я її зараз сформулюю формально, а потім поясню що це означає.

Отже, відношення називається антисиметричним, якщо для $\forall a, b \in A$ виконується наступна умова: якщо $aRb, bRa \Rightarrow a = b$.

Приклад

Візьмемо систему підмножин (2^B) і відношення включення ($\subseteq$). Тоді, якщо *a* є включенням по *b*, а *b* є включенням по *a*, то згідно визначення рівності множин множини A та B співпадають. Отже, відношення включення не є симетричним, – воно є антисиметричним.

Асиметричність

Відношення R називається асиметричним, якщо виконується така умова: $\forall a, b \in A$ якщо $aRb \Rightarrow b\overline{R}a$. *Поки що пишіть… ☺… розуміння прийде згодом…*

Приклад

Відношення строгого включення: 2^B, $\subset$ – є асиметричним, бо якщо множина A є строго включеною в множину B, то навпаки неможливо ніколи.

І ось тут різниця між антисеметричністю і асиметричністю: «симетрично» – зрозуміло: у вас однакове, що в один бік, що в інший; «антисеметричність» і «асиметричність» забороняють симетрію, тобто, якщо у вас є в один бік, то в інший нічого не має бути; але при цьому «асиметричність» забороняє взагалі будь-яку симетрію, а антисеметричність – вона дозволяє одну єдину симетрію – «однаковість».

Тобто асиметричні відношення за визначенням є іррефлексивним, бо якщо замість aRb підставити $a = b$, тобто: $\forall a, a \in A$ якщо aRa *повинновипливати* $a\overline{R}a$ – це не можливо, тому жодної такої пари у R не має. Тому асиметричні відношення є іррефлексивними одразу. А антисиметричні – не є іррефлексивним: можуть бути, а можуть не бути.

Несиметричність

Несиметричність – це просто порушення умови симетричності. *Як ми будуємо порушення логічного наслідку? Ви повинні навести контр-приклад.* Тобто існує певна пара елементів $\exists a, b \in A$, що з того, що виконується ліва частина логічного наслідку: aRb випливає заперечення цього: $aRb \Rightarrow b\overline{R}a$.

Отже, відношення може бути або симетричним, або несиметричним. Якщо воно не симетричне, то, зокрема, воно може бути антисиметричне, або ще більш строга умова – може бути асиметричне. Тобто у вас несиметричність $\rightarrow$ антисиметричність $\rightarrow$ асиметричність – за порядком збільшення строгості формулювань.

Блок 3: 2 властивості

3) Транзитивність

Ми кажемо, що бінарне відношення є транзитивним, якщо для довільних трьох елементів: $\forall a, b, c \in A$ якщо aRb і bRc, то aRc: aRb, $bRc \Rightarrow aRc$.

Приклад

З нетривіальних прикладів: L – множина усіх прямих; розглянемо відношення паралельності: якщо пряма *a* паралельна прямій *b*, а пряма *b* паралельна прямій *c*, то прямі *a* і *c* паралельні. *Сама назва «транзитивність» вказує, що ви певну властивість «протягуєте певним шляхом». Так?*

Чи є порожнє відношення транзитивним? Порожнє відношення – це відношення, що не містить жодної пари. Порушується умова: aRb, bRc, – адже мені потрібно обрати дві пари та ще й з однаковими кінцями, – в порожньому відношенні таких пар немає, тому ми не можемо порушити умову aRc, тому порожнє відношення транзитивне. *Я це знову проговорюю, тому що інтуїтивно це здається «нісенітницею», але це випливає з формального означення, тому це потрібно враховувати.*

Нетранзитивність

І відповідно відношення є нетранзитивним, якщо у вас існує трійка елементів *a, b, c,* які порушують умову транзитивності, тобто $\exists \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{A}$: $aRb, bRc \Rightarrow a\overline{R}c$.

Приклад

Знову очевидний, здається: множина прямих і відношення перпендикулярності: L, $\perp$. Тобто, якщо пряма *a* перпендикулярна прямій *b*, а пряма *b* перпендикулярна прямій *c*, то на площині прямі *a* і *c* не можуть бути перпендикулярними.

Зрозуміло? Ще трошки…

Блок 4: 2 властивості

4) Зв'язність

Відношення R називається зв'язним (totality), якщо для двох довільних елементів *a* та *b:* $\forall \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{A}$ у вас або aRb, або bRa.

Що одразу випливає із властивості зв'язності? Тобто зв'язні відношення поєднують всі елементи нашої множини тим чи іншим способом. Так? Що буде, якщо підставити $\mathrm{b} = \mathrm{a}$? Це ж два довільних елемента? Так. Тоді або а знаходиться у відношенні з а, або а знаходиться у відношенні з а. І це повинні бути якісь елементи. Тобто, якщо відношення зв'язне, то воно автоматично рефлексивне – кожен елемент повинен входити у відношення сам із собою.

Іноді це погано. Іноді нам не треба розглядати однаковість, тому є ще поняття «слабка зв'язність».

Слабка зв'язність (connexity)

Ми кажемо, що відношення є слабко зв'язним, якщо для $\forall \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{A}$ з того, що $\mathrm{a} \neq \mathrm{b}$ випливає, що або aRb, або bRa.

Відмінність в тому, що зв'язність вимагає рефлективності, а слабка зв'язність взагалі не розглядає зв'язок елементів самих із собою.

Приклади

Якщо на множині R-чисел у нас відношення $\leq$, то воно є зв'язним відношенням. Бо про довільні два числа можна сказати, що одне є менше, або рівне за інше.

А якщо взяти відношення строго <, то це буде слабко зв'язане відношення, тому що про довільні два різних числа ви можете сказати, що одне є строго меншим за інше, а про два однакових числа ви не можете сказати нічого… а і не треба. Так?

А якщо ви візьмете систему підмножин 2^B і відношення включення $\subseteq$, то воно не буде зв'язне, тому що я можу навести приклади двох підмножин, жодне з яких не буде включатися в іншу. Наприклад, $\{1\}$ і $\{2\}$ – два різні елементи і ці підмножини не зв'язані між собою. То це відношення не є зв'язним.

Розуміння ще прийде… ☺

Перевірка властивостей бінарних відношень

Я зараз сформулюю 3 леми, як перевіряти ці блоки властивостей.

Лема 1. Назвемо діагоналлю множини А – множину всіх пар виду (a, a), де а пробігає всі елементи множини А: (діагональ множини А позначається: i_A або (в деяких джерелах) Δ_A) $i_A = \Delta_A = \{(a, a) \mid \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}\}$.

Яке відношення описує діагональ? Діагональ описує відношення тотожності – співпадання двох об'єктів даної множини. Чому називається «діагональ»? Як виглядає матриця цього відношення? На діагоналі будуть одинички, а всі інші елементи – нулі.

Кому зрозуміло, – підніміть руки… ☺

Малюєте ви матрицю цього відношення. Це множина упорядкованих пар, тобто підмножина декартового добутку, значить це є відношення. Яке це відношення? В цьому відношенні діагональ буде одиничною, а всі інші елементи – нулями.

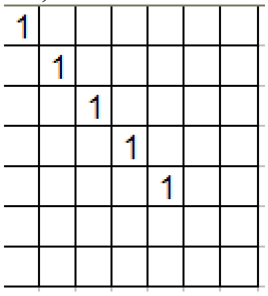

Рис. 1

Так от, **бінарне відношення R на множині A (** $R \subseteq A^2$ **) є <u>рефлексивним</u> тоді та тільки тоді, коли діагональ є його підмножиною:** $i_A \subseteq R$ **.**

Бінарне відношення $R \subseteq A^2$ є іррефлексивним, тоді і тільки тоді, коли $i_A \cap R = \varnothing$.

Чи зрозумілі вам ці твердження? Розумієте, що це лише 8 лекція? ☺ А їх ще попереду стільки ж. ☺

Лема 2. **Бінарне відношення на множині A є <u>симетричним</u> тоді і тільки тоді, коли воно співпадає із власним оберненим відношенням**: $R \subseteq A^2$ – симетричне $\Leftrightarrow R = R^{-1}$.

Це знов-таки повинно бути інтуїтивно зрозуміло: ви поміняли усі пари місцями – і одержали те, що було. Чому? Тому, що воно симетричне.

Бінарне відношення $R \subseteq A^2$ **– <u>антисиметричне</u>** $\Leftrightarrow$ $i_A \cap R \subseteq i_A$ (коли у нього та оберненого відношення спільні елементи – лише пари виду (a,a)).

Бінарне відношення $R \subseteq A^2$ **– <u>асиметричним</u>**, коли в нього взагалі немає спільних елементів із своїм оберненим відношенням: $R \cap R^{-1} = \varnothing$.

Обернене відношення відповідає за симетрію. Леми, які я формулюю, повинні вам вказувати вам алгебраїчний шлях визначення властивостей відношень.

Скажімо, коли ви будете це програмувати, – в матричному представленні всі ці умови перевіряються дуже швидко.

Лема 3. **Бінарне відношення** $R \subseteq A^2$ **на множині A є <u>транзитивним</u>** тоді і тільки тоді, коли його степінь (квадрат, власне) є підмножиною вихідного відношення: $R^2 \subseteq R$.

Тут ми сформулювали 6 тверджень, але це логічна еквівалентність – насправді тверджень тут 12 (справа наліво, зліва направо).

Зараз розглянемо 2 досить важливі приклади. А потім поговоримо про ці твердження. І взагалі щось доводити на відношенні.

Приклади

1) візьмемо множину цілих чисел Z і визначимо на ній відношення порівнянності за модулем, яке я позначу ось так: $\langle Z, \equiv_n \rangle$ ($\langle \ \rangle$ – алгебраїчна система; тобто є множина Z і на ній визначено відношення порівнянності за модулем). Тобто $(x \equiv_n y) \Leftrightarrow (x \equiv y (\mathrm{mod}\, n)) \Leftrightarrow ((x - y) \vdots n)$ (*другий вираз – більш канонічний*).

Тобто які елементи – які цілі числа поєднуються цим відношенням? Якщо вони при діленні на *n* дають однакову остачу. Так?

Пам'ятаєте, ми минулого разу розглядали розбиття цілих чисел на клас чисел, які поділяються на 3, які поділяються і дають остачу 1, які поділяються і дають остачу 2.

Так ось це відношення – всі числа в першому класі поєднує між собою, всі числа в другому класі поєднує між собою і всі числа в третьому класі поєднує між собою. Тому, що, якщо вас *x* та *y* дають однакову остачу, то їх різниця поділяється на n. А, якщо різну, – то не поділяється. Так?

Що ви можете сказати про це відношення? Чи є воно <u>рефлексивним</u>? Треба перевірити.

Тобто треба перевірити умову, що x завжди знаходиться у відношенні сам із собою: $x \equiv_n x \Leftrightarrow (x-x) \vdots n \Leftrightarrow 0 \vdots n$ (це рівносильно тому, що $(x-x)$ повинно ділитись на *n*, але $(x-x)=0$, а 0 ділиться на будь-яке число, зокрема на *n*). Тобто це є істинне твердження. Тому наше відношення є рефлексивним. Згодні?

Чи є наше відношення <u>симетричним</u>? Знову: беремо означення симетричності. З того, що $x \equiv_n y \Rightarrow y \equiv_n x$ () для довільних елементів x та y. Дивимося: якщо $x \equiv_n y \Rightarrow (x-y) \vdots n \Rightarrow (x-y) = k \cdot n, k \in Z \Rightarrow (y-x) = -k \cdot n \Rightarrow (y-x) \vdots n \Rightarrow y \equiv_n x$.

Тобто я використовую в цьому доведенні: означення симетричності і умову $((x - y) \vdots n)$.

Чи є моє відношення <u>транзитивним</u>?

За умовою: якщо $x \equiv_n y, y \equiv_n z \Rightarrow x \equiv_n z$. Давайте перевіримо чи виконується ця умова.

$$x \equiv_n y, y \equiv_n z \Rightarrow \begin{cases} x - y = kn \\ y - z = tn \end{cases}, k,t \in Z \Rightarrow (x-z) = (x-y) + (y-z) = (k+t) \cdot n, k,t,(k+t) \in Z \Rightarrow$$

$\Rightarrow (k+t)n \vdots n$, тому умова транзитивності виконується.

Так ось, такі бінарні відношення, які є рефлексивними, симетричними і транзитивними називаються **відношеннями еквівалентності**. І вони визначають нетривіальні рівності між елементами нашої множини. Тобто бачите, що у вас за модулем 5, 1 і 6 – це два різних числа, але вони є однаковими, тому що дають однакову остачу. Нам це важливо. Зрозуміло?

2) Візьмемо множину натуральних чисел: $\langle N, \vdots \rangle$ – воно очевидно не є зв'язним. Чому?

Подільність, тобто ми кажемо, що x поділяється на y тоді і тільки тоді, коли існує певне натуральне число k, що $x = ky$: $(x,y) \Leftrightarrow (\exists k \in N \; x = ky)$.

Чи є це відношення <u>рефлексивним</u>?

Звісно, x завжди поділяється сам на себе. Тобто $x = 1 \cdot x \Rightarrow x \vdots x$.

Але воно не є симетричним. Адже, якщо $x \vdots y$, то не факт, що $y \vdots x$.

Але воно є <u>антисиметричним</u>. Зараз ми це доведемо. Нехай у вас $x \vdots y, y \vdots x$, тоді згідно нашого визначення: $\exists k_1, k_2 \in N \begin{cases} x = k_1 y \\ y = k_2 x \end{cases} \Rightarrow$. Згодні? Тоді, якщо я підставлю другу рівність у першу, я одержу: $\Rightarrow 1 = k_1 \cdot k_2 \Rightarrow$. Згодні? Які можуть бути натуральні числа k_1 і k_2, щоб їх добуток дорівнював 1? Перша одиниця і друга одиниця. В множині натуральних чисел більше розв'язків не має: $\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1, \\ k_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y$. Тобто, якщо виконуються ось ці дві умови: $x \vdots y, y \vdots x$, – то обов'язково $x = y$. Так?

Транзитивність самі сформулюйте і доведіть. Воно є <u>транзитивним</u>.

Бінарні відношення, що мають такі три властивості: рефлексивні, антисиметричні і транзитивні, – це **відношення часткового порядку**. Це відношення, які дозволяють в нашій множині певним чином впорядкувати елементи за важливістю. Але частково, тому що не кожні два елементи можна буде порівняти. Скажімо, 2 і 3 не будуть порівняними за цим відношенням, бо ні 2 на 3 не ділиться, ні 3 на 2 не ділиться.

Чи є у вас якісь питання? ☺ Чи, може розглянемо ще щось? ☺

Дякую за пару!