

2) Скільки взагалі існує чисел від 1 до N, які взаємно прості з заданим числом N?

Що таке взаємно прості числа? Взаємно прості числа – це числа, які не мають спільних дільників, окрім одиниці.

Тобто ми повинні обчислити потужність множини таких натуральних чисел, які належать цьому проміжку і не мають нетривіальних спільних дільників із числом N:

$$\varphi(N) = \#\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq N, \text{НД}(x, N) = 1\}$$

– функція Ойлера (*Euler's totient(? Ніхто не знає) function*)

Отже, як обчислювати це число?

По-перше, кожне натуральне число ми можемо розкласти на прості дільники. Можемо? В 5 класі ще повинні розкласти. Так?

Тобто я маю число $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$. Можу представити це число, де p -прості числа, а α – це певний степінь. Зветься це канонічний розклад числа.

Отже, якщо у вас число x має спільний дільник із числом n , то цей спільний дільник повинен ділитися або на p_1 , або на p_2 , або на p_3 , або на p_t . *Це зрозуміло?*

(Якщо у вас $N = 2^{30}$, то які спільні дільники можуть бути в цього числа з іншими числами? $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{30}$; якщо буде $N = 2^{30} \cdot 3^{20}$: будуть усі степені 2-ки, усі степені 3-ки та їх множення; а спільний дільник «5» не буде, тому, що N не ділиться на 5; не може виникнути спільних дільників, окрім добуток степенів цих простих чисел).

Позначимо через A_i множини таких чисел, які лежать в інтервалі від 1 до N і поділяються на задане просте число p_i , яке ми взяли із розкладу нашого числа N:
 $A_i = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq N, x : p_i\}$.

Тоді що можна сказати про числа з множини A_i ? Вони точно не є взаємно простими з N.

Бо в них є спільний дільник, щонайменше ось цей – p_i .

Тому функція Ойлера для числа N: це мені потрібно взяти всі числа від 1 до N – і відняти всі числа, що входять до множин A_i . Тобто це буде: $\varphi = N - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_t|$. Зрозуміло?

А чому дорівнює потужність множини A_i ? Множина A_i містить всі числа, що діляться на p_i -те (кожне p_i -те число буде ділитися на p_i). Тому: $|A_i| = \frac{N}{p_i}$.

А чому дорівнює потужність попарного перетину? $|A_i \cap A_j| =$

Перетин цих множин – це всі числа, які поділяються і на p_i і на p_j . Відповідно це буде

кожне $p_i p_j$ -те число: $|A_i \cap A_j| = \frac{N}{p_i p_j}$. Так?

Якщо в мене буде перетин по три – це всі числа, що поділяються на $p_i p_j p_k$:

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{N}{p_i p_j p_k}.$$

І тоді, якщо ми застосуємо для того виразу: $\varphi = N - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_t|$, – формулу включень та виключень, то ми побачимо, що функція Ойлера:

$$\varphi(N) = N - \sum_{i=1}^t \frac{N}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j} \frac{N}{p_i p_j} - \sum_{1 \leq i < j < k} \frac{N}{p_i p_j p_k} + \dots + (-1)^t \frac{N}{p_1 p_2 \dots p_t}$$

по 5, «+» сума по 6 і т.д. В кінці будемо мати ↑)

Якщо ми уважно подивимося на цей вираз, то можна побачити, що це розклад ось цього

$$\text{виразу: } = N \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_t}\right).$$

Цей факт я зараз залишаю без доведення, а ви вдома подивіться: доведіть методом математичної індукції.

Нарешті ми можемо перейти до нової теми.

Сьогодні ми повинні розглянути методи конструювання складних множин, коли у вас є певні прості.

Першою такою складною множиною є так званий булеан.

Булеаном множини A ми називаємо **множину всіх її підмножин**.

Традиційне позначення для булеана: 2^A . Але я підкреслюю: це не 2 піднести до степеня множина A , – тобто 2^A – це не операція, це символ, що означає булеан!!! Це лише позначення для булеана.

Є альтернативні позначення для булеана: $P(A)$ або $B(A)$.

Чому саме такий символ (2^A) зараз покажу.

Ну і формальне визначення: $2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$ – булеан це є множини, які є підмножинами множини A .

Які є очевидні властивості булеана?

$\emptyset \in 2^A$ – пуста множина є елементом будь-якого булеану (бо порожня множина завжди є множиною будь-якої множини);

Наша вихідна множина також завжди є власною підмножиною, тому вона завжди належить нашому булеану: $A \in 2^A$.

Тобто ці дві властивості є тут (які виконуються для будь-яких множин).

А скільки взагалі підмножин буде в нашій множині?

Якщо наша множина A скінченна, то в мене є теорема.

Теорема (про потужність булеана): **якщо** множина A **є скінченною** і містить n елементів, то її булеан містить 2^n елементів. Тобто потужність булеану обчислюється за допомогою такого виразу: $|2^A| = 2^{|A|}$. Або: $|A| = n \Rightarrow |2^A| = 2^n$. Що одне і те ж саме.

Якщо в мене множина A складається з 1 елемента. То скільки в неї підмножин? 2. Які? \emptyset та сама множина A .

Якщо в мене множина A складається з 2 елементів: $A = \{a, b\}$, то в мене є: $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Можна перевірити для 3-4 елементів множини. І ми бачимо, що твердження здається коректним. Добре. Нам це потрібно доводити. Як ми це будемо доводити? Методом математичної індукції.

Але це буде один з його способів, який ми сьогодні розглянемо.

Доведення

(1-ий спосіб).

Отже, доводимо методом математичної індукції. З чого починаємо? З бази.

Яку беремо базу? $n = 0$.

У нас в множині може бути 0 елементів, але менше 0 бути не може.

(математична індукція – ми починаємо з найменшого числа, яке у нас є).

Отже, якщо $n = 0$: 2^{\emptyset} Як виглядає булеан порожньої множини? $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$ – це множина, яка містить один елемент – \emptyset (порожню множину).

Потужність такого булеану: $|2^{\emptyset}| = 1 = 2^0$, бо це множина, що містить 1 елемент. А $1 = 2^0$.

База в нас сходиться.

Ви вже не плутаєте порожню множину і множину, що містить порожню множину? Так? ☺ Це різні речі.

Припустимо, що твердження нашої теореми стверджується для всіх множин, потужності n . То що буде із множиною потужності $n + 1$?

Розглянемо множину B : $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}\}$. Очевидно, що будь-яка підмножина множини B містить елемент з номером $n + 1$ або його не містить. Очевидно?

І це задає нам розбиття всіх підмножин на 2 незалежні підкласи. Клас не може містити і не містити елемент одночасно. І будь-яка множина може бути описана в такий спосіб.

Тобто мені можна окремо обчислити кількість підмножин, що не містять b_{n+1} і окремо обчислити кількість підмножин, що містять b_{n+1} -ше і додати ці два числа.

Це зрозуміло?

Отже, скільки підмножин у мене не містять b_{n+1} ?

Якщо у вас підмножина не містить b_{n+1} , то вона є підмножиною множини від b_1 – до b_n .

А це є множина потужності n .

За припущенням індукції кількість таких підмножин буде 2^n .

Тобто, якщо у мене є підмножина $B_1 \subseteq B$ і $b_{n+1} \notin B_1$, то кількість таких підмножин дорівнює 2^n - за припущенням індукції: $\#B_1 = 2^n$ (бо насправді $B_1 \subseteq \{b_1, \dots, b_n\}$). Згодні? Добре.

Якщо у мене $B_2 \subseteq B$ і $b_{n+1} \in B_2$. Давайте візьмемо цей елемент $n+1$ -ий і вилучимо його.

Тобто множина B_2 – з якої вилучили елемент b_{n+1} – вона є підмножиною множини від b_1 – до b_n : $B_2 \setminus \{b_{n+1}\} \subseteq \{b_1 \dots b_n\}$. Так?

Тому я зразу можу сказати скільки множин B_2 існує: $\#B_2 = 2^n$ – за припущенням індукції.

Тобто всі множини B_2 можуть бути одержані таким шляхом. Берете підмножину цієї множини – додаєте до неї елемент b_{n+1} .

І відповідно загальна кількість підмножин $|2^n| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Чи є у вас питання в тому, що я тут будувала?

Знову ж таки: всі підмножини, які у мене тут є я розбиваю на 2 незалежні класи, тобто я певну множину віднести до певного класу – і ці множини не перетинаються, тобто не має множини, яка належить двом класам одночасно. Тут це буде диз'юнктне об'єднання. Обчислюю потужність кожного класу. Як? За припущенням. Тобто я зводжу наше обчислення – то того твердження, яке вже є коректним для нас. І обчислюю загальну кількість. І виявляється, що якщо припущення індукції вірне для n , то воно буде справедливе для довільної множини потужності $n+1$.

Звідси індукційний перехід дає нам справедливість теореми для довільної множини, потужності n .

(2 спосіб)

Ви можете запитати мене: чому я даю два способи доведення одного і того ж самого твердження? Чи вам отого не достатньо? Взагалі то достатньо, але для того, щоб ви бачили, як це можна робити. Тому, що в деяких випадках працює ось таке, а в деяких випадках ось таке не працює. Працює щось інше. Наприклад те, що буду розповідати зараз.

Зараз ми доведемо практично методом комбінаторного обрахунку. Хто в школі полюбляв комбінаторику? ☺ Вау! Є такі люди? ☺

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – ось в мене множина з n -елементів. Ось ці елементи в мене є і пронумеровані. Так? Ось в мене є певна підмножина множини A : $B \subseteq A$. Давайте я навпроти елемента буду ставити 1, якщо він належить цій множині (B), 0 – якщо не належить. Тоді я цю підмножину B можу представити у вигляді: 0 1 0 1 ... 1 – певного бітового вектора («одинички» стоять навпроти тих елементів, які належать, «нулики» – навпроти тих, які не належать).

Зрозуміло, що кожна підмножину можна так подати.

Зрозуміло й інше: кожний бітовий вектор довжини n задає певну підмножину. Так? Більш того: 2 різні вектори задають різні підмножини. А дві різні підмножини задають два різні вектори. Чому? Якщо підмножини різні, то там є елемент, що одній множині належить, а іншій не належить. Інакше вони співпадають по всіх елементах.

Ось наприклад:

$$\begin{array}{l} B \subseteq A \quad 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots \ 1 \\ C \subseteq A \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \Rightarrow \\ \qquad \qquad \underbrace{\hspace{2cm}}_n \end{array}$$

Ось по 2-му елементу ці дві підмножини (B і C) будуть відрізнятися.

Тобто співставлення бітового вектора нашим підмножинам – воно однозначне: одній підмножині – один бітовий вектор.

Тому кількість підмножин може бути лише такою, як кількість n-бітних векторів. А скільки у мене існує n-бітних векторів? В мене є n-бітів, кожен біт приймає значення 0 або 1 (кожен елемент може мати 2 варіанти). І треба все перемножати, оскільки ми одночасно обираємо ці варіанти.

$\Rightarrow 2^n$ бітових векторів.

А якщо векторів у мене 2^n , то і підмножин буде 2^n .

Десь через місяць ми ось цей принцип доведемо формально. Тобто дві множини мають однакову кількість елементів, якщо можна побудувати між цими елементами взаємно однозначне представлення – бієктивну функцію.

А тепер подивіться скільки місця в попередньому способі, скільки в цьому (скільки різних тверджень я доводила там, скільки тут). *Я дуже люблю це доведення ☺*

Чи є у вас питання?

Наступна конструкція, яку ми будемо розглядати – покриття множини A.

Покриття множини A.

Покриття множини A – це така система множин, об'єднання яких накриває всю множину A.

Тобто елементами покриття є підмножини множини A:

$\Delta \subseteq 2^A$ (покриття можна позначати великою грецькою літерою Δ)

$$\Delta = \{T_1, T_2, \dots, T_i\}$$

Ці елементи задовольняють двом умовам:

1) всі елементи покриття є не порожніми множинами $T \neq \emptyset$;

2) а їх об'єднання дає всю множину A: $\bigcup_{i=1}^l T_i = A$.

Тобто, якщо у вас є множина A, то тут є якась множина T_1, T_2, T_3, T_4 і вони так «лап, лап, лап» – і усю множину A накрили (рис. 1).

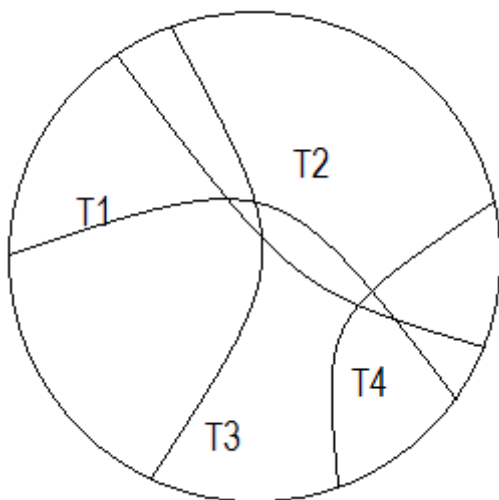


Рис. 1

Кожен елемент з множини A буде належати якійсь з множин T , можливо, неподільній. В топології, ще в якихось розділах математики це поняття розглядають в більш широкому сенсі, де це може бути система довільних, в тому числі таких, які виходять за межі множини A . Але в нас важливо, щоб це були саме підмножини множини A .

(Чому? Через 3 лекції ми будемо доводити теорему про фактор підмножин)

а) частковий випадок покриття: **розбиття множини A** .

Розбиттям множини A ми називаємо таку систему множин Π (це велика грецька літера «пі»): $\Pi \subseteq 2^A$, $\Pi = \{T_1, \dots, T_k\}$.

1) Ця система множин, по-перше, є покриттям.

2) і по друге: для всіх $i \neq j$ ці множини не перетинаються між собою: $i \neq j \implies T_i \cap T_j = \emptyset$.

Тобто, якщо в покритті ці елементи могли перетинатися і кожен елемент міг належати декільком частинам покриття, то в розбитті кожен елемент належить рівно одній частині розбиття.

Якщо ми покриття схематично зображаємо так (рис. 1), то розбиття (рис. 2): ☺ берете тарілку – розбиваєте, – і те, що трапилось це і є розбиття.

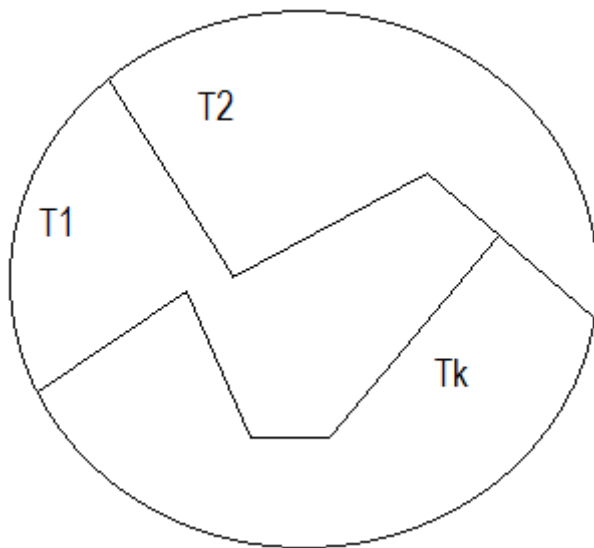


Рис. 2

Зрозумілі ці поняття?

Приклади:

1) скажімо, беремо множину натуральних чисел N . В мене є парні натуральні числа, в мене є непарні натуральні числа.

Чи може число бути одночасно і парним і непарним? Ні, не може.

Чи може бути число, що не є парним, ні непарним? Ні.

Тому, якщо я візьму всі парні числа $(2N)$ і всі непарні числа $(2N-1)$:

$N = 2N \sqcup (2N-1)$, – то вони задають розбиття множини натуральних чисел.

Тобто, ось ця система: $\Pi = \{2N, 2N-1\}$ – це розбиття.

Взагалі кажучи, якщо Π – це розбиття, то я завжди можу написати, що в мене множина $A = T_1 \sqcup T_2 \sqcup \dots \sqcup T_k$ – ось цих всіх частин.

І починаючи з цього моменту я перестаю казати «диз'юнктне об'єднання» – я буду казати лише «розбиття». Тому, що це більш зрозуміло.

Це все зрозуміло? Добре.

2) Знову беремо натуральні числа. Є прості натуральні числа, є складені натуральні числа.

Чи може бути число одночасно простим і складеним? Ні, не може.

Тому я можу сказати, що довжина натуральних чисел – це прості числа і складені числа:

$N = \text{прості} \sqcup \text{складені}$. Так? Всі згодні? Якщо так, то «2 бали» всім! ☺

А чи є у нас натуральні числа, які не є ні простими, ні складеними? Одиничка (1) – вона не є простим числом, бо просте число має два різні дільники: 1 і саме себе; а 1 не має двох різних дільників. $N = \text{прости} \cup \text{складені} \cup \{1\}$ – а ось тепер це буде розбиття. У нас всі натуральні числа входять в якусь з цих множин і лише вони.

Зрозуміло? Добре.

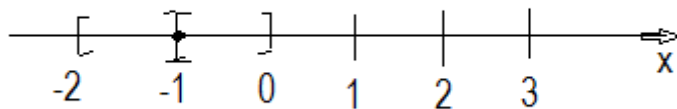
3) Нехай множина A_0 – це множина всіх цілих чисел, що діляться на 3: $A_0 = \{3k \mid k \in Z\}$, множина A_1 – це всі числа, що дають при діленні на 3 остачу 1: $A_1 = \{3k + 1 \mid k \in Z\}$, ну і множина A_2 – це всі числа, що дають при діленні на 3 остачу 2: $A_2 = \{3k + 2 \mid k \in Z\}$. Чи можуть у мене бути ще якісь остачі? При діленні на 3 остача може бути лише 0, 1 або 2. От вам 0, от вам 1, от вам 2. Тоді система множин A_0, A_1, A_2 – це що? Розбиття. Розбиття чого? Множини цілих чисел. Ви не можете казати просто «розбиття», бо ви повинні прив'язатися до вихідної множини – яку ви саме розбиваєте. Тобто у мене $\{A_0, A_1, A_2\}$ – це розбиття множини цілих чисел.

4) Розглянемо систему відрізків числової осі (одичні відрізки: від цілого числа k – до цілого числа $k + 1$):

$$C_1 = \{[k, k + 1] \mid k \in Z\}.$$

Ці відрізки перетинаються. То що таке є система C_1 ? C_1 – це покриття всіх дійсних чисел – R .

У вас є відрізок $[-2, -1]$, у вас є відрізок $[-1, 0]$ і вони перетинаються в точці -1 (рис. 3). Тобто число -1 належить одночасно двом відрізкам. Відрізки $[-1, 0]$ і $[0, 1]$ теж перетинаються, $[0, 1]$ і $[1, 2]$ теж перетинаються, – але в сукупності вони перетинають усю числову вісь. Тому система C_1 – це є покриття множини дійсних чисел.



Добре. Розглянемо систему C_2 – напівінтервалів одиничної довжини: $C_2 = \{[k, k + 1) \mid k \in Z\}$. Що таке система C_2 ? Це вже розбиття. Бо ці точки, що належать двом відрізкам, за рахунок того, що я їх вилучаю зліва відрізків, – вони належать лише одній з цих множин. Отже, C_2 – це розбиття R .

І нарешті система $C_3 = \{(k, k + 1) \mid k \in Z\}$ інтервалів на числовій осі. Що таке C_3 ? Ми не можемо класифікувати цю систему множини. Воно не є покриттям, оскільки цілі точки не належать жодному з цих інтервалів. Так? Тобто всі ці множини не порожні, але їх об'єднання не дає множини дійсних чисел. Тому це не є покриттям, – і відповідно не є розбиттям. Ось. Все зрозуміло? Добре. Переходимо далі.

Декартовий добуток множин

Наступна операція над множинами, яка конструє множину складного вигляду – декартів добуток множин (cartesian product).

Декартів добуток 2-х множин A та B – це множина всіх впорядкованих пар виду (a, b) , де $a \in A$, $b \in B$ (перший елемент іде із 1-ї множини, а другий – із другої).

Всі слова, що я написала є важливими.

Позначається декартовий добуток: $A \times B$.

Формальний запис: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

(Множина всіх впорядкованих пар, де 1-ий елемент пробігає всі елементи з A , а 2-ий пробігає всі елементи з B)

Що таке впорядкована пара? Чим вона відрізняється від множини?

Тобто мені важливий порядок – як це впливає з означення. Якщо я поміняю місцями (a, b) і (b, a) , то це будуть дві різні впорядковані пари. А якщо це буде множина, то від переставлення елементів нічого не зміниться. Якщо я якусь множину позначаю фігурними дужками, то там мені порядок неважливий. Коли я ставлю круглі дужки, то це буде впорядкована пара, впорядкована трійка, впорядкована калька або, як ми її називаємо **кортежем** або **вектором**. Корисно: в дискретній математиці впорядкованість ще підсилюють, позначають: $\langle a, b \rangle$ – так можна також зустріти позначення впорядкованості в літературі. Я вважаю, що потрібно дотримуватися єдиної системи нотації: в векторній математиці та матаналізі позначається (a, b) , тому і ми будемо так позначати.

Якщо у мене не дві множини, а 3, 4 або 5? То що буде, якщо ми їх всі перемножимо?

Декартовий добуток множин A_1, A_2, \dots, A_n для довільної кількості множин визначаємо їх декартовий добуток як множину, що містить всі можливі впорядковані n :

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Що зручно в такому вигляді? Можна між A розставляти дужки. За такого визначення декартовий добуток набуває асоціативності: вам не важливо в якому порядку їх перемножати, оскільки на виході ви все рівно одержите впорядковану n .

Декартовий степінь.

Декартів степінь множини A : $A^n = \underbrace{A \times A \dots \times A}_n$. Тобто це буде множина векторів, в якому

кожна координата пробігає всі значення з множини A .

Приклади (ви їх всі знаєте ще зі школи).

1) Чому він називається «декартовим»? Що вигадав Рене Декарт?

Систему координування площини, а потім простору, а потім взагалі – n -вимірного простору.

Що таке точка на площині? Як вона задається в декартовій системі координат?

Двома числами: координата за Ox , координата за Y .

Так ось:

площина $R^2 = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$ – це просто декартовий добуток множини дійсних чисел (числової осі) на саму себе;

простір $R^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in R\}$ – це, відповідно, добуток 3-го степеня – і нам потрібно 3 координати.

n -вимірний простір R^n відповідно буде задаватися векторами з n -координат.

Зрозуміло?

2) Пам'ятаєте множина раціональних чисел визначалася нами як: $Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N \right\}$.

Так?

Якщо я розгляну множину дробів, які не можна скорочувати – Q' . Тобто у мене $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

будуть два різні записи. Тоді фактично вся множина Q' буде задаватися парою чисел: перше з множини Z , друге – з N : $Q \subseteq Q' \sim Z \times N$. (знак “ \sim ” – це не рівність, тому що тут впорядковані пари, а вище – дробі; але воно однакове, адже з цих пар можна перейти до дробів і навпаки. А множина Q , якщо ми дозволяємо скорочувати це буде певна підмножина Q').

Теорема (про потужність декартового добутку).

Якщо у вас є дві скінченні множини A та B , то чому дорівнює потужність їх декартового добутку? *Проявіть математичну інтуїцію...* ☺

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Система позначень неминуче повинна підказувати вам, що ви робите.

Кількість впорядкованих пар – це просто добуток потужностей кожної з множини.

Знову таки це очевидна теорема. Вдома промедитуйте схематичне доведення.

Візьмемо перший елемент з множини A . Скільки пар він утворює? Стільки, скільки є елементів в множині B , бо кожен елемент з множини B дає вам одну пару. Беремо другий елемент з множини A . Скільки пар він утворює? Знову стільки, скільки є елементів в множині B . Беремо третій, четвертий, п'ятий, ..., останній, а потім все додаємо – одержимо $|A| \cdot |B|$.

Наслідок.

1) Якщо у вас є декартовий добуток n -множин: $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$;

2) Якщо у вас є декартовий степінь множини: $|A^n| = |A|^n$.

Остання конструкція, яку вам потрібно знати – вона для теорії формальних грамади як дослідження мови – алфавіт. Що таке алфавіт? Це довільна множина, яку я забажала вважати алфавітом.

Алфавіт A – це довільна множина (зазвичай скінченна множина, але не обов'язково).

Якщо я множину назвала «Алфавітом», то елементи цієї множини я буду називати – «літерами» або «символами»: $a \in A$ – **символ (літера)**.

Якщо в мене є впорядкована n -ка символів, то я можу (a_1, a_2, \dots, a_n) прибрати дужки, коми, – це все «зліпити в одне» – і одержу... що? Слово довжиною n буду писати просто: $a_1 a_2 \dots a_n$. Я підкреслюю: це все лише тоді, коли ми працюємо з алфавітом. Тобто я інтерактивно назначила цю множину алфавітом – і тоді я впорядковані n -ки записувати ось так: $a_1 a_2 \dots a_n$ – і називати їх словами.

І відповідно... що таке A^n ?

Це множина всіх слів, довжини n : A^n – **множина всіх слів, довжини n** .

Для алфавітів вводиться ще одне спеціальне визначення. Скажімо, в мене є слово і я починаю з нього вилучати літери. Якщо я вилучаю літери – слово залишається словом. Але в певний момент часу літер уже не буде, а слово залишиться словом. Ось «таке слово» позначається спеціальним символом ε – **порожнє слово (слово, що не містить жодної літери)**.

І в цьому різниця між алфавітом і звичайним декартовим добутком звичайних множин. Якщо я перемножу 0 множин на 0 множин... що я одержу? Порожню множину: я нічого не одержу. А тут я можу ввести нульовий степінь – A^0 , – (якого я не могла ввести над звичайним декартовим добутком) і за визначенням це є множина, яка містить порожнє слово і більш нічого: $A^0 = \{\varepsilon\}$.

І ось тепер я можу взяти і всі можливі словосполучення об'єднати в єдину множину – множину всіх слів. То ця операція називається «замикання алфавіту (зірка Кліні)»:

$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Якщо ви будете якесь словосполучення, то воно точно є в A^* . Всі слова, які ви можете вигадати із заданих літер – вони тут є: тут слова довжиною 0 , тут слова довжиною 1 , довжиною 2 , 3 , 4 і т.д.

(Формальною) мовою над алфавітом A що ми називаємо? Що таке взагалі «мова»? Неформальна? От ви розмовляєте зі мною російською та українською мовами. Що це таке? Це певні літеро сполучення, яким ви надаєте певний сенс. Тобто для вас є коректні літеро сполучення, є некоректні сполучення. Тобто фактично: $L \subseteq A^*$ – ви обрали певну

кількість слів і назвали їх правильними. І оце для вас є мова. Формальною ми називаємо будь-яку мову підмножини із множини всіх можливих слів. І наприкінці семестру я вам покажу що вам із цим робити. Там можна робити такі штуки! ☺

Сьогодні ми розпочинаємо нову тему.

ТЕОРІЯ ВІДНОШЕНЬ

У нас перші 3 лекції були присвячені множинам. Ми множини якось визначили, навчились з ними працювати. Але множина – це лише сукупність певних об'єктів, а нас цікавлять зв'язки між цими об'єктами. І ось ці зв'язки – вони моделюються певним чином (формулюються) мовою так званих «відношень».

І одразу визначення.

m-арне відношення на множинах A_1, A_2, \dots, A_m – це просто певна підмножина $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ декартового добутку цих множин.

Відношення традиційно позначається літерою R . Чому? (**relation**)

Яка підмножина? Будь-яка. Будь-яка підмножина є певним відношенням на цих об'єктах. Нагадую: декартовий добуток – це сукупність впорядкованих емов, де перший є з A_1 , другий – з A_2 , третій – з A_3 і т.д.

Відповідно m-арне відношення на множині A – це просто підмножина m-го декартового степеня: $R \subseteq A^m$.

Я зауважую, ... я буду казати: «відношення», «відношення», «відношення», – але ви повинні пам'ятати що «відношення» не існує.