

**Практична робота №3**  
**Модель зміни чисельності популяції з обліком**  
**внутрішньовидової конкуренції (модель Ферхюльста)**

**Ціль роботи:**

1. Навчитися становити й вирішувати кінетичні рівняння при моделюванні процесів зміни чисельності популяцій.
2. Проводити аналіз отриманих рішень, графічно представляти результати.

**Література:**

1. Антонов В.Ф. і ін. Біофізика. - М.: Владос. 2000.
2. Волькенштейн М.В. Біофізика. - М.: Наука. 1988.

**Підготовка до роботи:**

Повторити зі шкільного курсу:

1. Похідні функції.
2. Побудова графіків функцій.

Вивчити по рекомендованій літературі наступні питання:

1. Математичне моделювання. Основні етапи моделювання. Основні допущення. Поняття про адекватність моделі.
2. Кінетичні рівняння (загальний принцип їхньої побудови). Зміст змінних величин, що входять у них (аргумент, параметри, функції).
3. Складання конкретних кінетичних рівнянь для заданої системи.
4. Методи рішення диференціальних рівнянь першого порядку з роздільними змінними.

**Теоретичні відомості**

Ускладнимо розглянуту в попередній роботі модель. З метою одержання кращого рішення опису досліджуваного об'єкту, серед допущень, наведених у моделі 1, знімемо допущення 3. Нехай існує боротьба між особинами, наприклад, за місце перебування, тим самим додається додаткове джерело загибелі. Уважаючи, що швидкість загибелі за рахунок конкуренції між особинами пропорційна ймовірності зустрічі двох особин, можна записати  $S = -\delta x \cdot x - \sigma x$  ( $\delta$  — коефіцієнт пропорційності). Тоді рівняння балансу чисельності особин:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x - \sigma x - \delta x^2$$

або

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x - \delta x^2$$

Це нелінійне диференціальне рівняння. Зробимо заміну змінних:  
 $u = \frac{\varepsilon - \delta x}{x}$ . Тоді при  $t = 0$   $x = x_0$  одержимо:

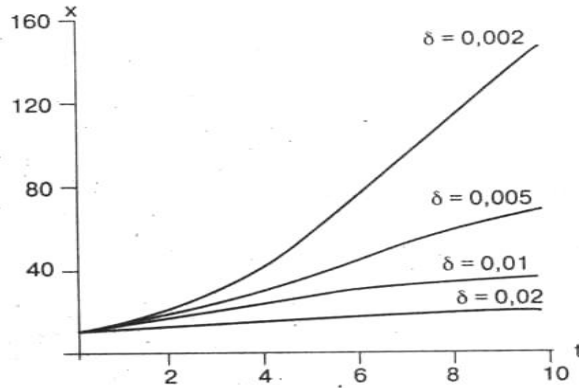
$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) - \ln\left(\frac{\varepsilon - \delta x}{\varepsilon - \delta x_0}\right) = \varepsilon t.$$

Звідси

$$x(t) = \frac{x_0 \varepsilon}{(\varepsilon - \delta x_0) e^{-\varepsilon t} + \delta x_0}$$

при  $t \rightarrow \infty$   $x \rightarrow X_{cm} = \frac{\varepsilon}{\delta}$ .

Графіки для різних параметрів системи наведені на рис.2.1-2.4.



$\varepsilon = const = 0,4$     $x_0 = const = 10$

Рисунок 2.1. – Вплив  $\delta$  на  $x(t)$

Чим менше ймовірність внутрішньовидової конкуренції, тим швидше росте чисельність особин.

### Виконання роботи

Проаналізуйте поведінку системи при різних параметрах  $\varepsilon, \delta, x_0$ .

Для цього:

1. Запишіть закон зміни  $x(t)$  для заданих параметрів.

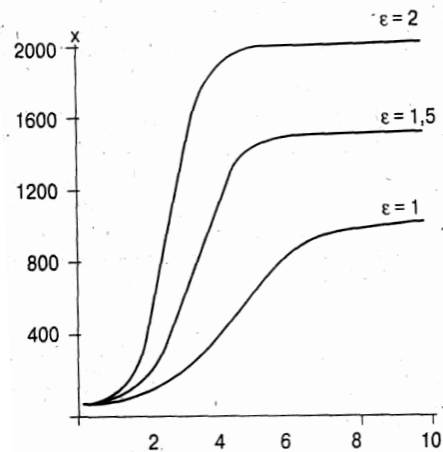
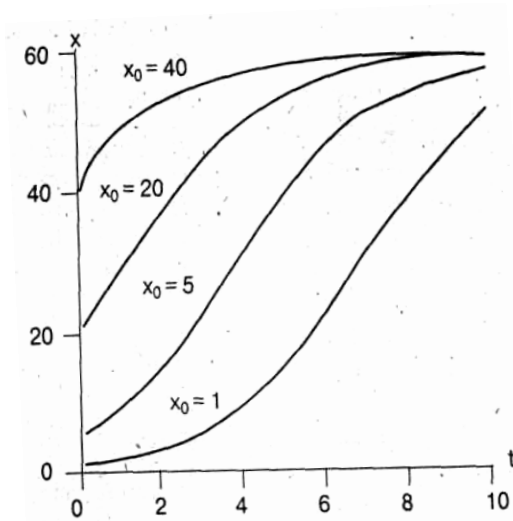


Рисунок 2.2. – Вплив  $\varepsilon$  на  $x(t)$

$\delta = const = 0,001$     $x_0 = const = 10$



$$\delta = \text{const} = 0,01 \quad \varepsilon = \text{const} = 0,6$$

Рисунок 2.3. – Вплив  $x_0$  на  $x(t)$

2. Побудуйте графіки  $x(t)$ . Криві для кожного виду параметрів повинні бути представлені на одному рисунку.

3. Оцініть характерні величини процесу:

а) Стаціонарне значення  $x_{cm}$ , зрівняйте з розрахунковими даними

$$x_{cm} = \frac{\varepsilon}{\delta}$$

Побудуйте графіки  $x_{cm}(\varepsilon)$ ,  $x_{cm}(\delta)$ .

б) Характерний час  $T_{0,9}$ , коли чисельність популяції становить

$x = 0,9 x_{cm}$  (тобто практично виходить на стаціонарний рівень).

Побудуйте графіки  $T_{0,9}(x_0)$ ,  $T_{0,9}(\varepsilon)$ ,  $T_{0,9}(\delta)$ .

Зробіть висновок.

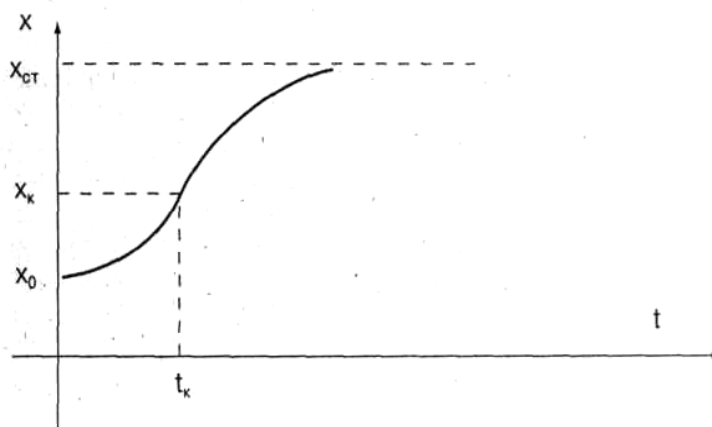


Рисунок 2.4. – Положення точки перегину

в) параметри точки перегину — час  $t_k$  і чисельність особин  $x_k$ , коли проявляється конкуренція їх між собою (рис. 5).

Для цього за графіком оцініть  $x_k$ , зрівняйте з теоретичним значенням:

$$x_k = \frac{1}{2} x_{cm} = \frac{\varepsilon}{2\delta}$$

За графіком знайдіть  $t_k$ . Побудуйте графіки  $x_k(\varepsilon)$ ,  $x_k(\delta)$ ,  $x_k(x_0)$ ,  $t_k(\varepsilon)$ ,  $t_k(\delta)$ ,  $t_k(x_0)$ . Зробіть висновок.

**Завдання 1.** Проаналізуйте поведження системи при зміні коефіцієнта росту  $\varepsilon$ . Заповніть таблицю:

Параметри	$\varepsilon$ , 1/година	$\delta$ , 1/година	$x_0$	Закон зміни $x(t)$	$x_{cm}$	$x_k$	$t_k$
1 система	2,2	0,001	20				
2 система	1,6	0,001	20				
3 система	1	0,001	20				

**Завдання 2.** Проаналізуйте поведження системи при зміні коефіцієнта  $\delta$  (імовірності конкуренції). Заповніть таблицю:

Параметри	$\varepsilon$	$\delta$	$x_0$	Закон зміни $x(t)$	$x_{cm}$	$x_k$	$t_k$
1 система	0,4	0,001	20				
2 система	0,4	0,003	20				
3 система	0,4	0,01	20				
4 система	0,4	0,02	20				

**Завдання 3.** Проаналізуйте поведження системи при зміні початкової чисельності особин  $x_0$ . Заповніть таблицю:

Параметри	$\varepsilon$	$\delta$	$x_0$	Закон зміни $x(t)$	$x_{cm}$	$x_k$	$t_k$
1 система	0,6	0,01	60				
2 система	0,6	0,01	40				
3 система	0,6	0,01	20				
4 система	0,6	0,01	10				