Практична робота

Модель "хижак - жертва" (модель Вольтерра)

Ціль роботи:

1. Навчитися становити й вирішувати кінетичні рівняння при моделюванні процесів зміни чисельності популяцій.
2. Проводити аналіз отриманих рішень, графічно представляти результати.

Література:

1. Антонов В.Ф. і ін. Біофізика. - М.: Владос, 2000.
2. Волькенштейн М.В. Біофізика. - М.: Наука, 1988.

Підготовка до роботи

Повторити зі шкільного курсу:

1. Похідні функції.
2. Побудова графіків функцій.

Вивчити по рекомендованій літературі наступні питання:

1. Математичне моделювання. Основні етапи моделювання. Основні допущення. Поняття про адекватність моделі.
2. Кінетичні рівняння (загальний принцип їхньої побудови). Зміст змінних величин, що входять у них (аргумент, параметри, функції).
3. Складання конкретних кінетичних рівнянь для заданої системи.
4. Методи рішення диференціальних рівнянь другого порядку.

Теоретичні відомості

На рис. 3.1 наведені досвідчені дані по кількості числа добутих шкурок зайців і рисей у Канаді з 1845 по 1935 р.

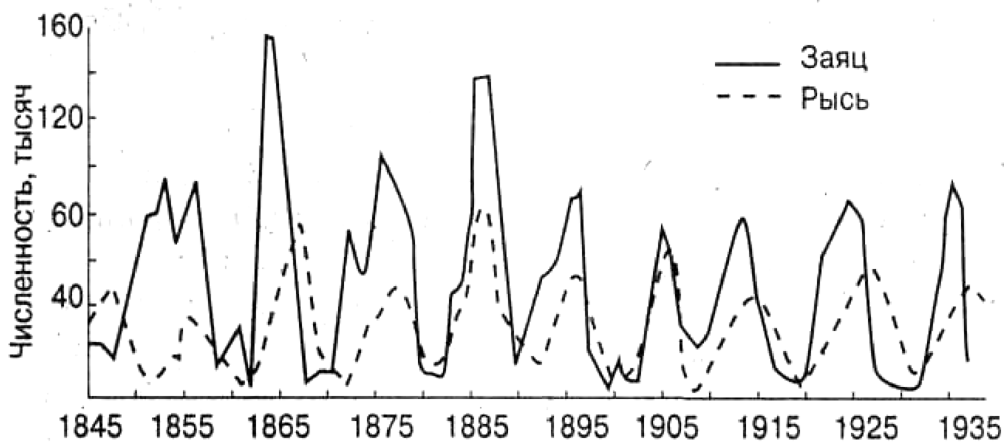

Рисунок 3.1. – Динаміка популяцій зайців і рисей

Розглянемо модель.

Серед допущень, уведених у роботі 1.1, знімемо допущення 4. Нехай у деякому просторі живуть два види особин: зайці (жертви) і рисі (хижаки). Зайці харчуються рослинною їжею, наявної завжди в достатній кількості (між ними відсутня внутрішньовидова боротьба). Рисі можуть харчуватися тільки зайцями.

Уведемо величини:

x – число жертв у момент *t*;

в – число хижаків у момент *t*.

Рівняння балансу між чисельністю народжених і особин, що гинуть:

Жертви:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x - \sigma x - \alpha x y,$$

γx – швидкість розмноження, σx швидкість природної загибелі, $\alpha x y$ – швидкість загибелі за рахунок зустрічі з хижаком.

Хижаки: $\dfrac{dy}{dt} = \delta x y - \beta y$.

$\delta x y$ – швидкість розмноження, βy – швидкість природної загибелі

або

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varepsilon x - \alpha x y \\ \dfrac{dy}{dx} = \delta x y - \beta y. \end{cases}$$

У загальному виді *x(t)* і *y(t)* – нелінійні функції часу. Дані рівняння вирішуються за допомогою ПК.

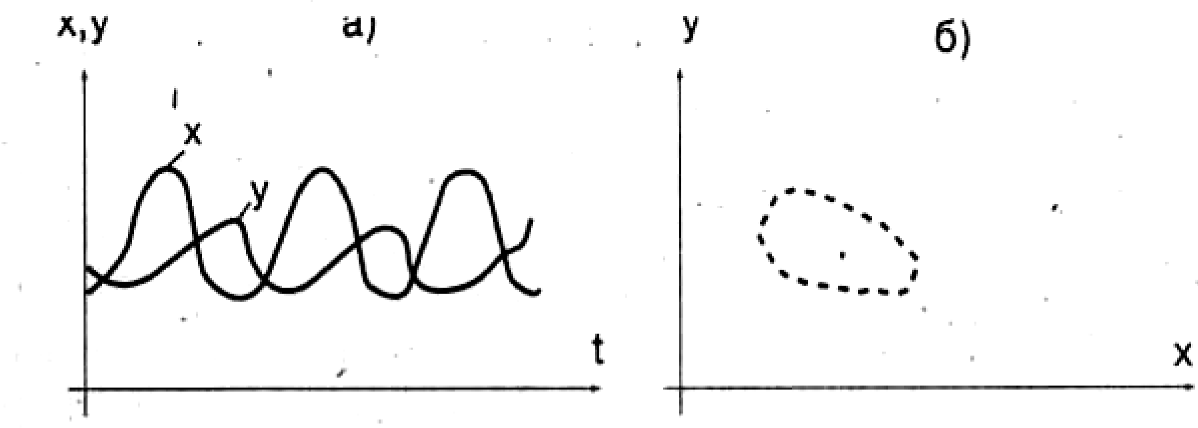

Рисунок 3.2 – Функції *x(t)* і *y(t)* – (а) і відповідний фазовий портрет системи (б) — схематичне подання

На рис. 3.2 представлені схематично графіки x(t) і y(t) (а) і відповідний фазовий портрет системи (б).

<u>*Аналітичне рішення при малих відхиленнях від стаціонарних значень.*</u>

Знайдемо стаціонарне значення x_{cm} й y_{cm}, тобто $\frac{dx}{dt}=0, \frac{dy}{dt}=0.$

З (1) одержимо алгебраїчні рівняння, з яких знайдемо:

$$x_{cm}=\frac{\beta}{\delta}, \qquad y_{cm}=\frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

При малих відхиленнях *u(t)* від x_{cm} і *v(t)* від y_{cm} система рівнянь зводиться до диференціальних рівнянь другого порядку, що описує гармонійні коливання величин *u* і *v*:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\varepsilon\beta u=0$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\varepsilon\beta v=0$$

розв’язок рівнянь:

$$U=U_{\max}\sin\sqrt{\varepsilon\beta}\,t$$

$$V=V_{\max}\sin\left(\sqrt{\varepsilon\beta}\,t+\varphi_0\right).$$

Відношення амплітуд відхилень:

$$\frac{V_{\max}}{U_{\max}}=\frac{\delta}{\alpha}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}}.$$

У результаті чисельності особин при малих відхиленнях від стаціонарних значень рівні:

$$x(t)=x_{cm}+U_{\max}\sin\sqrt{\varepsilon\beta}\,t,$$

$$y(t)=y_{cm}+\mathrm{V}_{\max}\sin\left(\sqrt{\varepsilon\beta}\,t+\varphi_0\right).$$

На рис. 3.3 схематично представлені графіки гармонійної зміни *x(t)* і *y(t)* (*а*) при малих відхиленнях від стаціонарних значень і відповідний їм фазовий портрет системи у вигляді еліпса (*б)*.

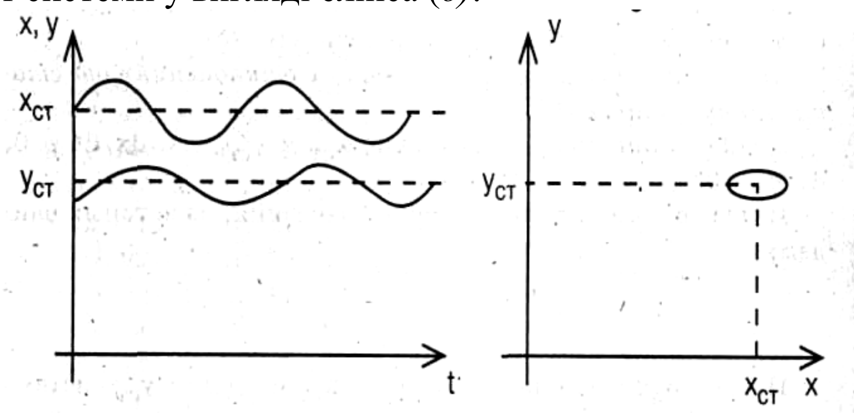

Рисунок 3.3. – Зміни *x(t)* і *y(t)* при малих відхиленнях (*а*) і фазовий портрет системи (*б)*

Виконання роботи

Завдання. Проаналізуйте поводження системи при різних параметрах $\alpha, \beta, \varepsilon, \delta$, а також при різних початкових умовах x_0 і y_0.

Для цього:

1. Для кожної сукупності параметрів побудуйте за допомогою ПК серію графіків залежності *x(t)* і *y(t)* (на одному рисунку) і відповідні їм фазові портрети системи.
2. Оцініть із графіків період коливань чисельності хижаків і жертв.
3. Оцініте із графіків, при яких відхиленнях від x_{cm} і y_{cm} гармонійні коливаня замінюються складними коливаннями, а форма фазової траєкторії стає відмінною від еліпсоїдальної.
4. Проведіть дослідження за допомогою ПК, при яких співвідношеннях параметрів модель "хижак – жертва" практично перетворюється в модель природного росту.

Варіанти зміни параметрів наведені в таблиці:

Параметр	ε, 1/рік	β, 1/рік	α	δ	x_{cm}	y_{cm}	Початкові умови	
							$x_0 = x_{cm} + \Delta x_{cm}$	$y_0 = y_{cm} + \Delta y$
1 система	0,5	0,72	0,0125	0,009			$x_0 = x_{cm} + 0{,}05 x_{cm}$	$y = y_{cm}$
2 система	0,5	0,72	0,0125	0,009			$x_0 = x_{cm} + 0{,}1 x_{cm}$	$y = y_{cm}$
3 система	0,5	0,72	0,0125	0,009			$x_0 = x_{cm} + 0{,}5 x_{cm}$	$y = y_{cm}$
4 система	0,5	0,72	0,0125	0,009			$x_0 = x_{cm} + x_{cm}$	$y = y_{cm}$

Зіставте розрахункові криві зміни *x(t)* і *y(t)* з експериментальними кривими, представленими на мал. 3.3.