ТЕОРІЯ ВІДНОШЕНЬ

У нас перші 3 лекції були присвячені множинам. Ми множини якось визначили, навчились з ними працювати. Але множина – це лише сукупність певних об'єктів, а нас цікавлять зв'язки між цими об'єктами. І ось ці зв'язки – вони моделюються певним чином (формулюються) мовою так званих «відношень».

І одразу визначення.

m-арне відношення на множинах $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – це просто певна підмножина $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ декартового добутку цих множин.

Відношення традиційно позначається літерою R. Чому? (**relation**)

Яка підмножина? Будь-яка. Будь-яка підмножина є певним відношенням на цих об'єктах. Нагадую: декартовий добуток – це сукупність впорядкованих емов, де перший є з A_1, другий – з A_2, третій – з A_3 і т.д.

Відповідно m-арне відношення на множині A – це просто підмножина m-го декартового степеня: $R \subseteq A^m$.

Я зауважую,… я буду казати: «відношення», «відношення», «відношення», – але ви повинні пам'ятати що «відношення» не існує. Ви завжди повинні вказувати – скільки об'єктів пов'язує ваше відношення за раз – арність, і на яких множинах це відношення визначене, бо інакше ви розмовляєте ні про що.

Звідки така «дивна» форма **m-арне**? З латини:

1) Найпростіші відношення – це **унарні відношення**, коли у вас $R \subseteq A$, $m = 1$; унарні відношення у нас просто виокремлюють певну ознаку, за якою ми класифікуємо наші об'єкти; скажімо в множині натуральних чисел можна виокремити підмножину простих чисел – це буде унарне відношення простоти; можна, скажімо, виокремити множину від'ємних чисел в множині цілих чисел – і це буде унарне відношення від'ємності (якщо це зробити над множиною цілих чисел – це буде одне відношення, якщо над множиною дійсних чисел – відношення від'ємності, але це зовсім інше відношення, тому що зовсім інший базис); в множині всіх квадратних рівнянь можна виокремити рівняння, які мають два різні розв'язки. Тобто довільна підмножина певним чином задає якусь ознаку. Цю ознаку можна трактувати як певне відношення. Зрозуміло?

2) Бінарні відношення: (коли ви пов'язуєте об'єкти з двох множин) $R \subseteq A \times B$, $m = 2$ – це найпоширеніший і найбільш досліджений випадок відношень. Ми бінарним відношенням присвятимо, мабуть, усе, що у нас залишилося з теорії.

Ви добре знаєте, що таке бінарне відношення. Ви неодноразово ними користувалися. Скажімо:

– це відношення $\leq$, $<$ (строго менше), або просто $=$ на числах (*окремо на* N, *окремо на* Z, *окремо на* Q, *окремо на* R); *(«+», «-», «/», «*» – це операції, бо внаслідок їх застосування є результат; а відношення – або воно є, або його немає; до операцій над відношенням ми ще дійдемо… не сьогодні, але дійдемо);*

– це відношення $\subseteq$, $\subset$ включення (нестрогого, строгого) на множинах: ми обираємо певний універсум, розглядаємо всі його підмножини і в них визначаємо ось ці два відношення;

– відношення включення об'єкта в множину $\in$ – це теж відношення, але в якості множини B тут виступає множина множин, а в якості множини A – щось – множина якихось об'єктів, які ми трактуємо як елементи цих множин;

– відношення паралельності, відношення перпендикулярності окремо на множині прямих (тобто ви розглядаєте дві прямі – вони будуть паралельні чи перпендикулярні, чи не паралельні чи не перпендикулярні), маєте розглядати відношення між прямими і площинами, наприклад (у вас пряма і площина можуть бути паралельні, можуть бути перпендикулярні, можуть не бути ні те, ні інше).

Взагалі бінарних відношень тисячі. Вони нас оточують звідусіль. І ми їх будемо досліджувати.

3) Тернарні відношення: (відповідно, коли ви зв'язуєте три об'єкти) $R \subseteq A \times B \times C$, $m = 3$.

Класичний приклад: чи можна з 3 заданих відрізків побудувати трикутник? З певних можна, а з певних – не можна. І ось це відношення на множині відрізків.

Чи утворюють 3 вектори замкнутий контур?

Розглянемо множину навчальних дисциплін, множину груп і множину аудиторій. Тоді тернарне відношення: група – дисципліна – викладається в аудиторії (*група такато буде вивчати певну дисципліну в аудиторії такій то*). Як назвемо це тернарне відношення? … Розклад (штатний розклад). Але насправді, якщо ви подивитеся на наш розклад, то ви побачите, що це не тернарне відношення. Що ми ще забули? Є ще час, тобто на якій парі це буде, є ще викладач, тиждень, є ще маркер: це в нас лекція, практика, семінар, лабораторна робота, комп'ютерний практикум, факультатив, консультація… І ось це вас повинно навести на думку: яку IT-технологію побудували на основі відношень? *Напружуйте мозок: у вас є величезна таблиця, яка описує всі можливі зв'язки….* Реляційні бази даних (*SQL – це мова; мова, що можна робити з отими записами*). Тобто у вас реляційні бази даних містять інформацію у вигляді таблиць, що фактично є описом певного відношення певної арності; і ви можете з цими таблицями щось робити: об'єднувати, перетинати, обирати з лівої колонки, за правою колонкою. Мова SQL дозволяє нам це робити. Але фундамент цієї математики – це ось – це відношення і їх властивості, які ми зараз будемо розглядати. Зрозуміло?

Які операції можна робити з відношенням?

По-перше, згідно з визначенням ($R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$) m-арне відношення є підмножиною, тобто воно є множиною. Тому операції над множинами можна робити і з відношеннями.

Зафіксуйте, будь ласка. Для двох відношень однакової арності на однакових множинах ви можете застосовувати $\cup$, $\cap$, \, Δ та доповнення, – і одержувати в результаті – відношення цієї ж арності на цих же множинах.

Зауважу: якщо у вас буде два відношення різної арності або на різних множинах, то ви теж можете застосовувати $\cup$, $\cap$ і все інше, але врезультаті ви не будете одержувати відношення. Ту множину, яку ви одержите в результаті такої операції – вона не буде підпадати під це визначення ($R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$).

А якщо арність співпадає, множини співпадають, то в результаті одержите таке відношення.

Якщо у мене є операція доповнення, – мені потрібний універсум. Бо в мене є доповнення до універсуму. Що буде виступати універсамом? Дивіться визначення: ми розглядаємо підмножини декартового добутку. Тобто для відношень універсамом буде ця множина, з якої ми власне обираємо зв'язки. Вона має назву – і це буде область визначення або буде зручно – «домен». Ми будемо казати про відношення, які визначені на заданому домені.

Знову таки. Коли ми говоримо про функцію: функції є частковими випадками відношень, – то там домен і область визначення не вся множина, а це її частина. Так… з цим все зрозуміло?... нічого складного.

Переходимо власне до вивчення бінарних відношень.

Бінарні відношення як частковий випадок відношень загального виду мають більше потрібних нам властивостей і більше засобів для обробки.

Способи представлення (подання) бінарних відношень

(З цього моменту, якщо я кажу про відношення, потрібно вважати, що я кажу про «бінарне відношення»)

Для бінарних відношень є 3 способи подання зручних в тому чи іншому випадку.

1) явний спосіб (коли ви просто перелічуєте всі пари, які належать цьому відношенню)

Скажімо, є у вас множина $A=\{a,b,c,d\}$, є у вас множина $B=\{0,1,2\}$. І ви пишете, що відношення $R=\{(a,0),(a,1),(b,2),(c,2)\}$. Можете написати інші пари, але вже буде інше бінарне відношення на цих множинах.

2) (Другий спосіб для людей) Це так звана **«стрілкова діаграма»**.

Виглядає це приблизно так (якщо у мене елементи поєднані – я малюю стрілку):

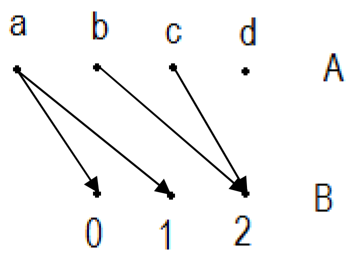

Рис. 1

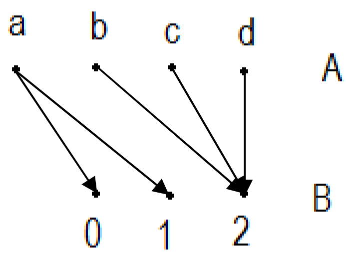

Рис. 2

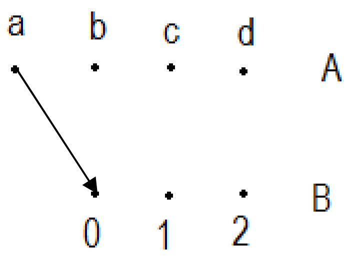

Рис. 3

(я розгляну ще таке відношення: $R_2=\{(a,0),(d,2)\}$. Як побудувати об'єднання і перетин відношень R і R_2? Рис. 2: об'єднання відношень; рис. 3: перетин відношень. Різницю та симетричну різницю самі побудуєте ☺).

Це діаграма, яка відображає які елементи поєднані з якими. Традиційно малюється зверху вниз. Але це не обов'язково. Тобто тут не має якоїсь формулістики. Це просто зручний засіб, щоб ми самі бачили, що тут відбувається.

!!! Порожня множина – це теж бінарне відношення: відношення, що не поєднує нічого і не з чим. Діаграма буде взагалі без стрілок.

Діаграми є зручними, коли ми будемо виконувати операції над множинами. Тобто: якщо у вас є два відношення і треба знайти їх об'єднання. Як буде виглядати об'єднання двох відношень? Ви просто малюєте всі стрілки на одній діаграмі.

Як буде виглядати діаграма перетину? Ви малюєте всі стрілки. Ті, які двічі наведені – ті залишаєте. *Так? Здається, що все зрозуміло.*

3) Матричне представлення.

	0	1	2
a	1	1	0
b	0	0	1
c	0	0	1
d	0	0	0

Ми можемо намалювати матрицю. Для цього відношення $R=\{(a,0),(a,1),(b,2),(c,2)\}$ на цих множинах – це буде матриця 4×3. В неї рядки будуть пронумеровані елементами множини $A=\{a,b,c,d\}$, а стовпчики елементами множини $B=\{0,1,2\}$. Якщо у мене упорядкована пара є (наприклад, $(a,0)$ – елемент a поєднаний з елементом 0), то я намалюю в матриці 1 і т.д.

Буде ось така матриця.

Тобто я ставлю 1, якщо пара входить; ставлю 0, якщо пара не входить.

Власне, якщо ви пам'ятаєте друге доведення теореми про булеан: там ми множину міняли на бітовий вектор – тут те ж саме, тільки тут не вектор, а матриця, бо у нас декартовий добуток (у нас дві множини, які ми поєднуємо разом).

Матричне представлення дуже зручне, бо дозволяє автоматично обчислювати майже все, що можна зробити з відношенням. Це представлення досить добре для комп'ютерів, для програмної реалізації.

Але, оскільки, ми біжимо значно швидше, ніж ваш курс лінійної алгебри, тому ви ще не знаєте, що можна «витворяти» з матрицями. Тому ми до цього повернемося, коли будемо досліджувати графи. Там аналогічне представлення має місце. Там ми вже будемо знати, що з цим можна робити.

Для бінарних відношень існує дві спеціальні операції (вони існують лише для бінарних відношень).

Операції над бінарними відношеннями

1) Нехай в мене є бінарне відношення, задане на множинах A та B: $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$. Оберненим відношенням (inverse): $\mathrm{R}^{-1} \subseteq B \times A$ – це є відношення, задане на множинах B та A. І множина $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$ – складається з таких пар (b,a), якщо пара (a,b) належить відношенню R.

Навіщо це робити? Тому, що я можу. ☺ Є відношення, скажімо, викладачі і дисципліни. Я можу викладати дискретну математику, комбінаторний аналіз, криптологію, спеціальні розділи та ін. А буває, що мене цікавлять яку дисципліну можуть викладати викладачі на кафедрі. І тут визначається, що дискретну математику можу викладати я, може ще дехто з викладачів кафедри.

Тобто в нас важливий порядок і відношення обернене цей порядок змінює – акценти по іншому розставляє. Зрозуміло? Добре.

Забула сказати, що саме для бінарних відношень є досить зручна мутація. Замість того, щоб писати ось так: $(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in R$ можна писати aRb. Тому замість $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$ можна записати: $R^{-1} = \{(b,a) \mid \mathrm{aRb}\}$. Так ми будемо писати досить часто, бо перший раз ми писали 7 символів, а так – 3. А математики – вони ліниві… ☺

З цим все зрозуміло?

Як виглядає стрілкова діаграма для оберненого відношення? Беремо діаграму – перевертаємо догори ногами – і всі стрілки перегортаємо догори ногами. Все.

Як виглядає матриця для оберненого відношення? Транспонована матриця: берете головну діагональ – і перегортаєте. Якщо вона квадратна – вона залишиться квадратною, але все зміниться, якщо вона прямокутна: вона буде інший прямокутник. В нашому випадку з прямокутника 3×4 буде прямокутник 4×3.

2) Нехай у вас є два відношення: $\mathrm{R}_1 \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ (одне визначене на множинах A та B), $\mathrm{R}_2 \subseteq \mathrm{B} \times C$ (а друге визначене на множинах B та C). Тоді композицією (англ. composition) відношень R_1 та R_2 назвемо бінарне відношення $\mathrm{R}_3 = R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$ ($\circ$ – це спеціальний символ для композиції), яке буде визначене на множинах A та C ; визначається воно ось так: $\mathrm{R}_3 = R_1 \circ R_2 \{(a,c) \mid \exists b \in B : aR_1 b, bR_2 c\}$. Зауважте, що при цьому я можу написати, що a є елементом множини A, тому, що за інших умов умова $\mathrm{aR}_1 b$ не виконається (так само, що c є елементом множини C).

Що нам дає композиція? Вона дозволяє будувати складні зв'язки між елементами.

Попереджаю, що в деяких джерелах (які більш матаналіз, ніж дискретка) часто потрібно читати $\mathrm{R}_3 = R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$ в інший бік: спочатку R_2, потім – R_1. В деяких спочатку R_1, потім – R_2. Я пишу так, щоб це було семантично зрозуміло: у вас a спочатку йде з b, потім йде з c.

Є, скажімо, композиція функцій – коли ви результат однієї функції підставляєте в іншу. І там є різні читання, в якому порядку виконувати ось ці функції.

Добре.

Як будувати композицію за стрілковою діаграмою? Потрібно намалювати дві стрілкові діаграми, зістикувати їх і подивитися, що вийде.

Приклад

Беремо множину $\mathrm{A} = \{a,b,c,d\}$, множину $B = \{0,1,2\}$, множину $C = \{$ 🙂, 😟, 😐, 😃 $\}$. Відношення R_1 таке саме, яке в нас було – це $R_1 = \{(a,0),(a,1),(b,2),(c,2)\}$. Відношення R_2 визначаємо на множинах B та C, скажімо: $\mathrm{R}_2 = \{(0,$ 🙂$),(1,$ 😃$),(1,$ 😐$)\}$.

Малюємо дві діаграми (рис. 4). Далі я беру кожен елемент з множини A – і дивлюся до яких елементів з множини C я можу досягти, «мандруючи» ось цими стрілками. І бачу, що відношення R_3 буде складатися з яких пар? $\mathrm{R}_3 = \{(\mathrm{a},$ 🙂$),(a,$ 😐$),(a,$ 😃$)\}$ – це є результат композиції відношення R_1 та R_2.

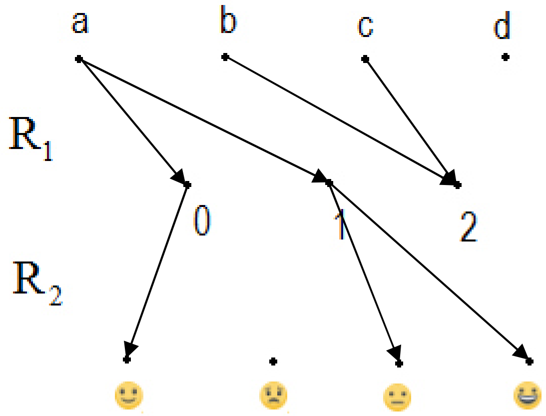

Рис. 4

Зрозуміло?

Тобто тут все зрозуміло.

Якщо будувати композицію не діаграмою, а згідно визначення, тобто згідно цієї умови: $R_3 = R_1 \circ R_2 \{(a,c) \mid \exists b \in B : aR_1b, bR_2c\}$, – то що нам потрібно зробити? Ми беремо кожну пару з першого відношення, дивимося, який тут останній елемент, шукаємо його на першому місці в парах другого відношення – і з'єднуємо краї. Але це ви повинні раз проглянути, два проглянути, три проглянути…

Проте композицію $R_2 \circ R_1$ ви побудувати не зможете, бо цього взагалі не існує! Чому? Відношення R_2 визначене на множинах В та **С**, відношення R_1 визначене на множинах **А** та В. Щоб композицію можна було побудувати ці дві множини повинні співпадати. А в такому порядку вони не співпадають. Тому цього: $R_2 \circ R_1$ – не існує взагалі.

А якщо, скажімо, у вас є два відношення, задані на одній множині: $R_1 \subseteq A^2$, $R_{21} \subseteq A^2$, – то ви, звісно, можете побудувати композицію відношення $R_1 \circ R_2$ (бо у вас там усюди множина А і, звісно, що вона усюди співпадає сама із собою), ви можете побудувати і інше відношення $R_2 \circ R_1$. Але ці два відношення будуть різними: $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$. Довільний контр-приклад намалюйте дома. Берете два відношення і будуєте композицію в один бік і композицію в інший бік. Побачите, що одержите два різних результати. Зрозуміло?

Доречі, якщо у вас є бінарне відношення $R \subseteq A^2$, яке задане на одній множині, то його степенем ми називаємо n-кратну композицію цього відношення самого із собою: $R^n = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n}$. І знову таки: не потрібно плутати це із декартовим степенем, як це я намагалася зробити на початку. Тобто, якщо у вас є декартовий степінь множини, то це буде певна сукупність впорядкованих елементів; якщо у вас є степінь бінарного відношення, то це буде n-кратна композиція… що одержимо в результаті? …– бінарне відношення на цій самій множині. Зрозуміло?