Складання формалізованого опису моделі біосистеми

В основу математичного моделювання покладено принцип ідентичності форми рівнянь і однозначність співвідношень між змінними в рівняннях оригіналу і моделі, тобто принцип аналогії об'єкта з моделлю. Основним процесом при моделюванні є формалізація.

Формалізація інформації про деякий об'єкт – це її відображення в певній формі, зведення змісту до форми. Формули, що описують фізичні процеси – це формалізація цих процесів. Радіосхема електронного пристрою – це формалізація функціонування цього пристрою.

Формалізована інформаційна модель – ц певні сукупності знаків (символів), які існують окремо від об'єкта моделювання, можуть піддаватися передачі і обробці. Реалізація інформаційної моделі на комп'ютері зводиться до її формалізації в формати даних, з якими "вміє" працювати комп'ютер.

За допомогою формальних мов будуються формальні інформаційні моделі (математичні, логічні та ін.). Процес побудови інформаційних моделей за допомогою формальних мов називається формалізацією.

Однією з найбільш широко поширених формальних мов є математична. Моделі, сформовані з використанням математичних понять і формул, називаються математичними моделями.

При складанні математичних моделей можуть використовуватися різні математичні засоби опису об'єкта - диференціальні або інтегральні рівняння, теорія множин, теорія графів, теорія ймовірностей, математична логіка та інше.

Прикладом узагальненого запису математичної моделі може служити:

$$Y = F(X,Q)$$

де Y, X, Q - відповідно вектори вихідних, внутрішніх і зовнішніх параметрів;

F - деяка відома функція, розмірність якої збігається з розмірністю вектора вихідних параметрів $F=\{f, ..., f\}$.

У даному випадку існує явний функціональний зв'язок між вихідними параметрами системи (тобто властивостями системи) і її внутрішніми і зовнішніми параметрами. По такій явній залежності легко оцінювати вплив внутрішніх і зовнішніх параметрів на вихідні параметри системи. Однак у більшості випадків у явному виді математичну модель створити не вдається.

Крім внутрішніх, зовнішніх і вихідних параметрів виділяють фазові змінні $V = v(W,t)$.

Фазові змінні характеризують фізичний або інформаційний стан об'єкта, а їх зміни в часі виражають перехідні процеси в об'єкті.

Фазові змінні в загальному випадку є функціями незалежних координат

$$W=\{w1, ..., wi, ..., wn\}T \text{ і часу } t.$$

У загальному випадку математична модель об'єкта може бути представлена в наступному виді: $Lv\ (w, t, v, dv/dt, dv/dt, dv/dw, dv/dw)=0$, (2) або в скороченій формі Lv(W,t)=((W,t)')

Тут L - вектор операторів над фазовими змінними d, ,*f* - диференціальні, інтегральні оператори, алгебраїчні функції; v(W,t) - шукана функція (фазова змінна); ф - задана вектор- функція.

Прикладом запису ММ в загальному вигляді може служити одномірне хвильове рівняння. du/dx -1/a xdu/dt =0.

Більшість вихідних параметрів *Y* є функціоналами фазових змінних. Для їх визначення спочатку необхідно при заданих зовнішніх і внутрішніх параметрах розв'язати систему рівнянь - тобто знайти фазові змінні, а вже потім визначити вихідні параметри системи.

Використання принципів блочно-ієрархічного підходу до проектування приводить до ієрархії математичних моделей проектованих об'єктів по рівнях абстракції. Об'єднання рівнів, споріднених по характеру використовуваного математичного апарата, приводить до утворення трьох укрупнених рівнів:

• мікрорівень (моделі з розподіленими параметрами).

• макрорівень (моделі з зосередженими параметрами)

• метарівень (системний рівень)

На *мікрорівні* типові ММ представлені *диференціальними рівняннями в часткових похідних (ДРЧП) разом із крайовими умовами*. До цих моделей, які називають розподіленими, відносять рівняння математичної фізики.

Макрорівень використовує представлення про об'єкт, як про дискретний простір.

Математичний опис процесів в об'єктах на макрорівні представляють *системами звичайних диференціальних і алгебраїчних рівнянь*. Аналітичні рішення таких систем при типових значеннях їхніх порядків у практичних задачах отримати не вдається, тому в САПР переважно використовуються алгоритмічні моделі.

Вихідними для формування ММ об'єктів на макрорівні є компонентні і топологічні рівняння.

Компонентними рівняннями називають рівняння, що описують властивості елементів (компонентів), тобто це рівняння математичних моделей елементів (ММЕ).

Топологічні рівняння описують взаємозв'язки в системі, що моделюється.

У сукупності, компонентні і топологічні рівняння являють собою вихідну математичну модель вузла або виробу.

Очевидно, що компонентні і топологічні рівняння в системах різної фізичної природи відбивають різні фізичні властивості, але можуть мати однаковий формальний вид. Однакова форма запису математичних співвідношень дозволяє говорити про формальні аналогії компонентних і топологічних рівнянь. Такі аналогії існують для механічних, електричних, гідравлічних (пневматичних), теплових об'єктів. Наявність аналогій приводить до практично важливого висновку:

значна частина алгоритмів формування і дослідження моделей у САПР виявляється інваріантною і може бути застосована до аналізу проектованих об'єктів у різних предметних областях.

Єдність математичного апарата формування ММ є особливо зручним при аналізі систем, що складаються з фізично різнорідних підсистем.

Розрізняють *фазові змінні* двох типів:

1) *змінні типу потенціалу* (наприклад, електрична напруга) і

2) *змінні типу потоку* (наприклад, електричний струм).

Кожне компонентне рівняння характеризує зв'язок між різнотипними фазовими змінними, стосовно одного компонента (зв'язок між напругою і струмом).

Моделі можна представляти у виді систем рівнянь або в графічній формі, якщо між цими формами установлена взаємно однозначна відповідність. Як графічну форму часто використовують еквівалентні схеми.

Представлення топологічних рівнянь.

Відомий ряд методів формування ММ на макрорівні. Одержувані з їхньою допомогою моделі розрізняються орієнтацією на ті або інші чисельні методи рішення і набором базисних змінних, тобто фазових змінних, що залишаються в рівняннях підсумкової ММ. Загальним для всіх методів є вихідна сукупність топологічних і компонентних рівнянь.

При записі топологічних рівнянь зручно використовувати проміжну графічну форму представлення моделі у виді еквівалентної схеми, що складає з двохполюсних елементів. Спільність підходу при цьому зберігається, тому що будь-який багатополюсний компонент можна замінити підсхемою із двополюсників.

У свою чергу еквівалентну схему можна розглядати як спрямований граф, дуги якого відповідають гілкам схеми. Напрямку потоків у галузях вибираються довільно (якщо реальний напрямок при моделюванні виявиться протилежним, то це приведе лише до негативних чисельних значень потоку).

Приклад деякої простої еквівалентної схеми і відповідного їй графа приведена на рис. Для конкретності і простоти викладу на рис. 3.6 використані умовні позначки, характерні для електричних еквівалентних схем, по тій же причині далі в цьому параграфі часто застосовується електрична термінологія.

Очевидно, що пояснені вище аналогії дозволяють при необхідності легко перейти до позначень і термінів, звичним для механіків.

Для одержання топологічних рівнянь усі гілки еквівалентної схеми розділяють на підмножини хорд і гілок дерева. Мається на увазі покриваюче (фундаментальне) дерево, тобто підмножина дуг, не утворююче жодного замкнутого контуру, де в число вершин графа (вузлів еквівалентної схеми). На рис. (б) показаний граф еквівалентної схеми рис. (а), товстими лініями виділено одне з можливих покриваючих дерев.

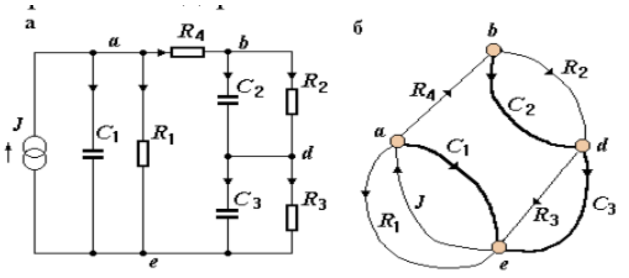


Рисунок 3.3 -Еквівалентна схема (а) і її граф (б)

Вибір дерева однозначно визначає вектора напруг U X і струмів I X хорд, напруг иВД і струмів IВД гілок дерева і приводить до запису топологічних рівнянь у виді $U_х + MU_{вд} = 0$, $I - M^T I_х = 0$

де M – матриця контурів і перетинів. M^T – транспонована M-матриця.

Хорди	Гілки дерева		
	CI	*C2*	*C3*
R1	-1	0	0
R2	0	-1	0
R3	0	0	-1
R4	-1	+1	+1
J	+1	0	0

У M-матриці число рядків відповідає числу хорд, число стовпців дорівнює числу гілок дерева. M – матриця формується в такий спосіб. По черзі до дерева підключаються хорди. Якщо при підключенні до дерева *p*-й хорди *∂*-я галузь входить у контур, що утворився, то елемент M *pq* матриці дорівнює +1 при збігу напрямків гілки і підключеної хорди; M = -1 при розбіжності напрямків. У противному випадку M = 0. Для схеми на рис. 8 M - матриця представлена у виді табл. 1.

Методи аналізу на мікрорівні.

У САПР рішення диференціальних або інтегрально-диференціальних рівнянь з частками похідними виконується чисельними методами. Ці методи засновані на дискретизації незалежних змінних – їхньому представленні кінцевою множиною значень в обраних вузлових точках досліджуваного простору. Ці точки розглядаються як вузли деякої сітки, тому використовувані в САПР методи – це сіткові методи.

Серед сіткових методів найбільше поширення одержали два методи:

- метод скінчених різностей (МКР)
- і метод скінчених елементів (МКЕ).

Зазвичай виконують дискретизацію просторових незалежних змінних, тобто використовують просторову сітку. У цьому випадку результатом дискретизації є система звичайних диференціальних рівнянь для нестаціонарної, або система алгебраїчних рівнянь для стаціонарної задачі.

В методі скінчених різниць алгебралізація похідних по просторових координатах базується на апроксимації похідних скінчено-різницевими виразами. При використанні методу потрібно вибрати кроки сітки по кожній координаті і вид шаблона. Під шаблоном розуміють безліч вузлових точок, у яких значення змінних використовують для апроксимації похідної в одній конкретній точці.

Математичні методи, покладені в основу алгоритмічних процесів конструювання РЕА, а також процеси організації вхідної та вихідної інформації про проектований об'єкт широко використовують поняття і символи теорії множин.

Основні поняття теорії множин

Під *множиною* розуміють сукупність певних об’єктів, які об’єднані спільними властивостями. При цьому природа самих об'єктів, що становлять ту або іншу множину нас не буде цікавити. Окремі об'єкти, із яких складається множина, називаються *елементами множини*.

Елементи множини можуть мати саму різну природу. Наприклад, можна говорити про множину мікросхем, що входять в певну конструкцію РЕА, або про множину креслень, що входять в повний комплект конструкторської документації для виробництва якого-небудь виробу, і т. д.

Множини позначають заголовними буквами латинського алфавіту: X, Y, Z, а елементи множин – відповідними малими літерами того ж алфавіту: x, y, z або малими буквами з індексами: x1, x2, ... y1, y2, ...

Рівність X = {x1, x2, ..., x*n*} свідчить про те, що елементи x1, x2, ..., x*n* є елементами множини X.

Множини можна задавати не тільки перерахуванням їх елементів, але і за допомогою описового способу, що вказує характерну властивість, якою володіють всі елементи цієї множини. Наприклад, якщо в усій множини X мікросхем електронного блоку складної радіоапаратури є деяка множина A гібридних інтегральних схем, то це можна записати таким чином: A = {*x* є X: *x* – гібридна інтегральна схема}, що читається так:

множина A складається з елементів *x* множини X, які володіють тими ж властивостями, що й *x* гібридної інтегральної схемою. Тут введено нове позначення «**є**», що означає, що об'єкт *x* є елементом множини X. Якщо ж деякий об'єкт *y* не належить множині X то цю умову записують у вигляді *y* ∉ X.

Залежно від кількості елементів усі множини поділяються на *скінченні та нескінченні*. Множина називається *скінченною*, якщо вона містить скінченну кількість елементів, тобто є реальна або потенціальна можливість перерахувати всі її елементи. Інакше кажучи, існує натуральне число, яке виражає кількість елементів множини. Наприклад, множина вершин трикутника, множина студентів в університеті тощо.

Відповідно, *нескінченною* називається множина, яка містить нескінченну кількість елементів, тобто не існує натурального числа, що дорівнює кількості елементів. Нескінченні множини, в свою чергу, поділяються на зліченні та незліченні (континуальні). Елементи *зліченної* множини можна поставити у відповідність ряду натуральних чисел. Наприклад, множина всіх парних, непарних, дробових, раціональних чисел тощо. Множину називають *не більше, ніж зліченною*, якщо вона є або скінченною, або зліченною. Елементи *незліченної* множини не можна підрахувати за допомогою натурального ряду (множина дійсних, ірраціональних чисел; множина точок на прямій, у квадраті; множина всіх підмножин зліченної множини).

У теорії множин вводиться поняття *порожньої* множини, в якій не міститься жодного елемента. Порожню множину позначають спеціальним символом Ø. Так, наприклад, якщо множина X порожня, то пишуть X = Ø. Поняття порожньої множини аналогічно нулю в алгебрі чисел.

Крім порожньої множини, також часто використовується поняття універсальної множини (позначається *U* або 1) або одиничної множини, яка містить певні множини та всі множини, утворені в результаті операцій над даними множинами. Ця множина відповідає одиниці в алгебрі чисел. Таке безліч має володіти тим властивістю, що перетин з ним будь-якою множиною X дає в результаті цю ж множину X.

У конкретних програмах в якості універсальної множини можуть використовуватися різні загальні підмножини. Наприклад, серед множини комплектів конструкторських документів на виготовлення виробів РЕА повний комплект конструкторських документів є універсальною множиною цих документів або коли при розгляді множин мікросхем окремих субблоків РЕА виділяють універсальну безліч таких мікросхем на всю цю радіоелектронну апаратуру в цілому.

Послідовність з *n* елементів множини називають *n*-рядком. На відміну від звичайної множини, де порядок елементів байдужий, в *n*-рядку обов'язково задається певна послідовність.

Кількість елементів множини X = {x1, x2 ,…x*n* } називається її *потужністю* і позначається так: |*X*| — потужність множини *X,* |X| = *n*.

Визначення 1.1. *Булеан* $B(M)$ множини M – є множина всіх підмножин множини M, при цьому M називається *універсумом* (*універсальною множиною* або *простором*) і часто позначається U.

Визначення 1.2. *Потужність* множини (*кардинальне число*) – кількість елементів множини. Потужність множини позначається $|M|$ або $\mathrm{card}M$. *Потужність булеана* визначається формулою:

$$|B(M)| = 2^{|M|}. \tag{1.1}$$

Кінцева множина містить кінцеве число елементів.

Порожня множина $\varnothing$ не містить жодного елемента, його потужність дорівнює нулю: $|\varnothing| = 0$.

Приклад 1.2. Дано: множина $A = \{1,2,3\}$. Знайти: $|A|, |B(A)|, B(A)$.

Розв'язок. Потужність множини A визначається кількістю елементів: $|A| = 3$. Потужність булеана множини А обчислюється за формулою (1.1): $|B(A)| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$. Булеан множини A містить порожню множину – $\varnothing$; всі одноелементні підмножини множини A – $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$; всі двоелементні підмножини множини A – $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{1,3\}$; триелементну підмножину, що співпадає із самою множиною – $\{1,2,3\}$:

$$B(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Таким чином, булеан множини А складається з порожньої множини, трьох одноелементних підмножин множини А, трьох двоелементних підмножин множини А та самої множини А.

Множина X подібна множині Y, якщо обидва ці множини складаються з одних і тих самих елементів. Якщо множина X повністю утримується в множині Y і при цьому |X | <| Y |, то говорять, що множина X є підмножиною множини Y: X є Y.

У разі коли X є Y і одночасно має місце рівність X = Y, то множини X і Y збігаються, рівні. Символічна запис X $\notin$ Y означає, що множина X не збігається з множиною Y.

Із означень випливає, що для будь-яких множин *A, B* та *C*,

якщо *A* = *B*, то *B* = *A*;

якщо *A* = *B* та *B* = *C*, то *A* = *C*.

Деякі елементи множин можна вважати еквівалентними в тому випадку, коли будь-який з цих елементів за певних умов можна замінити іншим, тобто дані елементи знаходяться у відносній еквівалентності.

Приклад: належності до однієї функціональної групи мікросхем або до одного класу типорозмірів і т. д.

Термін «відношення еквівалентності» будемо застосовувати при виконанні наступних умов:

1) кожен елемент еквівалентний самому собі;

2) висловлювання, що два елементи є еквівалентними, не вимагає уточнення того, який з елементів розглядається першим, а який другим;

3) два елементи, еквівалентні третьому, еквівалентні між собою.

Введемо для позначення еквівалентності символ ~, тоді розглянуті умови можна записати наступним чином:

1) x ~ X (рефлективність);

2) x ~ Уy ~ x (симетричність);

3) x ~ У і y ~ z x ~ z (транзитивність).

Отже, ставлення R називають ставленням еквівалентності, якщо воно рефлексивно, симетрично і транзитивній.

Очевидно, що всі елементи одного і того ж класу еквівалентності еквівалентні між собою (властивість транзитивності). Тоді всякий елемент XX може знаходитися в одному і тільки одному класі еквівалентності, тобто в цьому випадку безліч X розбивається на деяку непересічне підмножина класів еквівалентності , де J - деяка множина індексів.

Таким чином, кожному відношенню еквівалентності на безлічі X відповідає деякий розбиття безлічі X на класи.

Часто стикаються з відносинами, які визначають певний порядок розташування елементів множини. Наприклад, в процесі автоматизованого конструювання потрібно вводити множину одних вихідних даних раніше або пізніше, ніж множину інших. При цьому може виявитися, що елементи однієї множини більше або менше елементів іншої і т.д. У всіх цих випадках можна розташувати елементи множини X або групи елементів в деякому порядку (наприклад, у вигляді спадної або зростаючій послідовності), тобто ввести відношення порядку на множині X.

Множину X називають упорядкованою, якщо будь-які два елементи x і y цієї множини можна порівняти, тобто якщо для них виконується одна з умов: $x < y$, $x = y$, $y < x$.

Упорядковану множину називають кортежем. У загальному випадку кортеж – це послідовність елементів, тобто сукупність елементів, в якій кожен елемент займає цілком певне місце. Елементи упорядкованої множини називаються компонентами кортежу. Прикладами кортежу може служити упорядкована послідовність чисел арифметичної або геометричної прогресій, послідовність технологічних операцій при виготовленні якого-небудь радіоелектронного вироби, упорядкована послідовність настановних позицій друкованої плати для закріплення конструктивних елементів.

У всіх цих множинах місце кожного елемента цілком визначено і не може довільно змінюватись.

При обробці конструкторської інформації на ЕОМ часто використовують відносини домінування. Кажуть, що x є X домінує над y є X, т.б. $x >> y$, якщо елемент x в чому-небудь перевершує (має пріоритет) елементу y тієї ж множини. Наприклад, під x можна розуміти один із списків даних, який повинен надійти на обробку першим.

При аналізі декількох конструкцій РЕА будь-якої з них повинен бути відданий пріоритет, оскільки ця конструкція має кращі, з нашої точки зору, властивостями, ніж інші, тобто конструкція x домінує над конструкцією y.

Властивість транзитивності при цьому не має місця. Дійсно, якщо, наприклад, конструкцію x з яких-небудь одним параметрам віддали перевагу конструкції y, а конструкцію y по будь-яким іншим параметрам віддали перевагу конструкції z, то звідси ще не випливає, що конструкції x повинно бути віддано перевагу в порівнянні з конструкцією p.

Способи завдання множин:

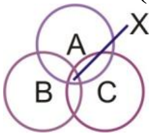
1. Перелік елементів – найбільш природний спосіб завдання множини, коли множина, яка складається з елементів, задається списком своїх елементів $\{a, b, c\}$, $M=\{1,2,3,4\}$.

2. За допомогою характеристичної властивості елементів – універсальний спосіб завдання множини, коли властивості її елементів можуть бути описані виразом. M={x | x, що мають властивість Q} або $M=\{x|P(x)\}$;

$A=\{x|x=2^k, k\in N\}$; $B=\{x|\sin x=1\}$;

3. Аналітичний, за допомогою символів операцій над множинами та дужок. $X=(A\cup B)\cap C$

4. Геометричне зображення множин (рисунок).



Діаграма Ейлера для ілюстрації множини X

З кількох множин можна утворити іншу множину шляхом операцій над ними. Основними операціями над множинами є бінарні операції (коли з двох множин утворюється третя) об'єднання, перетин, різниця; як унарну операцію (із однієї множини утворюється інша) можна розглядати доповнення.

Дії над множинами.

Над множинами, як і над іншими математичними величинами, можна робити деякі дії, наприклад виконувати перетин множин, їх об'єднання, віднімання, знаходити доповнення, декартовій перетвір і ін..

Об'єднанням множин X і Y називається множина, що складається зі всіх тих і тільки тих елементів, що належать хоча б одній з множин X, Y, тобто належать X або належать Y. Позначається через $X\cup Y$.

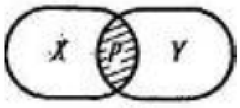
$x \in X\cup Y \leftrightarrow x\in X$ або $x\in Y$.

Наприклад: X ={1,2,3,4,5} і Y={2,4,6,7},те $X\cup Y$={1,2,3,4,5,6,7}.

За допомогою цієї операції можна підрахувати, наприклад, число типорозмірів конструктивних елементів для друкованих плат X і Y або загальне число зовнішніх електричних з'єднань друкованих плат X і Y.

Перетином множин X і Y називається множина, що складається зі всіх тих і тільки тих елементів, що належать як множині X, так і множині Y, позначається $X\cap Y$ (іноді називається добутком множин).

$x \in X\cap Y \leftrightarrow x\in X$ і $x\in Y$.



Наприклад: X ={1,2,3,4,5} і Y={2,4,6,7},те $X \cap Y=\{2,4\}$.

За допомогою операції перетину множин можна, наприклад, виявити безліч типорозмірів конструктивних елементів, загальних друкованим платам X і Y, або безліч міжплатний сполук для друкованих плат X і Y, т. е. виявити будь-яку безліч, що володіють певними загальними властивостями.

Множини X і Y називаються множинами що не *перетинаються*, якщо вони не мають загальних елементів, тобто якщо $X \cap Y=\varnothing$.

Кажуть, що множини X і Y знаходяться в загальному положенні, якщо виконуються наступні три умови:

1) $\exists\ x \in X$ та $x \notin Y$;
2) $\exists\ y \in Y$ та $y \notin X$;
3) $\exists\ x \in X$ та $x \in Y$.

Між двома множинами X і Y може бути одне з п'ятьох відношень:

$X = Y$;

$X \subset Y$;

$Y \subset X$;

$X \cap Y = \varnothing$; X та Y знаходяться в загальному положенні.

Операції об'єднання і перетину множин володіють комутативним і асоціативним властивостями (характерний перемісний закон):

$X \cap Y= Y \cap X$,

$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap Z$.

Різницею множин X і Y називається множина, що складається зі всіх тих і тільки тих елементів, що належать множині X й не належать множині Y, позначається X\Y.

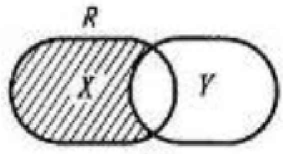
$x \in X \backslash Y \leftrightarrow x \in X$ и $x \notin Y$.

Наприклад: X ={1,2,3,4,5} і Y={2,4,6,7},те X\Y={1,3,5}.

На відміну від двох попередніх операцій, різниця двох множин визначена для двох множин, тобто суворо двомісна, некомутативна ($X \backslash Y \neq Y \backslash X$).

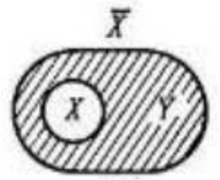
За допомогою цієї операції можна виявити суто індивідуальні ознаки об'єкта, наприклад кількість типорозмірів конструктивних елементів, що належать тільки платі X.

Роль одиниці в алґебрі множин грає "універсальна множина" U, що задовольняє наступну умову: $X \cap U = X$, $X \cup U = U$ (немає аналогії в звичайній алґебрі) .



Доповненням множини X називається множина всіх елементів, що не належать X, а належать $\overline{X} = U \backslash X$. Доповненням множинах по відношенню до безлічі Y називають безліч X, що складається з елементів множини Y, не належать безлічі X.

$\overline{X} = \{x : x \in U \text{ и } x \notin X\}$.



З визначення випливають наступні властивості: $X \cap \overline{X} = \varnothing; X \cup \overline{X} = U$.

За допомогою операції доповнення безлічі можна виявити всі додаткові, відсутні ознаки проектованого вироби і піддати їх аналізу.

Справедливі наступні тотожністі алґебри множин:

1) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;

2) у звичайній алґебрі ми не можемо замінити в дистрибутивному законі дію додавання множенням, а дію множення додаванням, тому що це призводить до хибного виразу (ab)+c = (a+c)(b+c). Але в алґебрі множин подібний вираз має зміст: $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

3) якщо $Y \subseteq X$, те $X \cap Y = Y$, $X \cup Y = X$;

4) якщо $Y = X$, те $X \cap X = X$, $X \cup X = X$;

5) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$;

6) $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

Тотожністі 5) і 6) звичайно називаються тотожністями Де-Моргана.

Теорію множин можна побудувати формально, використовуючи аксіоматичний підхід. Перерахуємо основні аксіоми теорії множин:

Аксіома існування. Існує хоча б одна множина.

Аксіома об’ємності (екстенціональності). Якщо множини *A* та *B* складаються з тих самих елементів, тоді вони збігаються (рівні) *A* = *B*.

Аксіома об’єднання (пари). Для довільних множин *A* та *B* існує множина, елементами якої є всі елементи множини *A* та всі елементи множини *B* і яка ніяких інших елементів не містить.

Із аксіом об’ємності та об’єднання випливає, що множина, яка задовольняє умову об’єднання, єдина. Назвемо цю множину *об’єднанням* множин *A* та *B*. Це можна записати так: *C* = *A* È *B*.

Аксіома різниці. Для довільних множин *A* та *B* існує множина, елементами якої є ті, і лише ті елементи множини *A*, які не є елементами множини *B*.

Аналогічно із аксіоми об’ємності та аксіоми різниці випливає, що існує лише одна множина, яка містить ті елементи множини *A*, що не містяться в множині *B*. Назвемо цю множину різницею множин *A* та *B*: *C* = *A* \ *B*.

Аксіома степеня. Для кожної множини *A* існує множина *B*(*A*) (булеан), елементами якої є всі підмножини множини *A*, і лише вони.

Аксіома існування порожньої множини. Існує така множина Æ, якій не належить жодний елемент.

Основні позначки теорії множин

Позначка	*Значення*
	Знак слідування, імплікації
$\rightarrow$	Звідси слідує
$\supset$	Скрізь
$\Leftrightarrow$	Рівносильність
$\forall$	Будь-який
$\exists$	Квантор існування, існує
$\nexists$	Не існує
$\exists!$	Існує і єдиний
$\subseteq$	Підмножина, включено в
$\supseteq$	Надмножина, включає в себе
$\subsetneq$	Власна підмножина
$\supsetneq$	Власна надмножина
$\cup$	Об’єднання
$\cap$	Пересікання
$\setminus$	Різниця множин
$\in$	Належить
$\notin$	Не належить
$\emptyset$	Порожня множина
$\{\}$	Множина елементів
$\{\|\}$	Множина елементів, що задовольняє умові
$\equiv$	Логічна еквівалентність
$\sim$	Еквівалентність