

Практична робота №1

Моделювання зміни чисельності популяції.

Модель природного росту (модель Мальтуса)

Традиційною областю додатка математичних моделей є теорія розвитку біологічних популяцій. Дана теорія розглядає з єдиної точки зору різні аспекти основних закономірностей зміни чисельності популяцій, у тому числі й кліток, що живуть як у природних умовах, так і в штучних лабораторних установках. Основні особливості пов'язані з факторами, що лімітують ріст, середовища, з співіснуванням різних видів у процесі росту.

Ціль роботи:

1. Навчитися ставити й розв'язувати кінетичні рівняння при моделюванні процесів зміни чисельності популяцій.
2. Проводити аналіз отриманих рішень, графічно представляти результати.

Література:

1. Антонов В.Ф. і ін. Біофізика. - М.: Владос, 2000.
2. Волькенштейн М.В. Біофізика.- М.: Наука, 1988.

Підготовка до роботи

Повторити:

1. Похідні функції.
2. Побудова графіків функцій

Вивчити по рекомендованій літературі наступні питання:

1. Математичне моделювання. Основні етапи моделювання. Основні допущення. Поняття про адекватність моделі.
2. Кінетичні рівняння (загальний принцип їхньої побудови). Зміст змінних величин, що входять у них (аргумент, параметри, функції).
3. Складання конкретних кінетичних рівнянь для заданої системи.
4. Методи розв'язку диференціальних рівнянь першого порядку з роздільними змінними.

Теоретичні відомості

Реальна система: є деяка популяція одного виду (мікроорганізми, зайці й т.д.), у якій відбуваються життєві процеси у всьому їхньому різноманітті.

Постановка завдання. Знайти закони зміни чисельності популяції в часі.

Основні допущення:

1. Існують тільки процеси розмноження й природної загибелі, швидкості яких пропорційні чисельності особин у цей момент часу.
2. Не враховуємо біохімічні, фізіологічні процеси.
3. Немає боротьби між особинами за місце перебування, за їжу (нескінченно великий простір і кількість їжі).
4. Розглядаємо тільки одну популяцію, немає хижаків.

Модель.

Уведемо величини:

x — чисельність популяції в момент t ;

R — швидкість розмноження, γ — коефіцієнт розмноження;
 S — швидкість природної загибелі, σ — коефіцієнт природної загибелі;
 $\frac{dx}{dt}$ — швидкість зміни чисельності популяції, ε - коефіцієнт росту.

Тоді $R = \gamma x$, $S = -\sigma x$.

Складемо диференціальне рівняння балансу: зміна чисельності особин в одиницю часу визначається кількістю народжених за цей час і померлих:

$$\frac{dx}{dt} = (\gamma - \sigma)x, \quad \text{або} \quad \frac{dx}{dt} = \varepsilon x$$

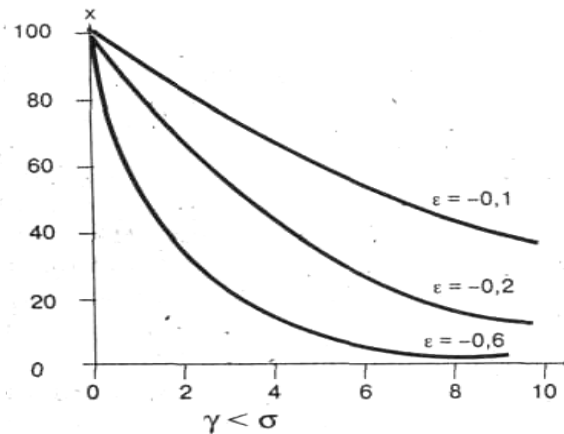
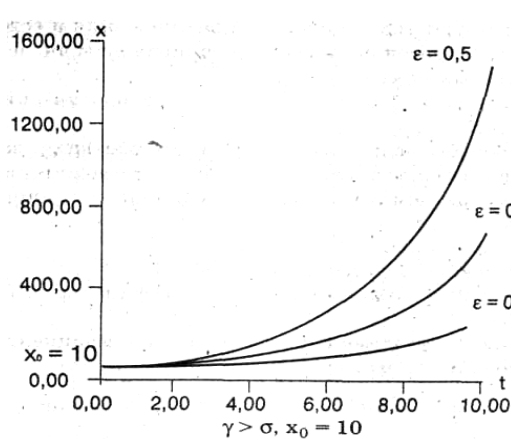
Початкова умова: при $t = 0$ чисельність особин $x = x_0$. Вирішимо рівняння:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_0^t \varepsilon dt \quad \ln \frac{x}{x_0} = \varepsilon t,$$

звідси

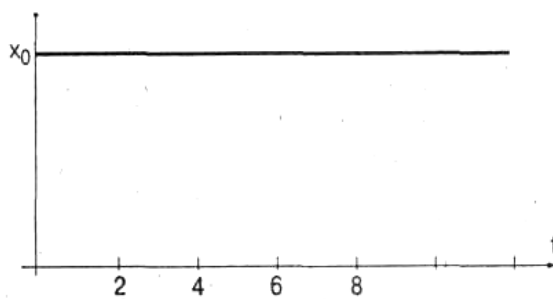
$$x = x_0 \cdot e^{\varepsilon t}$$

Графіки для різних параметрів системи наведені на рис. 1.1.

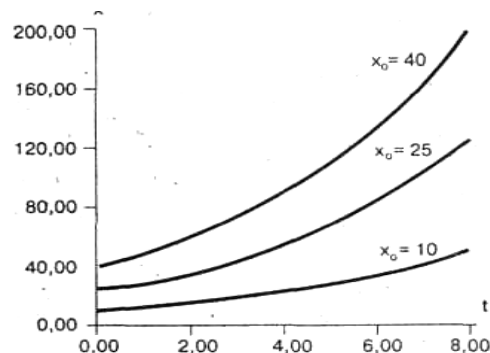


$\varepsilon > 0$

$\varepsilon < 0$



$\gamma = \sigma, \varepsilon = 0$



варація $x_0, \varepsilon = const = 0,2$

Рисунок 1.1. – Зміна чисельності особин популяції

Виконання роботи

Проаналізуйте поведження системи при різних параметрах γ, σ, x_0 .

Для цього:

1. Запишіть закон зміни $x(t)$ для заданих параметрів.

2. Побудуйте графіки $x(t)$. Криві $x(t)$ для різних γ повинні бути представлені всі на одному рисунку, відповідно для різних σ - на іншому, для різних x_0 - на третьому.

3) Оцініть із графіків характерні величини процесу:

а) Час $T_{0,5}$, коли чисельність особин зміниться в 2 рази в порівнянні з первісної. Зіставте з розрахунковими величинами:

$$T_{0,5} = \frac{\ln 2}{|\varepsilon|}.$$

Побудуйте графік залежності $T_{0,5}(|\varepsilon|)$.

Зробіть висновок про вплив коефіцієнта росту на характерний час $T_{0,5}$.

б) Швидкість зміни чисельності популяції при $t = 0$. Зіставте з розрахунковими величинами:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = x_0 \varepsilon.$$

Зробіть висновок про вплив ε на швидкість зміни чисельності популяції в початковий момент часу.

Завдання 1. Проаналізуйте поведження системи при зміні коефіцієнта росту $\varepsilon > 0$ ($\gamma > \sigma$). Заповніть таблицю:

Параметри	γ , 1/год	σ , 1/год	ε , 1/год	x_0	Закон зміни $x(t)$
1 система	0,9	0,6	0,3	50	
2 система	1,0	0,6	0,4	50	
3 система	1,1	0,6	0,5	50	

Завдання 2. Проаналізуйте поведження системи при зміні коефіцієнта росту $\varepsilon < 0$ ($\gamma < \sigma$). Заповніть таблицю:

Параметри	γ	σ	ε	x_0	Закон зміни $x(t)$
1 система	0,5	0,6	-0,1	50	
2 система	0,4	0,6	-0,2	50	
3 система	0	0,6	-0,6	50	

Завдання 3. Проаналізуйте поведження системи при коефіцієнті росту $\varepsilon = 0$ ($\gamma = \sigma$). Заповніть таблицю:

Параметри	γ	σ	ε	x_0	Закон зміни $x(t)$
Система	0,6	0,6	0	50	

Завдання 4. Проаналізуйте поведження системи при змінах початкової чисельності особин x_0 . Заповніть таблицю:

Параметри	γ	σ	ε	x_0	Закон зміни $x(t)$
1 система	0,8	0,6	0,2	10	
2 система	0,8	0,6	0,2	50	
3 система	0,8	0,6	0,2	100	