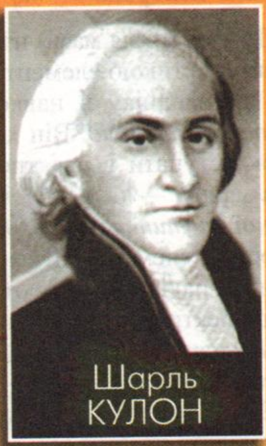
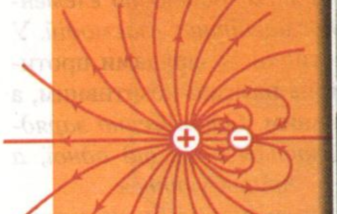
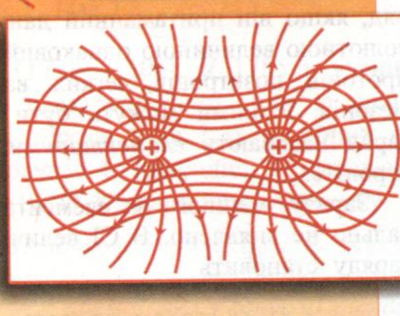
ЕЛЕКТРИКА

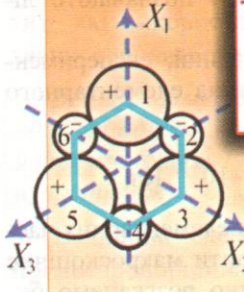
Розділ 1

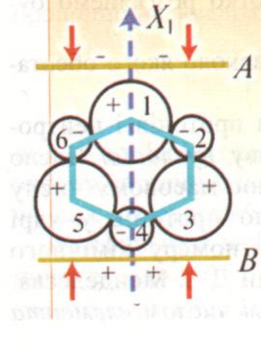
ЕЛЕКТРО-СТАТИКА

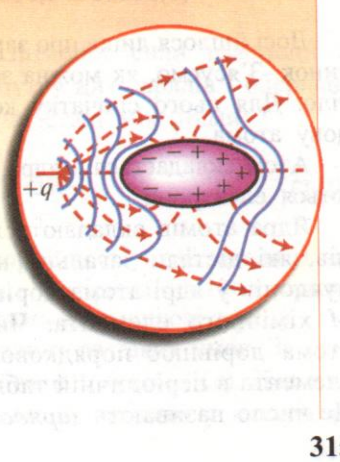

Шарль КУЛОН











ВСТУП

Вчення про електрику як особливий вид природознавства розвинулося порівняно пізно. Початком наукового вчення про електрику вважають 1600 р., коли англійський лікар Вільям Гільберт (1544—1603) опублікував книгу «Про магніт, магнітні тіла і великий магніт — Землю», в якій узагальнив відомі на той час знання і результати власних досліджень електричних і магнітних явищ. Однак лише у XIX ст., після того як італійський фізик Алессандро Вольта (1799), французький фізик Андре Ампер (1820) і англійський фізик Майкл Фарадей (1831) виявили способи отримання електричного струму і відкрили взаємозв'язок між електричними і магнітними явищами, це вчення набуло таких обсягів і значень, які нині майже збігаються з обсягом і значенням усієї сучасної фізики.

Особливо велике промислове і соціальне значення почала відігравати електрика після відкриття у 1880 р. французьким фізиком і інженером Марселем Депре (1843—1918) можливості передачі електроенергії на великі відстані без значних втрат за умови значного підвищення напруги. Це відкриття остаточно звільнило промисловість від усяких обмежень, створюваних місцевими умовами, дало змогу передавати енергію води річок на дуже великі відстані, стало найпотужнішою підоймою для усунення відмінностей між містом і селом.

У сучасному світі електричним струмом виконують різноманітну роботу, приводять у рух електричні двигуни, живлять електронні схеми, інші прилади та пристрої. Нині важко назвати таку галузь людської діяльності, яка б не залежала від явищ, що породжуються рухомими електричними зарядами. Це пояснюється тим, що використання електрики має чимало істотних переваг, зокрема порівняно легке взаємне перетворення електричної енергії на інші види енергії, простоту передавання електроенергії на великі відстані, компактність і зручність електротехнічних машин та обладнання, високий коефіцієнт їх корисної дії.

До складу всіх видів речовини входять електрично заряджені частинки, взаємодія між якими здебільшого має електричну природу. Тому глибоке вивчення будови і властивостей речовини, застосування одержаних результатів у різних галузях науки й техніки майже завжди ґрунтується на знаннях і використанні законів взаємодії та руху електрично заряджених частинок.

I. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

1.1 ЕЛЕКТРИЧНИЙ ЗАРЯД. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗАРЯДУ

Усі тіла, як відомо, складаються з атомів. Вірогідно встановлено, що основну роль будівельних цеглинок Всесвіту відіграють елементарні частинки — електрони, протони і нейтрони. Вони по-різному взаємодіють з навколишнім середовищем і по-різному поводяться під його впливом. Різною є і їхня маса:

маса електрона	$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг;
маса протона	$m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг;
маса нейтрона	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг.

Другою (після маси) найважливішою внутрішньою характеристикою елементарних частинок, що визначає їх поведінку в навколишньому середовищі, є *електричний заряд*. Він характеризує здатність частинок вступати в електромагнітні взаємодії. Величина заряду — це *кількісна міра здатності елементарної частинки до електромагнітних взаємодій.* У природі є елементарні частинки із зарядами протилежних знаків. Заряд протона назвали позитивним, а заряд електрона — негативним. *Однойменно заряджені частинки відштовхуються одна від одної, а протилежно заряджені — притягуються.*

Експериментально встановлено: як би не відрізнялися інші властивості елементарних частинок, заряд, якщо він притаманний даній частинці, за абсолютною величиною однаковий у всіх електронів, протонів, позитронів, легких, важких і надважких мезонів. Різними можуть бути лише знаки. Цей заряд називають *елементарним* і позначають літерою *e*.

Заряду, меншого за елементарний, експериментально не виявлено. В СІ величина елементарного заряду становить

$$e = (1{,}60210 \pm 0{,}00007) \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}.$$

Досі йшлося лише про заряди елементарних частинок. З'ясуємо, як можна зарядити макроскопічне тіло. Для цього спочатку коротко розглянемо будову атома.

Атом складається з ядра, навколо якого обертаються електрони.

Ядра атомів складаються з протонів і нейтронів, які дістали загальну назву *нуклонів*. Число нуклонів у ядрі атома дорівнює масовому числу *M* хімічного елемента. Число протонів у ядрі атома дорівнює порядковому номеру хімічного елемента в періодичній таблиці Д. І. Менделєєва. Це число називають *зарядовим числом елемента* (Z). Заряд ядра атома елемента із зарядовим числом Z дорівнює Ze, де e — абсолютне значення елементарного заряду.

Нейтрони — електрично нейтральні частинки. В ядрі атома з масовим числом M і зарядовим числом Z міститься $M - Z$ нейтронів.

За нормальних умов число електронів в атомі дорівнює зарядовому числу Z, тобто числу протонів у ядрі. Тому кожен атом за нормальних умов є електрично нейтральною мікроскопічною системою, яка складається з важкого ядра, оточеного дуже легкими порівняно з ним електронами (мал. 1.1).

Мал. 1.1

Речовина на макроскопічному рівні *електрично нейтральна*, оскільки складається з нейтральних атомів. Для того щоб зарядити тверде макроскопічне тіло, потрібно створити умови, за яких тіло мало б надлишкову кількість елементарних заряджених частинок одного знака. Негативний заряд тіла зумовлений надлишком електронів порівняно з протонами, а позитивний — їх нестачею.

Процес заряджання тіла називають *електризацією*, а електрично заряджені тіла — *наелектризованими*. Найпростіший і найдавніший спосіб електризації тіл — *електризація тертям*. Якщо скляну паличку потерти шовковою тканиною, то електрони із скла перейдуть у шовк і паличка набуде *позитивного* заряду. Якщо каучукову паличку потерти клаптиком хутра, електрони перейдуть на неї, і паличка набуде *негативного* заряду. Простим способом електризації тіл є також *заряджання їх через вплив*. Про механізм такого заряджання йтиметься далі.

Оскільки будь-який заряд q утворюється сукупністю елементарних зарядів, то він є цілим, кратним e:

$$q = \pm Ne, \tag{1.1}$$

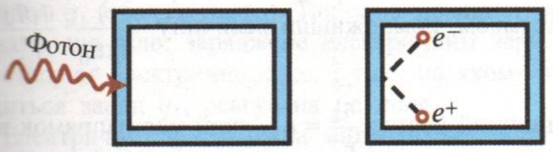
де N — надлишкова кількість елементарних заряджених частинок одного знака.

Заряд від одного тіла може бути переданий на інші тіла. При цьому заряд одного тіла зменшується на певну величину, а заряд інших тіл, на які перейшов заряд, збільшується на таку саму величину.

Цей факт є одним із фундаментальних законів збереження в природі:

Повна кількість електричного заряду в ізольованій системі залишається сталою.

Під ізольованою розуміють таку систему, через межу якої не може проникнути інша речовина. Електромагнітні хвилі здатні входити в систему і виходити з неї, не порушуючи цього принципу, оскільки кванти електромагнітного випромінювання (фотони) не несуть зарядів. Наприклад, у тонкостінному ящику, який вміщений у вакуум і який опромінюють гамма-променями, можна спостерігати утворення пари елементарних заряджених частинок: електрона і позитрона (частинки, цілком ідентичної електрону, за винятком того, що вона має *позитивний* заряд, який за абсолютною величиною дорівнює заряду електрона). За такого процесу фотон гамма-променів із високою енергією припиняє своє існування (мал. 1.2). Незважаючи на те, що утворились дві нові заряджені частинки, зміна повного заряду всередині і зовні ящика дорівнює нулю, тобто сумарний заряд системи залишається сталим.



Мал. 1.2

Ні електрон, ні позитрон не можуть виникнути або зникнути окремо. Процеси народження, або анігіляції, завжди мають місце тільки для пари елементарних частинок, яким притаманні заряди протилежних знаків. Жодних відхилень від закону збереження заряду не виявлено.

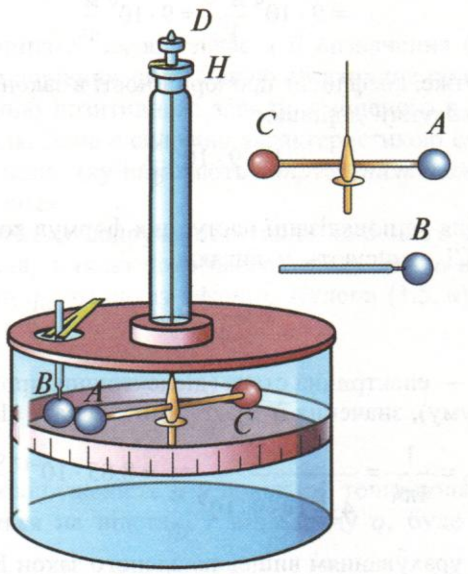
Отже, закон збереження електричного заряду є емпіричним, і його ще можна сформулювати так:

В ізольованій системі повний електричний заряд, тобто алгебрична сума позитивного і негативного зарядів, залишається сталим.

1.2. ЗАКОН КУЛОНА

До середини XVIII ст. успіхи у вивченні електрики були незначними. У 1746—1754 рр. американський фізик В. Франклін (1706—1790) довів електричну природу блискавки, тотожність земної й атмосферної електрики, відкрив, що за всіх видів електризації тіл завжди одночасно виникають обидва роди електрики в однакових кількостях.

У середині XVIII ст. вже висловлювалися припущення, що закон взаємодії зарядів аналогічний закону всесвітнього тяжіння. Першим це експериментально довів у 1777 р. англійський фізик Г. Кавендіш (1731—1810). Однак результати його досліджень не були опубліковані. Вони понад сто років пролежали в бібліотеці Кембриджського університету. Вагомий внесок у розвиток електростатики — вчення про наелектризовані тіла і сили взаємодії між ними, за умови, що тіла і заряди на них залишаються нерухомими — зробив французький фізик Ш. О. Кулон (1736—1806). У 1785 р. учений детально дослідив електростатичні сили за допомогою крутильних терезів (мал. 1.3), подібних до тих, які використовував І. Кавендіш. Проаналізувавши свої виміри, Ш. О. Кулон дійшов висновку:



Мал. 1.3

Два однойменні точкові заряди q_1 і q_2 діють один на одного з однаковими за величиною силами, напрямленими вздовж прямої, яка з'єднує ці заряди, в протилежні боки.

Величина електростатичної сили взаємодії F прямо пропорційна добутку цих зарядів і обернено пропорційна квадрату відстані між ними:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad (1.2)$$

де k — коефіцієнт пропорційності, який залежить від вибору системи одиниць вимірювання і від середовища, в якому перебувають взаємодіючі заряди.

Коефіцієнт k визначають за таких умов. За одиницю заряду в СІ прийнято 1 кулон (Кл). Два точкові заряди по 1 Кл кожен, вміщені у *вакуум* на відстані 1 м один від одного, взаємодіють між собою із силою $9 \cdot 10^9$ Н. Тоді з формули (1.2) знайдемо:

$$k = \frac{Fr^2}{q_1 q_2} = \frac{Fr^2}{q^2}.$$

Підставивши у цей вираз значення $F = 9 \cdot 10^9$ Н, $r = 1$ м і $q = 1$ Кл, дістанемо:

$$k = \frac{9 \cdot 10^9 \, \text{Н} \cdot 1\text{м}^2}{1\text{Кл}^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}}{\text{Кл}^2} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{В} \cdot \text{м}}{\text{Кл}} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{Ф}}.$$

Отже, коефіцієнт пропорційності в законі Кулона для *вакууму* дорівнює

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{Ф}}.$$

Для раціоналізації наступних формул коефіцієнт k в СІ записують у вигляді

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \tag{1.3}$$

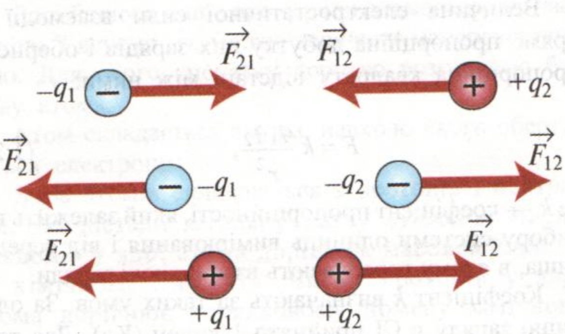
де ε_0 — електрична стала (діелектрична проникність вакууму), значення її знаходимо з виразу (1.3):

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{Ф}}} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}.$$

З урахуванням вищевикладеного закон Кулона в СІ для вакууму набуває такого вигляду:

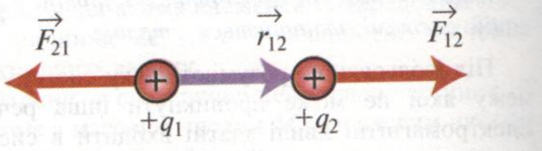
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{1.4}$$

Електростатична сила є вектором. Напрямок сили, яка діє з боку одного заряду на інший, завжди можна визначити знаками зарядів. Якщо знаки *протилежні*, то має місце *притягання*, і сила, яка діє на перший заряд, буде напрямлена до другого заряду. Якщо знаки *однакові*, то заряди *відштовхуються*, і сила, що діє на перший заряд, завжди напрямлена в протилежний від другого заряду бік (мал. 1.4).



Мал. 1.4

Закон Кулона (1.4) можна записати у векторній формі. Проведемо від точкового заряду q_1 (мал. 1.5)



Мал. 1.5

до точкового заряду q_2 радіус-вектор $\vec{r}_{12}$. Сила $\vec{F}_{12}$, що діє на заряд q_2 з боку заряду q_1, згідно з (1.4) чисельно дорівнює величині $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$ і напрямлена в той самий бік, що й радіус-вектор $\vec{r}_{12}$, за однакового знака обох зарядів q_1 і q_2 і в бік, протилежний радіусу-вектору $\vec{r}_{12}$,— за різних знаків зарядів q_1 і q_2. Тому ми дістанемо силу $\vec{F}_{12}$ за величиною і напрямком, помноживши величину $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$ на одиничний вектор $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \hat{\vec{r}}_{12}$, який має напрямок вектора $\vec{r}_{12}$.

Отже, закон Кулона у векторній формі можна записати:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \tag{1.5 а}$$

або

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\vec{r}}_{12}. \tag{1.5 б}$$

Як бачимо з мал. 1.5, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Закон Кулона у формі (1.4) і (1.5) дає змогу визначити електростатичні сили взаємодії між точковими зарядами у вакуумі в СІ.

Під точковими зарядами розуміють такі заряди, що містяться на тілах, лінійні розміри яких малі порівняно з відстанню між ними.

1.3. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ. НАПРУЖЕНІСТЬ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ. ГРАФІЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

Взаємодія між наелектризованими тілами, що знаходяться на певній відстані одне від одного, засвідчує, що поява електричного заряду на тілі —

це не лише місцеве явище. В просторі, який оточує заряджене тіло, стались певні досить істотні зміни — навколо нього утворилось електричне поле. Подібно до речовини *електричне поле є особливим видом існування матерії*, приховані, ще не розгадані рухи якої проявляються в просторі (навіть у вакуумі) у вигляді *електричних сил*, тобто сил, які діють на електричні заряди і зумовлені електричними зарядами. *Величина цих сил не залежить від швидкості руху зарядів.*

На підтримання даного стану електричного поля енергія не затрачається. Вона затрачається лише при встановленні цього поля (в процесі заряджання тіла). Електричне поле розподіляється в просторі неперервно.

Заряджені тіла взаємодіють не при безпосередньому контакті, а через свої поля. Дію електричних сил описують так. При заряджанні тіла зарядом q_1 навколо нього виникає електричне поле. Якщо в це поле внести тіло із зарядом q_2, то воно реагуватиме на нього, зазнаючи дії сили, спрямованої до тіла із зарядом q_1 (або від нього). Так само можна стверджувати, що тіло, заряджене електричним зарядом q_2, створює електричне поле, і тіло, на якому знаходиться заряд q_1, реагує на це поле.

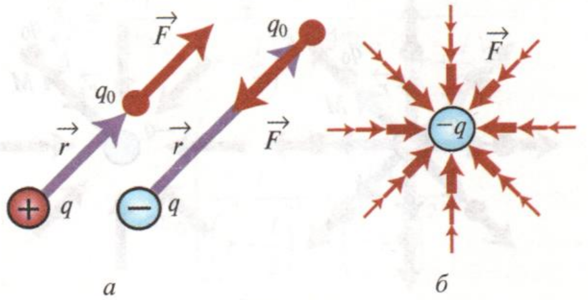
Електричне поле можна виявити не лише за допомогою механічної сили, яка діє на нерухомі заряджені тіла, вміщені в це поле, а й за індукуванням (наведенням) електричних зарядів на нерухомих металевих тілах, за допомогою поляризації діелектричних тіл, вміщених у це поле, та ін.

Властивості електричного поля можна описати за допомогою певних фізичних величин. Силовий вияв поля можна дослідити за допомогою пробного зарядженого тіла, на яке накладаються певні умови: його заряд має бути *позитивним* і досить малим, щоб своїм полем не спотворити поле, що вивчається. Пробним зарядженим тілом, наприклад, може бути легка заряджена бузинова кулька на шовковій нитці. Для спрощення викладу пробне заряджене тіло називатимемо *пробним зарядом*.

Якщо в будь-яку точку електричного поля вмістити пробний заряд q_0, то на нього діятиме сила. Вимірявши значення і напрямок цієї сили, одержимо вектор $\vec{F}$, що починається в даній точці (мал. 1.6, *а*). Так само можна знайти сили, що діють на пробний заряд у кожній точці поля (див. мал. 1.6, *б*)

Щоб вимірювані сили не залежали від значення пробного заряду q_0, визначають не повну силу $\vec{F}$, а відношення цієї сили до величини заряду q_0, тобто знаходять

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \tag{1.6}$$



Мал. 1.6

Величина $\vec{E}$, як випливає з її визначення (1.6), чисельно дорівнює силі, з якою електричне поле діє на одиницю позитивного заряду, вміщеного в дану точку поля. Вона є силовою характеристикою електричного поля, яку називають *напруженістю електричного поля*.

Визначимо напруженість поля точкового заряду q. Сила, з якою поле цього заряду діє на пробний заряд q_0, згідно із законом Кулона (1.5, *а*), дорівнює

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}.$$

Тоді напруженість $\vec{E}$ у довільній точці поля, яке знаходиться на відстані r від заряду q, буде

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}, \tag{1.7}$$

де $\vec{r}$ — радіус-вектор, проведений від заряду q до точки, в якій визначають напруженість.

Отже, напруженість електричного поля точкового заряду прямо пропорційна величині заряду і обернено пропорційна квадрату відстані від заряду до даної точки поля.

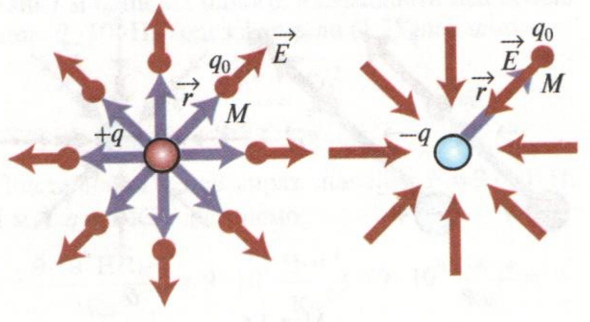
Поле точкового заряду радіальне. Вектор напруженості $\vec{E}$ напрямлений вздовж радіальної прямої, яка проходить через заряд у дану точку поля, від заряду, якщо він позитивний (мал. 1.7, *а*), і до заряду, якщо він негативний (див. мал. 1.7, *б*).

Загалом сила $\vec{F}$, а отже і $\vec{E}$, змінюється в електричному полі від точки до точки як за значенням, так і за напрямком. Тому силова характеристика поля визначає властивості точок поля.

Якщо заряд q вміщений в електричне поле, що описується вектором $\vec{E}$, то заряд зазнаватиме дії сили

$$\vec{F} = q\vec{E}. \tag{1.8}$$

Це є основне рівняння для сили електричного поля.



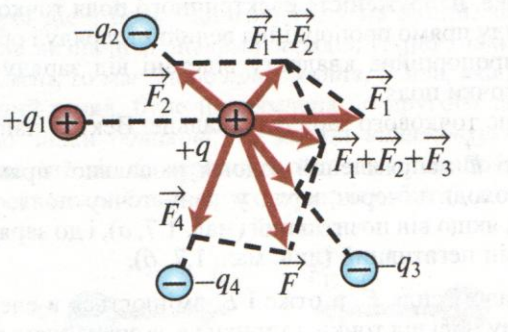
Мал. 1.7

За одиницю напруженості електричного поля в СІ взято напруженість такого поля, яке діє на одиницю заряду 1 Кл із силою 1 Н ($1\ \mathrm{CI}_E = 1\ \frac{\mathrm{Н}}{\mathrm{Кл}}$).

1.4. СУПЕРПОЗИЦІЯ ПОЛІВ. НАПРУЖЕНІСТЬ ПОЛЯ ДИПОЛЯ

Експериментально встановлено, що результуюча електрична сила, яка діє на заряд q з боку системи зарядів $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ (мал. 1.8), дорівнює векторній сумі сил, що діють з боку окремих зарядів системи:

$$\vec{F}_{\text{рез}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n. \quad (1.9)$$



Мал. 1.8

Отже, кожен із зарядів системи робить свій внесок у результуючу силу так, начебто інших зарядів немає. З урахуванням рівняння (1.8) вираз (1.9) набуває вигляду

$$q\vec{E}_{\text{рез}} = q\vec{E}_1 + q\vec{E}_2 + q\vec{E}_3 + \ldots + q\vec{E}_n.$$

Скоротивши останнє рівняння на q, дістанемо:

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots + \vec{E}_n. \quad (1.10)$$

З виразу (1.10) випливає, що результуюча напруженість електричного поля системи зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей окремих полів, створюваних у цій точці кожним із зарядів системи. Це твердження носить назву *принципу суперпозиції (накладання) електричних полів*.

Принцип суперпозиції дає змогу обчислити напруженості поля будь-якої системи зарядів. Скористаємось принципом суперпозиції для знаходження напруженості поля електричного диполя.

Електричним диполем називають систему двох однакових за абсолютною величиною різнойменних зарядів: $+q$ і $-q$, розміщених на відстані l один від одного, яка значно менша, ніж відстань від диполя до точок, в яких визначають характеристики електричного поля диполя. Відстань l між зарядами називають *плечем диполя*. Плече диполя — векторна величина. Умовно прийнято, що вектор $\vec{l}$ напрямлений від негативного заряду до позитивного. Добуток позитивного заряду q на плече диполя $\vec{l}$ називають *електричним моментом диполя*, або *дипольним моментом* ($\vec{p}$):

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (1.11)$$

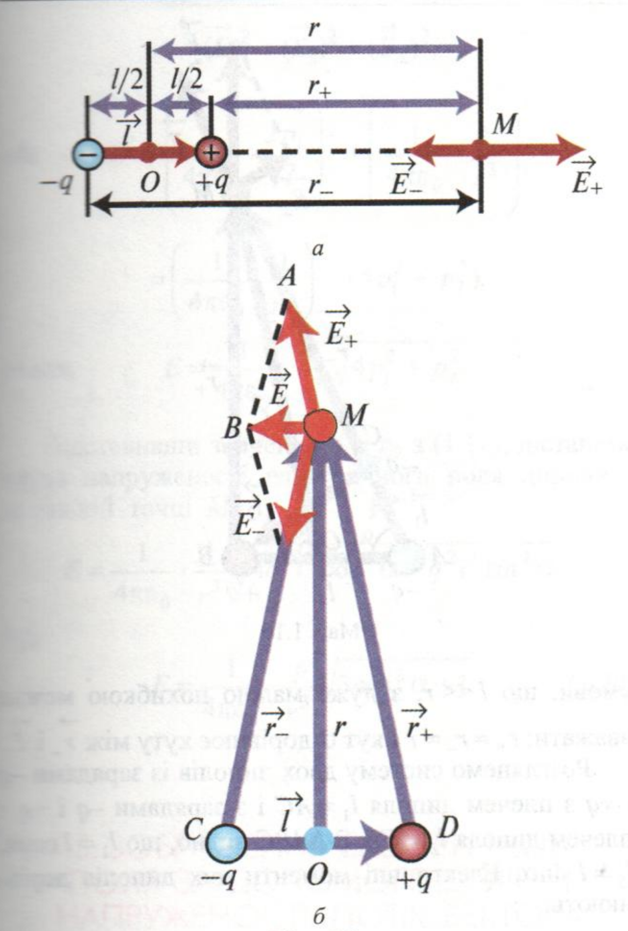
Як випливає з означення, дипольний момент $\vec{p}$ є вектором, що має такий самий напрямок, як і плече $\vec{l}$.

Електричний момент диполя в СІ вимірюють у кулон-метрах (Кл · м). Вивчення поля диполя, крім того, що дає змогу показати продуктивність принципу суперпозиції, ще має й практичний інтерес, оскільки велика група так званих полярних діелектриків складається з молекул, які є диполями.

Напруженість поля в точці, що лежить на поздовжній осі диполя (мал. 1.9, *а*). Положення точок на осі диполя характеризуватимемо їх відстанню r від центра O диполя. Напруженість поля диполя в кожній точці M, що лежить на осі, дорівнюватиме векторній сумі напруженостей полів зарядів $+q$ і $-q$. Позначимо їх відповідно $\vec{E}_+$ і $\vec{E}_-$. Тоді напруженість поля диполя $\vec{E}$ становитиме

$$\vec{E}_{\|} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-. \quad (1.12)$$

Величину напруженості поля точкового заряду визначають за формулою (1.7).



Мал. 1.9

Отже,

$$\vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+^2}\frac{\vec{r}_+}{r_+};\quad \vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_-^2}\frac{\vec{r}_-}{r_-},$$

де r_+ і r_- — відповідно відстані від зарядів $+q$ і $-q$ до точки M.

Як випливає з останніх виразів, $\vec{E}_+$ і $\vec{E}_-$ лежать на одній прямій і напрямлені в протилежні боки: $\vec{E}_+$ — вправо, $\vec{E}_-$ — вліво (див. мал. 1.9, *а*). Оскільки $r_+ = r - \frac{l}{2}$, а $r_- = r + \frac{l}{2}$, то $r_+ < r_-$, тому модуль вектора $\vec{E}_-$ більший за модуль вектора $\vec{E}_-$. Модуль результуючої напруженості в цьому разі $\vec{E}_\parallel$ дорівнює різниці модулів напруженостей $\vec{E}_+$ і $\vec{E}_-$, а напрямок вектора $\vec{E}_\parallel$ збігається з напрямком $\vec{E}_+$, тобто напрямлений вправо.

Знайдемо вираз для обчислення модуля результуючої напруженості електричного поля диполя в точці M:

$$\vec{E}_\parallel = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\right).$$

Після перетворень дістанемо:

$$\vec{E}_\parallel = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2lr}{r^4 - r^2\frac{l^2}{2} + \frac{l^4}{16}}.$$

Взявши до уваги, що $l << r$, у знаменнику можна знехтувати значеннями $\frac{r^2 l^2}{2}$ і $\frac{l^4}{16}$, оскільки їх модулі значно менші за r^4. При цьому одержимо:

$$\vec{E}_\parallel = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2p}{r^3}, \qquad (1.13)$$

де $p = ql$ — модуль електричного моменту диполя.

У векторній формі напруженість поля диполя в точці, що лежить на його поздовжній осі, має вигляд

$$\vec{E}_\parallel = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2\vec{p}}{r^3}. \qquad (1.14)$$

Отже, ***напруженість поля диполя в точці M, що лежить на поздовжній осі, прямо пропорційна електричному моменту диполя й обернено пропорційна кубу відстані від центра диполя до точки M.***

Вектор напруженості $\vec{E}_\parallel$ паралельний електричному моменту диполя $\vec{p}$.

Напруженість поля в точці, що лежить на перпендикулярі до середини плеча диполя (див. мал. 1.9, *б*). За принципом суперпозиції напруженість у точці M

$$\vec{E}_\perp = \vec{E}_+ + \vec{E}_-,$$

де $\vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r_+^2}\cdot\frac{\vec{r}_+}{r_+}$, $\vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r_-^2}\cdot\frac{\vec{r}_-}{r_-}$ — напруженості в точці M електричних полів відповідно зарядів $+q$ і $-q$.

Оскільки точка M лежить на перпендикулярі до середини плеча диполя, то $r_+ = r_-$. Тому $|\vec{E}_+| = |\vec{E}_-|$.

Знайдемо напрямки напруженостей $\vec{E}_+$ і $\vec{E}_-$. Для цього уявно вмістимо в точку M пробний заряд q_0 (він, як відомо, позитивний). Цей заряд, взаємодіючи із зарядом диполя $+q$, відштовхуватиметься. Тому $\vec{E}_+$ лежатиме на радіальній прямій, яка виходить із точкового заряду $+q$, проходить через точку M і напрямлена від заряду $+q$. Аналогічно встановимо, що $\vec{E}_-$ лежить на радіальній прямій, яка проходить через точковий заряд $-q$ і точку M і напрямлена до заряду $-q$.

Напруженість електричного поля диполя $\vec{E}_\perp$ дорівнюватиме діагоналі паралелограма, побудованого на напруженостях $\vec{E}_+$ і $\vec{E}_-$ як на сторонах (див. мал. 1.9, *б*).

Щоб визначити модуль і напрямок $\vec{E}_\perp$, розглянемо два трикутники ABM і MCD. Їх сторони взаємно паралельні, тому трикутники подібні. В подібних трикутниках відповідні сторони пропорційні. На підставі цього можна записати таке співвідношення:

$$\frac{E_\perp}{l} = \frac{E_+}{r_+}, \text{ звідки } \vec{E}_\perp = \frac{l}{r_+}E_+, \text{ або } E_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{ql}{r_+^3}.$$

Якщо $l << r$, то $r_+ \approx r$. Тоді

$$E_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p}{r^3} \quad (1.15)$$

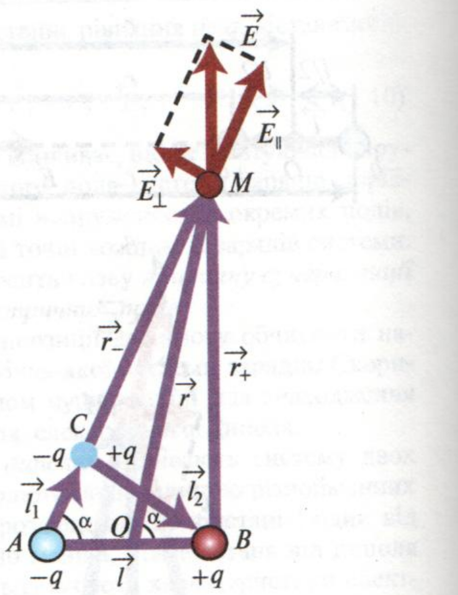
Вектор $\vec{E}_\perp$ паралельний вектору $\vec{p}$, але напрямлений у протилежний бік, тобто вектор $\vec{E}_\perp$ антипаралельний p. Отже,

$$\vec{E}_\perp = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{p}}{r^3} \quad (1.16)$$

Напруженість поля диполя в довільній точці M (мал. 1.10).

З точки B, де знаходиться заряд $+q$, проведемо перпендикуляр до $\vec{r}_-$ у точку C. Вмістимо в точку C два точкові заряди $+q$ і $-q$. Це не змінить електричного поля диполя, оскільки напруженості полів цих зарядів $\vec{E}_+$ і $\vec{E}_-$ у будь-якій точці поля диполя будуть однакові за величиною і протилежні за напрямком. Тому, згідно з принципом суперпозиції полів, результуюча напруженість їхніх полів дорівнюватиме нулю.

Позначимо через α кут між радіусом-вектором $\vec{r}$, проведеним із центра диполя O в точку M. За



Мал. 1.10

умови, що $l << r$, з дуже малою похибкою можна вважати: $r_+ \approx r_- \approx r$ і кут α дорівнює куту між $\vec{r}_-$ і $\vec{l}$.

Розглянемо систему двох диполів із зарядами $-q$ і $+q$ з плечем диполя $l_1 = AC$ і з зарядами $-q$ і $+q$ з плечем диполя $l_2 = CB$. З ΔABC видно, що $l_1 = l\cos\alpha$, $l_2 = l\sin\alpha$. Електричні моменти цих диполів дорівнюють:

$$p_1 = ql_1 = ql\cos\alpha; \quad p_2 = ql_2 = ql\sin\alpha. \quad (1.17)$$

Електричний момент диполя $\vec{p}_1$ лежить на радіусі-векторі $\vec{r}_-$ і його напрямок збігається з напрямком $\vec{r}_-$. Напруженість поля цього диполя в точці M, згідно з (1.14), дорівнює

$$\vec{E}_\parallel = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{p}_1}{r^3}. \quad (1.18)$$

Електричний момент другого диполя $\vec{p}_2$ антипаралельний до плеча диполя $\vec{l}_2$, яке перпендикулярне до $\vec{r}_-$. Отже, напруженість поля цього диполя, згідно з (1.16), дорівнює

$$\vec{E}_\perp = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{p}_2}{r^3}. \quad (1.19)$$

Оскільки за побудовою вектори $\vec{E}_\parallel$ і $\vec{E}_\perp$ взаємно перпендикулярні, то з прямокутного трикутника напруженостей результуючу напруженість знаходимо за теоремою Піфагора:

$$(\vec{E})^2 = (\vec{E_\parallel})^2 + (\vec{E_\perp})^2,$$

або
$$E^2 = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p_1}}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{p_2}}{r^3}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^3}\right)^2\cdot(4p_1^2 + p_2^2),$$

звідки
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^3}\sqrt{4p_1^2 + p_2^2}.$$

Підставивши значення p_1 і p_2 з (1.17), дістанемо вираз напруженості електричного поля диполя у довільній точці M:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^3}\sqrt{4q^2l^2\cos^2\alpha + q^2l^2\sin^2\alpha},$$

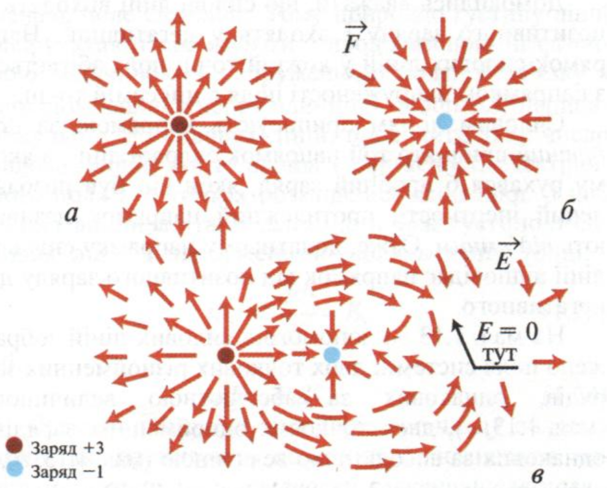
або

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p}{r^3}\sqrt{3\cos^2\alpha + 1}. \qquad (1.20)$$

1.5. ЗОБРАЖЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛІНІЙ НАПРУЖЕНОСТІ. ПОТІК ВЕКТОРА НАПРУЖЕНОСТІ

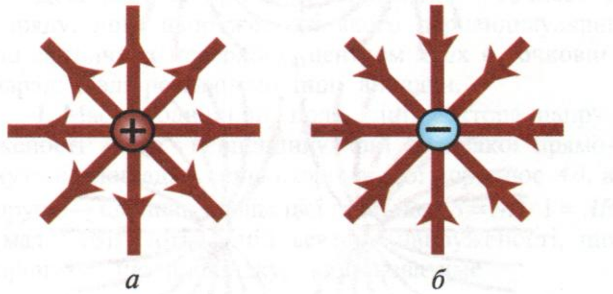
Розглянемо, як можна дістати наочне уявлення про електричне поле. Припустимо, що ми хочемо одержати розподіл електричного поля навколо деякого позитивного заряду q, вимірюючи силу, що діє на пробний заряд q_0. Результати таких вимірювань можна подати у вигляді набору стрілок. Довжина кожної стрілки пропорційна електричній силі, що діє на пробний заряд, розміщений на початку стрілки. Користуючись цим методом, на мал. 1.11, *а* в площині зображено поле точкового ізольованого заряду, що дорівнює 3 довільним одиницям, на мал. 1.11, *б* — поле точкового заряду в –1 одиницю, на мал. 1.11, *в* — двох зарядів +3 і –1, які знаходяться на певній відстані. В останньому випадку існує одна точка простору, в якій напруженість електричного поля дорівнює нулю. Цей малюнок дає наочне уявлення про поле електричної сили (модель електричного поля), або про електричне поле, що характеризується напруженістю.

Таке геометричне подання звичайно незручне для використання. Для спрощення цієї картини домовилися будувати навколо заряду набір суцільних ліній, напрямок яких у будь-якій точці збігається з напрямком вектора напруженості в цій точці. Ці



Мал. 1.11

лінії називають *силовими*, або *лініями вектора напруженості електричного поля*. Для позитивного заряду, розміщеного в деякій точці, силові лінії — це прямі, напрямлені від заряду (мал. 1.12, *а*), для точкового негативного заряду — це прямі, напрямлені до заряду (мал. 1.12, *б*).



Мал. 1.12

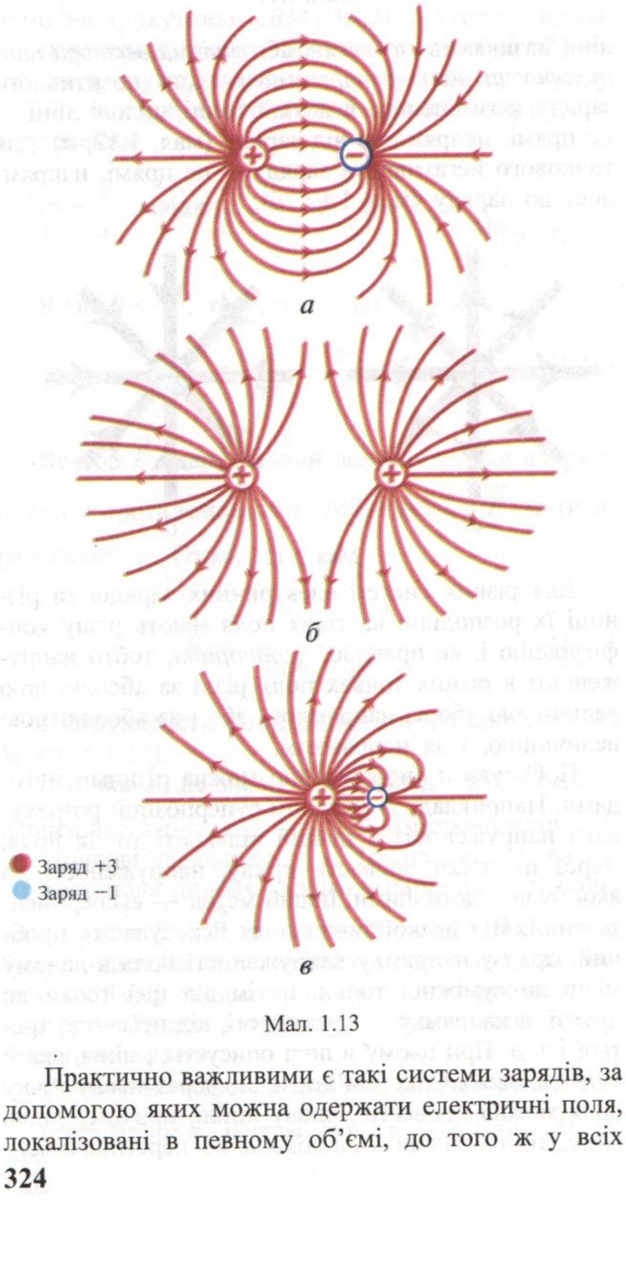
Для різних систем електричних зарядів та різниці їх розподілів на тілах поля мають різну конфігурацію і, як правило, *неоднорідні*, тобто напруженості в різних точках поля різні за абсолютною величиною або за напрямком, або і за абсолютною величиною, і за напрямком.

Побудувати силову лінію можна різними методами. Наприклад, за методом суперпозиції розрахувати напруженості у певній кількості точок поля. Через ці точки провести криву, напруженості до якої були б дотичними. Інший метод — експериментальний. Від деякої точки поля пересувають пробний заряд у напрямку напруженості поля в даному місці до суміжної точки, потім від цієї точки до другої в напрямку напруженості, від неї — до третьої і т. д. При цьому в полі описується лінія, яка й буде силовою. Слід пам'ятати, що через кожну точку поля можна провести силову лінію, причому лише одну, тобто силові лінії ніколи не перетинаються.

Домовились вважати, що силові лінії виходять з позитивного заряду і входять у негативний. Напрямок силових ліній у кожній точці поля збігається з напрямком напруженості поля в цій самій точці.

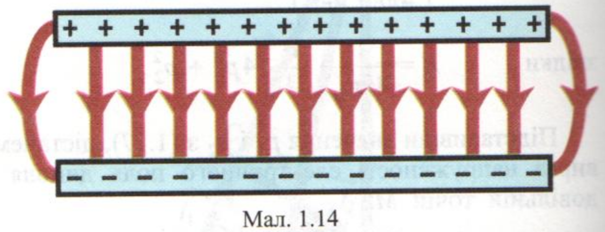
Силовим лініям приписують напрямок: за *додатний* прийнято той напрямок силової лінії, в якому рухався б пробний заряд, якби він був позбавлений інертності; протилежний напрямок називають *від'ємним*. Отже, додатньому напрямку силової лінії відповідає напрямок від позитивного заряду до негативного.

На мал. 1.13 за допомогою силових ліній зображено поля системи: двох точкових різнойменних зарядів, однакових за абсолютною величиною (мал. 1.13, *а*), двох точкових однойменних зарядів, однакових за абсолютною величиною (мал. 1.13, *б*), і двох зарядів $q_1 = +3$, $q_2 = -1$ (мал. 1.13, *в*).



Мал. 1.13

Практично важливими є такі системи зарядів, за допомогою яких можна одержати електричні поля, локалізовані в певному об'ємі, до того ж у всіх точках поля напруженість є однаковою, тобто силові лінії паралельні і розміщені з однаковою густиною. *Електричні поля, в кожній точці яких напруженість є сталою, називають однорідними.* Такі поля утворюються між двома паралельними площинами, які заряджені різнойменно з однаковою за модулем поверхневою густиною заряду +σ і –σ (мал. 1.14).



Мал. 1.14

Поверхнева густина електричного заряду дорівнює кількості електрики, яка міститься на одиниці поверхні зарядженого тіла. Так, якщо на пластинці площею S рівномірно розподілений заряд q, то поверхнева густина заряду дорівнюватиме

$$\sigma = \frac{q}{S}. \tag{1.21}$$

Одиницею поверхневої густини заряду в СІ є $1\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$.

Окремі силові лінії дають лише уявлення про напрямок напруженості поля в різних його точках. Проте вони не несуть інформації про величину напруженості в різних місцях електричного поля. Крім того, ми ще не визначили, скільки потрібно проводити силових ліній. Для того щоб за картиною силових ліній можна було кількісно оцінювати поля та порівнювати їх, потрібно певним чином змоделювати поле так, щоб воно кількісно відображало силову характеристику поля — напруженість. Насамперед умовимося в термінах. *Густиною силових ліній (ліній напруженості електростатичного поля) називають число силових ліній, які пронизують поверхню площею в одиницю, розміщену перпендикулярно до їх напрямку.* Якщо густина силових ліній в електростатичному полі всюди однакова (однорідне поле), то її визначають так: число силових ліній Φ, які проходять через площину, встановлену перпендикулярно до напрямку силових ліній поля, ділять на її площу S.

В неоднорідному полі густина силових ліній різна в різних місцях поля. Якщо ми хочемо її визначити поблизу точки поля M, то ставимо тут нормально до напрямку силових ліній дуже маленьку площадку ΔS і підраховуємо число силових ліній $\Delta\Phi$, що пронизують її. Поділивши $\Delta\Phi$ на ΔS, знайдемо середню густину силових ліній. Перейшовши до границі за умови, що $\Delta S \to 0$, знайдемо справжню густину силових ліній:

$$\Phi_0 = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta S} = \frac{d\Phi}{dS}, \qquad (1.22)$$

де Φ_0 — густина силових ліній.

Розглянемо, як саме можна однозначно встановлювати залежність між числом ліній напруженості електричного поля і значенням фізичної величини — напруженості поля в даній точці. Оскільки заряд тіла є системою точкових зарядів, проаналізуємо поле і силові лінії ізольованого точкового заряду $+q$.

Навколо точкового заряду $+q$ як навколо центра: 1) побудуємо сферичні поверхні S_1, S_2, S_3, S_4 радіусами r_1, r_2, r_3 і r_4 відповідно (мал. 1.15); 2) проведемо силові лінії з однаковою густиною. Вони будуть радіальними, а отже, перпендикулярними до сферичних поверхонь. У всіх точках сферичної поверхні радіусом r_1 напруженості поля будуть однаковими за абсолютною величиною і дорівнюватимуть E_1; відповідно на сферичній поверхні радіусом r_2 — E_2, радіусом r_3 — E_3 і радіусом r_4 — E_4.

Мал. 1.15

Візьмемо на першій сферичній поверхні S_1 площадку ΔS. Підрахуємо число силових ліній, які перетинають її. Нехай їх буде Φ_1. Аналогічно на другій, третій і четвертій сферичних поверхнях виділимо ділянки, площі яких також дорівнюють ΔS. Число силових ліній, які перетнуть ділянки площею ΔS на поверхнях S_2, S_3 і S_4 відповідно дорівнюватиме Φ_2, Φ_3 і Φ_4. Далі знайдемо густини силових ліній Φ_{01}, Φ_{02}, Φ_{03} і Φ_{04}. Порівнявши густини силових ліній, бачимо, що вони обернено пропорційні квадрату відстані до точок поверхні, на яких виділяли ділянки ΔS. Водночас відомо, що напруженість поля точкового заряду E також обернено пропорційна квадрату відстані від заряду до точки поля. Отже, густина ліній напруженості в даному місці поля пропорційна напруженості електричного поля в точці, через яку проходить площадка ΔS. Там, де густина ліній більша, поле сильніше, там, де вона менша, поле слабкіше. Тому природно густину ліній напруженості пов'язувати з пропорційною їй фізичною величиною — напруженістю поля. У зв'язку з цим домовилися через одиницю площі ΔS, перпендикулярну до силових ліній, проводити таке число силових ліній, яка величина напруженості електричного поля E в точках розміщення площадки. З цієї умови випливає така залежність між густиною силових ліній і напруженістю поля в даній точці:

$$\Phi_0 = \frac{d\Phi}{dS} = E, \qquad (1.23)$$

або

$$d\Phi = E\,dS. \qquad (1.24)$$

Фізичну величину, яка дорівнює числу силових ліній, які пронизують поверхню S, називають *потоком вектора напруженості електричного поля* і позначають літерою Φ. Якщо силові лінії перпендикулярні до поверхні S в усіх її точках, то потік вектора напруженості електростатичного поля через цю поверхню S, згідно з (1.24), дорівнюватиме

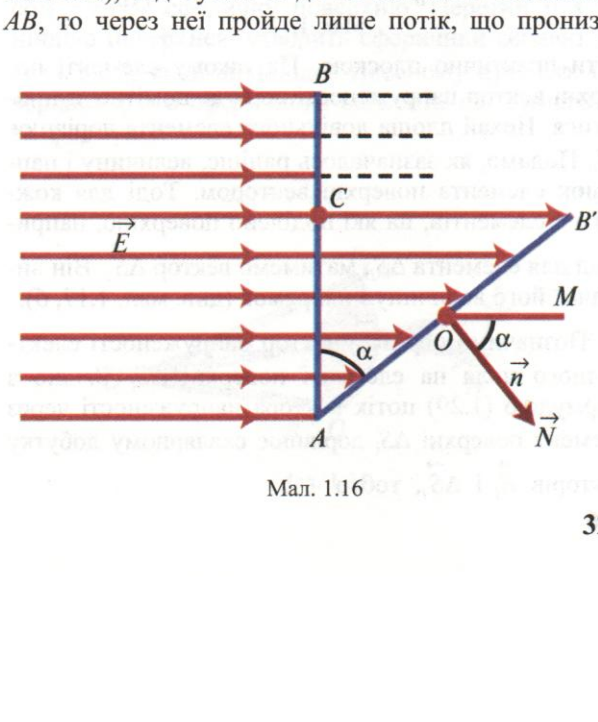
$$\Phi = \int\limits_{\substack{\text{По всій} \\ \text{поверхні } S}} EdS. \qquad (1.25)$$

Досі йшлося про поле ізольованого точкового заряду, лінії напруженості якого перпендикулярні до сферичних поверхонь, центром яких є точковий заряд. Далі розглянемо інші випадки.

1. Маємо однорідне поле, лінії вектора напруженості якого перпендикулярні до деякої прямокутної площадки, одна сторона якої дорівнює AB, а друга — одиниці; площа цієї площадки $S = AB \cdot 1 = AB$ (мал. 1.16). Потік ліній вектора напруженості, що пронизує цю площадку, дорівнюватиме

$$\Phi_\perp = ES. \qquad (1.26)$$

Якщо площадку перевести в положення AB' (див. мал. 1.16), під кутом α до початкового положення AB, то через неї пройде лише потік, що пронизує



Мал. 1.16

площу $S_1 = AC \cdot 1 = AC$, тобто менший потік. Інакше кажучи, пройде менше число ліній вектора напруженості електричного поля, а саме:

$$\Phi = ES_1. \qquad (1.27)$$

Як випливає з мал. 1.16, $S_1 = AC = AB'\cos\alpha$. Отже,

$$\Phi = ES\cos\alpha.$$

Оскільки $\alpha = \angle CAB' = \angle MON$, то

$$\Phi = \Phi_{\perp} \cos(\widehat{\vec{E}, \vec{n}}), \qquad (1.28)$$

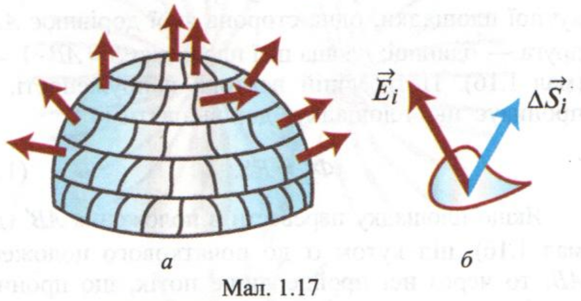
де $\vec{n}$ — зовнішня нормаль до поверхні площадки AB'.

Знак косинуса визначає знак потоку.

Вираз (1.28) можна подати в іншій формі. Перпендикулярно проведемо до центра площадки AB вектор, напрямок якого збігається з напрямком зовнішньої нормалі $\vec{n}$, а модуль дорівнює площі S. За цих умов, згідно з (1.27), потік вектора напруженості через площу S дорівнює скалярному добутку напруженості поля $\vec{E}$ і вектора $\vec{S}$:

$$\Phi = \vec{E}\,\vec{S}. \qquad (1.29)$$

2. Потік вектора напруженості через поверхню довільної форми. Розглянемо в просторі деяке електричне поле, лінії напруженості якого пронизують поверхню довільної форми (мал. 1.17). Розділимо всю поверхню на такі малі частинки, щоб поверхню кожної з них (елемент поверхні) можна було вва-



Мал. 1.17

жати практично плоскою. На такому елементі поверхні вектор напруженості не буде помітно змінюватися. Нехай площа довільного елемента дорівнює ΔS_i. Подамо, як зазначалось раніше, величину і напрямок елемента поверхні вектором. Тоді для кожного з елементів, на які поділено поверхню, наприклад для елемента ΔS_i, матимемо вектор $\Delta\vec{S}_i$. Він визначає його величину і напрямок (див. мал. 1.17, *б*).

Позначимо через $\vec{E}_i$ вектор напруженості електричного поля на елементі поверхні ΔS_i. Згідно з формулою (1.29) потік вектора напруженості через елемент поверхні ΔS_i дорівнює скалярному добутку векторів $\vec{E}_i$ і $\Delta\vec{S}_i$, тобто

$$\Delta\Phi_i = \vec{E}_i\,\Delta\vec{S}_i. \qquad (1.30)$$

Загальний потік через усю поверхню дорівнюватиме сумі потоків через кожен елемент поверхні:

$$\Phi = \sum_{\text{По всіх } i} \vec{E}_i\,\Delta\vec{S}_i. \qquad (1.31)$$

Нескінченно зменшуючи елементи поверхні і збільшуючи їх число, перейдемо від суми (1.31) до інтеграла по поверхні:

$$\Phi = \int_{\substack{\text{По всій}\\ \text{поверхні } S}} \vec{E}\,d\vec{S}. \qquad (1.32)$$

Формула (1.32) є загальним виразом потоку вектора напруженості через довільну поверхню.

Вираз для потоку (1.32) можна записати в іншій формі. Взявши до уваги, що вектор $d\vec{S}$ має напрямок зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до поверхні, то його можна записати як добуток одиничного вектора зовнішньої нормалі до елемента поверхні $\vec{n}_0$ на величину площі елемента поверхні dS, тобто $d\vec{S} = \vec{n}_0 dS$. Тоді скалярний добуток

$$\vec{E}d\vec{S} = \vec{E}\,\vec{n}_0\,dS = E\,n_0\cos(\widehat{\vec{E}, \vec{n}_0})\,dS =$$

$$= E\cos(\widehat{\vec{E}, \vec{n}_0})\,dS = E_n\,dS,$$

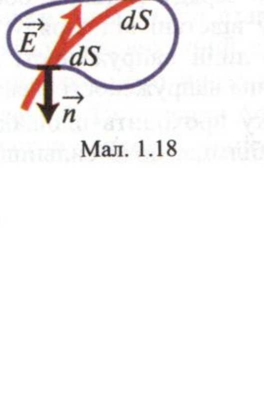
де $E_n = E\cos(\widehat{\vec{E}, \vec{n}_0})$ — складова вектора $\vec{E}$ в напрямку нормалі до елемента поверхні.

З урахуванням вищевикладеного вираз (1.32) можна записати в такій формі:

$$\Phi = \int_{\substack{\text{По всій}\\ \text{поверхні } S}} E_n\,dS. \qquad (1.33)$$

Отже, згідно з формулою (1.33), потік вектора $\vec{E}$ чисельно дорівнює числу ліній напруженості електростатичного поля, які пронизують поверхню S.

Потік (1.33) є алгебричною величиною, її знак залежить від вибору напрямку нормалі до елемен-

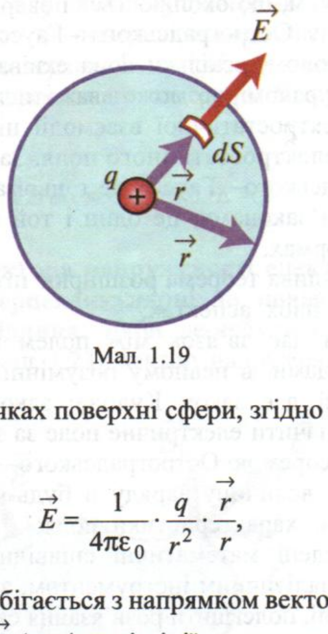


Мал. 1.18

тарних площадок. Для замкнених поверхонь прийнято обчислювати потік, який виходить з поверхні або входить в поверхню, що охоплює заряд. Тому коли лінії напруженості електричного поля виходять з об'єму, що охоплюється поверхнею, E_n і $d\Phi$ будуть додатними; коли ж лінії напруженості електричного поля входять в об'єм, E_n і $d\Phi$ будуть від'ємними (мал. 1.18).

1.6. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСЬКОГО—ГАУССА

Визначимо потік вектора напруженості через замкнену поверхню, всередині якої знаходяться електричні заряди. Почнемо з розгляду найпростішого випадку. Припустимо, що маємо поле ізольованого точкового заряду q. Опишемо навколо нього як навколо центра сферу радіусом r. Визначимо потік вектора напруженості через поверхню цієї сфери (мал. 1.19). Напруженість електричного



Мал. 1.19

поля в усіх точках поверхні сфери, згідно з (1.7), дорівнює

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r},$$

а її напрямок збігається з напрямком вектора зовнішньої нормалі $\vec{n}$ (радіальні лінії, перпендикулярні до поверхні сфери). Тому проекція вектора $\vec{E}$ на вектор $\vec{n}$ дорівнюватиме

$$E_n = E\cos 0 = E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

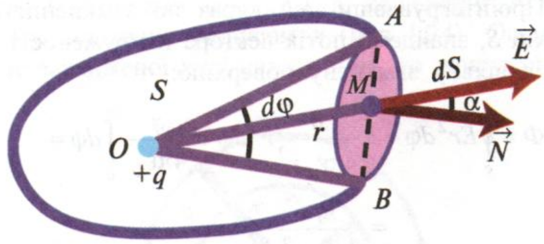
Оскільки всі точки сфери рівновіддалені від заряду q, то E_n є величиною однаковою для всіх точок.

Підставивши значення E_n у формулу (1.33), знайдемо значення потоку крізь сферу:

$$\Phi = \int\limits_{\substack{\text{По всій}\\ \text{поверхні}\\ S}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int\limits_{\substack{\text{По всій}\\ \text{поверхні}\\ S}} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (1.34)$$

Отже, потік вектора напруженості через сферу, в центрі якої знаходиться точковий позитивний заряд q, дорівнює $\frac{q}{\varepsilon_0}$. Потік не залежить від розмірів сфери.

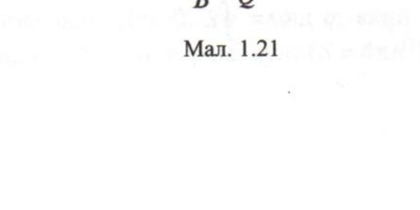
Тепер розглянемо інший випадок. Усередині деякої несферичної замкненої поверхні S (мал. 1.20) у точці O знаходиться точковий позитивний заряд q.



Мал. 1.20

Розглянемо конічну поверхню з вершиною в точці O. Нехай при вершині вона утворює тілесний кут $d\varphi$. Ця конічна поверхня, перетнувшись із замкненою поверхнею S, виріже елемент поверхні dS, межі якого позначено на малюнку літерами A і B. Всередині вирізаної площадки dS поставимо точку M. Позначимо відрізок OM літерою r ($OM = r$). Напрямок OME є напрямком напруженості електричного поля, яке пронизує елемент поверхні dS; він утворює кут $\alpha = \angle NME$ із зовнішньою нормаллю до поверхні в точці M. Опишемо з точки O радіусом $r = OM$ сферичну поверхню. Перетин її з конічною поверхнею утворить сферичний сегмент PQ (мал. 1.21), який відповідає тілесному куту $d\varphi$. Поверхню цього сферичного сегмента dS_1 визначимо за формулою

$$dS_1 = r^2 d\varphi. \qquad (1.35)$$



Мал. 1.21

Частину сферичної поверхні dS_1 можна розглядати як проекцію елемента поверхні dS. Кут між цими елементами поверхні dS і сферичної поверхні dS_1 дорівнює куту між додатним напрямком нормалей ME і MN, тобто α. Тому

$$dS_1 = dS\cos\alpha, \text{ або } r^2 d\varphi = dS\cos\alpha. \qquad (1.36)$$

Знайдемо потік вектора напруженості електричного поля через елемент поверхні dS:

$$d\Phi = E\, dS \cos\alpha,$$

з урахуванням співвідношення (1.36) $d\Phi$ набуде вигляду:

$$d\Phi = Er^2 d\varphi.$$

Проінтегрувавши цей вираз по замкненій поверхні S, знайдемо потік вектора напруженості через довільну замкнену поверхню:

$$\Phi = \oint_S Er^2 d\varphi = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} r^2 d\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{4\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Отже,

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (1.37)$$

Співвідношення (1.34) і (1.37) є аналітичними виразами теореми Остроградського—Гаусса, яку можна сформулювати так:

Повний потік вектора напруженості електричного поля, що пронизує будь-яку замкнену поверхню, всередині якої знаходиться заряд q, дорівнює $\dfrac{q}{\varepsilon_0}$.

Ця теорема поширюється на будь-яке число довільно розміщених зарядів. Доведемо це.

Нехай всередині замкненої поверхні знаходиться декілька зарядів q_1, q_2, …, q_k. За принципом суперпозиції, напруженість поля системи зарядів у певній точці поля дорівнюватиме

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_k. \qquad (1.38)$$

Потік вектора напруженості через замкнену поверхню, згідно з означенням, становить

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\, d\vec{S}. \qquad (1.39)$$

Підставивши у вираз (1.39) значення $\vec{E}$ з (1.38), дістанемо

$$\Phi = \oint_S \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_k\right) d\vec{S} = \oint_S \vec{E}_1\, d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_2\, d\vec{S} + \ldots$$

$$\ldots + \oint_S \vec{E}_k\, d\vec{S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \ldots + \frac{q_k}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{k} q_i. \qquad (1.40)$$

Отже, в загальному вигляді теорему Остроградського—Гаусса можна сформулювати так:

Потік вектора напруженості електростатичного поля крізь довільну замкнену поверхню дорівнює алгебричній сумі зарядів, які охоплюються нею, поділеній на ε_0.

Якщо заряд розподілений всередині замкненої поверхні рівномірно з об'ємною густиною ρ, то теорему Остроградського—Гаусса можна записати так:

$$\Phi = \oint_S E_n\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV, \qquad (1.41)$$

де V — об'єм, що охоплюється поверхнею S.

Теорему Остроградського—Гаусса також називають законом, оскільки вона еквівалентна закону Кулона і правомірно може вважатися основним законом електростатичної взаємодії після означення заряду й електростатичного поля. Закони Кулона і Остроградського—Гаусса не є двома незалежними фізичними законами, це один і той самий закон у різних формах.

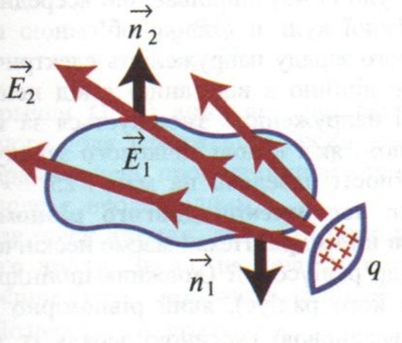
Ця важлива теорема розширює пізнавальні можливості в двох аспектах:

1) вона дає зв'язок між полем і його джерелами-зарядами, в певному розумінні обернений до того, який дає закон Кулона: закон Кулона дає змогу визначити електричне поле за заданими зарядами; за теоремою Остроградського—Гаусса можна визначити величину заряду в будь-якій області, в якій відомі характеристики поля;

2) наведені математичні співвідношення є потужним аналітичним інструментом, здатним, як побачимо далі, полегшити розв'язання складних задач.

Наведемо наслідки з теореми Остроградського—Гаусса.

1. Якщо є заряди поза даною замкненою поверхнею, то загальний потік вектора напруженості через цю поверхню дорівнює нулю (мал. 1.22). Кожна лінія потоку вектора напруженості $EdS\cos(\vec{E}, \vec{n})$ через будь-яку елементарну площину dS один раз входить в об'єм, обмежений поверхнею ($\cos(\widehat{\vec{E}, \vec{n}}) < 0$), другий раз виходить із нього ($\cos(\widehat{\vec{E}, \vec{n}}) > 0$). Тому



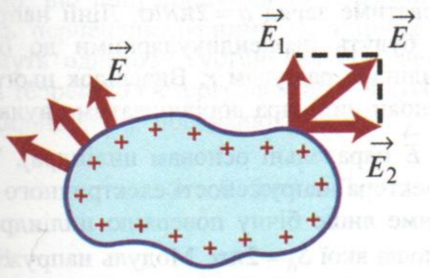
Мал. 1.22

загальний потік усіх ліній вектора напруженості електричного поля в цьому разі дорівнює нулю.

2. Напруженість електростатичного поля всередині зарядженого провідника дорівнює нулю. Всередині провідника не може бути нерухомих зарядів. Якби вони існували, то внаслідок взаємодії почали б рухатися доти, доки б не перейшли на поверхню провідника і не встановилася б статична рівновага. Якщо всередині зарядженого провідника провести будь-яку замкнену поверхню S, то заряд, що знаходиться на поверхні провідника, буде поза межами цієї поверхні. Тому, згідно з наслідком 1, потік крізь цю замкнену поверхню S дорівнюватиме нулю:

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = 0. \text{ Отже, } \vec{E} = 0.$$

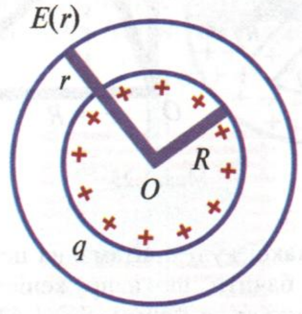
3. Лінії вектора напруженості електростатичного поля перпендикулярні до поверхні зарядженого провідника. Якби де-небудь на поверхні провідника (мал. 1.23) вектор напруженості електричного поля $\vec{E}$ мав напрямок, неперпендикулярний до поверхні, то $\vec{E}$ можна було б розкласти на дві складові — перпендикулярну до поверхні $\vec{E}_1$ і паралельну до поверхні $\vec{E}_2$. В напрямку складової $\vec{E}_2$ заряд почав би переміщуватися по поверхні і рівновага порушилася б. Оскільки на поверхні провідника заряди перебувають у рівновазі, то $\vec{E}_2 = 0$. Отже, лінії вектора $\vec{E}$ перпендикулярні до поверхні зарядженого провідника.



Мал. 1.23

1.7. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ОСТРОГРАДСЬКОГО—ГАУССА ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ НАПРУЖЕНОСТЕЙ ПОЛІВ

1. Електричне поле зарядженої сфери. Розглянемо електричне поле заряду q, який рівномірно розподілений на поверхні кулі радіусом R. Визначимо напруженість поля $\vec{E}$ на відстані r від центра кулі O. Опишемо навколо кулі концентричну сферичну поверхню радіусом r (мал. 1.24). Оскільки поле зарядженої кулі симетричне, то напруженість



Мал. 1.24

електричного поля в усіх точках сферичної поверхні радіусом r буде однакова. Позначимо її через $\vec{E}(r)$. За теоремою Остроградського—Гаусса загальний потік ліній напруженості електростатичного поля крізь поверхню становить

$$\Phi = \oint_S \vec{E}(r)\,d\vec{S} = \oint_S E(r)dS = E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

звідки

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (1.42)$$

З порівняння величин напруженості поля зарядженої кулі (1.42) і напруженості поля точкового заряду (1.7) видно, що напруженість поля зарядженої кулі така, якою була б напруженість поля заряду q, якби він був зосереджений у центрі кулі O.

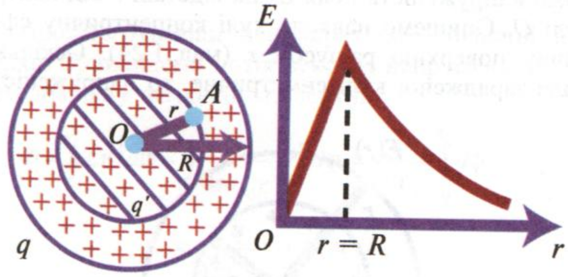
Знайдемо напруженість поля зарядженої кулі біля її поверхні. Для цього заряд q, який рівномірно розподілений по поверхні кулі ($S = 4\pi R^2$), виразимо через поверхневу густину заряду σ : $q = 4\pi R^2\sigma$. Підставимо в рівняння (1.42) значення q, виражене через σ, і приймемо $r = R$. Дістанемо

$$E(R) = \frac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Отже, напруженість поля біля поверхні зарядженої кулі дорівнює

$$E(R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (1.43)$$

2. Поле об'ємно зарядженої кулі зі сталою густиною електричного заряду ρ (мал. 1.25). Очевид-



Мал. 1.25

но, що полю такої кулі притаманна центральна симетрія. Легко бачити, що напруженість поля поза кулею визначається за формулою (1.42). Для точок усередині кулі результат буде іншим. Справді, коли $r < R$, то кульова поверхня охоплює заряд $q = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$. Отже, теорема Остроградського—Гаусса для цього випадку запишеться так:

$$E(r)\,4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho,$$

звідки

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}. \qquad (1.44)$$

Визначимо об'ємну густину електричного заряду через q та об'єм кулі радіусом R:

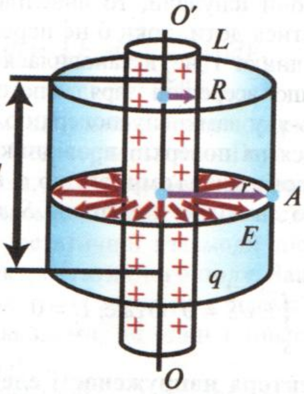
$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4}\cdot\frac{q}{\pi R^3}.$$

Підставимо це значення в (1.44) і дістанемо

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^3}\,r \quad (r < R). \qquad (1.45)$$

З формули (1.45) випливає, що всередині об'ємно зарядженої кулі зі сталою об'ємною густиною електричного заряду напруженість електричного поля зростає лінійно з відстанню r від центра кулі. Зовні кулі напруженість зменшується за таким самим законом, як і в полі точкового заряду. Графік цієї залежності наведено на мал. 1.25.

3. Поле нескінченно довгого рівномірно зарядженого циліндра. Нехай маємо нескінченно довгий циліндр радіусом R (довжина циліндра значно більша за його радіус), який рівномірно заряджений, з поверхневою густиною заряду σ. Оскільки лінії вектора напруженості електричного поля перпендикулярні до поверхні зарядженого тіла в кожній точці і циліндр є симетричним тілом, то лінії вектора напруженості електричного поля будуть радіальними і матимуть однакову густину на однакових відстанях від осі циліндра OO' (мал. 1.26).



Мал. 1.26

Виділимо довільну ділянку циліндра завдовжки l. Побудуємо навколо неї циліндр радіусом $r > R$. Він охоплюватиме заряд $q = 2\pi Rl\sigma$. Лінії напруженості поля будуть перпендикулярними до бічної поверхні циліндра радіусом r. Внаслідок цього потік крізь основи циліндра дорівнюватиме нулю (лінії вектора $\vec{E}$ паралельні основам циліндра). Тому весь потік вектора напруженості електричного поля пронизуватиме лише бічну поверхню циліндра радіусом r, площа якої $S_б = 2\pi rl$. Модуль напруженості поля в кожній точці бічної поверхні циліндра однаковий. Визначимо його, застосувавши теорему Остроградського—Гаусса:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \oint_S E\,dS = ES_б = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

звідки

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S_б} = \frac{2\pi Rl\sigma}{\varepsilon_0 2\pi rl} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}.$$

Отже,

$$E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}. \qquad (1.46)$$

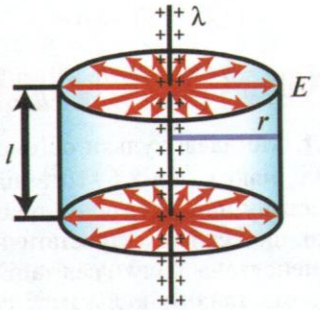
Із формули (1.46) випливає, що напруженість електричного поля зарядженого нескінченно довгого циліндра обернено пропорційна відстані від його осі. Це поле є неоднорідним.

4. Поле нескінченно довгого рівномірно зарядженого дроту. Заряд, що знаходиться на одиниці довжини дроту, називають *лінійною густиною заряду*. Позначимо її літерою λ:

$$\lambda = \frac{q}{l}, \qquad (1.47)$$

де q — заряд, який знаходиться на відрізку дроту завдовжки l.

Для визначення напруженості поля рівномірно зарядженого нескінченно довгого дроту скористаємося тим самим прийомом, що й у п. 3. Виділимо довільну ділянку провідника завдовжки l. Приймемо її за вісь циліндра і побудуємо циліндр радіусом r (мал. 1.27). Міркуючи аналогічно, як у п. 3, встановимо, що лінії напруженості електричного поля будуть перпендикулярними до твірних циліндра і матимуть однакову густину на його поверхні.



Мал. 1.27

За теоремою Остроградського—Гаусса потік через циліндричну поверхню радіусом r дорівнює

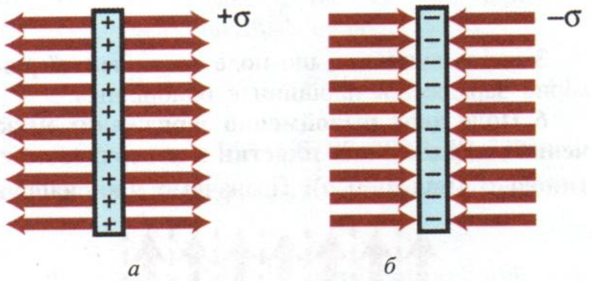
$$\Phi = E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0},$$

звідки

$$E = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi r l} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (1.48)$$

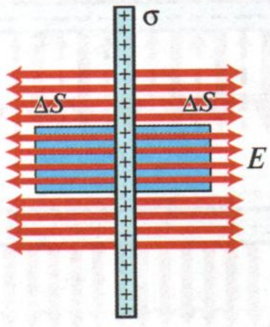
Отже, напруженість електричного поля нескінченно довгого рівномірно зарядженого дроту прямо пропорційна лінійній густині заряду й обернено пропорційна відстані r від нього.

5. Поле нескінченної рівномірно зарядженої площини з поверхневою густиною заряду +σ. З міркувань симетрії випливає, що напруженість у будь-якій точці поля $\vec{E}$ має напрямок, перпендикулярний до площини, лінії напруженості поля паралельні і мають однакову густину. Якщо площина заряджена позитивно (+σ), то лінії напруженості поля виходять з площини (мал. 1.28, *а*), якщо негативно (–σ), то лінії напруженості поля входять у площину (див. мал. 1.28, *б*).



Мал. 1.28

Уявімо собі циліндричну поверхню з твірними, перпендикулярними до зарядженої площини, і основами ΔS, розміщеними симетрично відносно цієї площини (мал. 1.29). Твірні циліндричної поверхні паралельні лініям вектора напруженості електричного поля, тому потік пронизуватиме лише ліву і праву основи замкненої циліндричної поверхні. Як видно з малюнка, замкнена циліндрична поверхня охоплює заряд $q = \sigma\Delta S$. Оскільки лінії напруженості поля нескінченної рівномірно зарядженої площини паралельні і мають однакову густину, то напруженості поля в місцях лівої і правої основ циліндра однакові за абсолютною величиною і лінії вектора напруженості електричного поля виходять з основ, тобто додатні. Тому сумарний потік крізь основи циліндричної поверхні становитиме $2E\Delta S$. За теоремою Остроградського—Гаусса можна записати:



Мал. 1.29

$$2E\Delta S = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0},$$

звідки напруженість поля

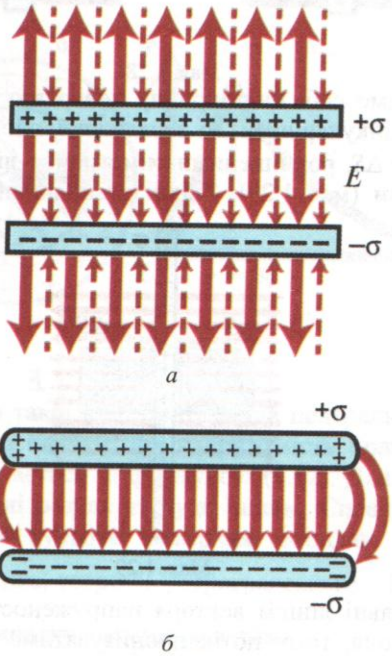
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (1.49)$$

Напрямок вектора напруженості поля $\vec{E}$ паралельний вектору зовнішньої нормалі до площини $\vec{n}$. Якщо одиничний зовнішній вектор до площини позначити через $\vec{n}_0$, то вектор напруженості в кожній точці електричного поля можна записати так:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}_0. \qquad (1.50)$$

З цього випливає, що поле нескінченної рівномірно зарядженої площини є однорідним.

6. Поле двох різнойменно заряджених нескінченних паралельних пластин з поверхневою густиною σ (мал. 1.30, *а*). Позначимо лінії напруженості поля пластини, зарядженої позитивно ($+\sigma$), суцільними лініями, а зарядженої негативно ($-\sigma$) — штриховими.



Мал. 1.30

Як видно з малюнка, дві різнойменно заряджені пластини мають протилежно напрямлені напруженості зовні пластин, тобто $E_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ і $E_- = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Тому сумарна напруженість дорівнює нулю, тобто поза пластинами електричне поле відсутнє.

Між пластинами лінії вектора напруженості обох пластин мають однаковий напрямок, тому їх густина буде вдвічі більшою за густину ліній поля однієї пластини. Оскільки густину ліній вектора напруженості поля беруть такою, що дорівнює напруженості поля, то напруженість поля між пластинами дорівнюватиме

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

де E_+ і E_- — напруженості поля відповідно позитивно і негативно зарядженої пластини.

Отже, напруженість поля між зарядженими пластинами

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (1.51)$$

Лінії напруженості починаються на позитивно зарядженій пластині і закінчуються на негативно зарядженій. У цьому разі електричне поле зосереджене між пластинами. Напруженість в усіх точках цієї області однакова за величиною і напрямком. Такі поля, як уже зазначалося, називають однорідними. Лінії напруженості однорідного поля — це сукупність паралельних прямих, розміщених на однаковій відстані одна від одної.

Одержаний результат приблизно справедливий і для площин обмежених розмірів, якщо відстань між ними значно менша за їхні розміри. Лінії напруженості поля лише викривлені на краях пластин (див. мал. 1.30, *б*).

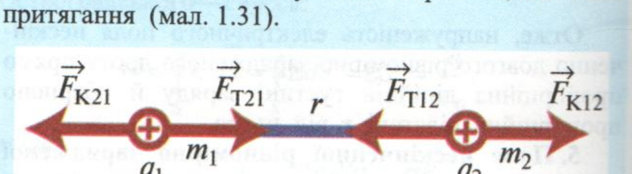
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1.1. Металеві кульки об'ємом $V = 1$ см^3 і масою $m = 8$ г мають по $8{,}6 \cdot 10^{22}$ вільних електронів. Яку частину цих електронів треба вилучити з кожної кульки, щоб сила електростатичного відштовхування компенсувала силу гравітаційного притягання між двома такими кульками?

Розв'язування

$N_0 = 8{,}6 \cdot 10^{22}$ $V_1 = V_2 = 1$ см^3 $= 1 \cdot 10^{-6}$ м^3 $m_1 = m_2 = 8$ г $= 8 \cdot 10^{-3}$ кг	Якщо з кульок вилучати електрони, то вони заряджатимуться позитивно: $q = Ne, \qquad (а)$
$\frac{N}{N_0}$ — ?	де e — абсолютне значення заряду одного електрона; N — число вилучених електронів.

Заряджені кульки мають об'єми по 1 см^3, тому їх можна розглядати як матеріальні точки і як точкові заряди. Між зарядженими кульками діють електростатичні сили відштовхування і гравітаційні сили притягання (мал. 1.31).



Мал. 1.31

Електростатичні і гравітаційні сили лежать на одній прямій і на кожну заряджену частинку діє кулонівська сила відштовхування і гравітаційна сила притягання. Щоб частинка перебувала у стані рівноваги, абсолютні значення цих сил мають бути однаковими. Тому

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Оскільки $q_1 = q_2 = q$ і $m_1 = m_2 = m$, цей вираз можна записати так:

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = G\frac{m^2}{r^2}. \qquad (б)$$

З виразу (*б*) знайдемо

$$q = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 G m^2}. \qquad (в)$$

Підставимо числові значення у залежність (*в*):

$$q = \sqrt{4\pi\frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 64\cdot 10^{-6}} =$$

$$= 6{,}9\cdot 10^{-13}\ (\text{Кл}).$$

За формулою (*а*) визначимо N — кількість електронів, які потрібно вилучити з кульки, щоб її заряд дорівнював q:

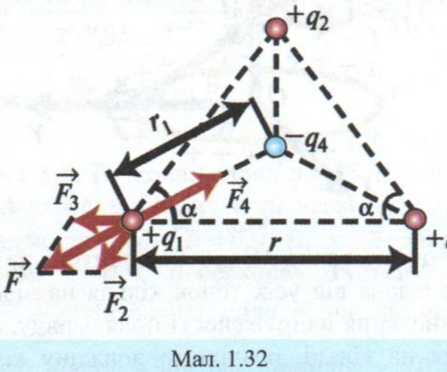
$$N = \frac{q}{e} = \frac{6{,}9\cdot 10^{-13}}{1{,}6\cdot 10^{-19}} = 4{,}3\cdot 10^6.$$

В 1 см^3 число N вилучених електронів становить від усіх вільних електронів N_0:

$$\frac{N}{N_0} = \frac{4{,}3\cdot 10^6}{8{,}6\cdot 10^{22}} = 5\cdot 10^{-17}.$$

Відповідь: $\frac{N}{N_0} = 5\cdot 10^{-17}$.

Задача 1.2. Три точкові однакові позитивні заряди $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ нКл розміщені у вершинах рівностороннього трикутника (мал. 1.32). Який негативний точковий заряд q_4 потрібно помістити в центр трикутника, щоб сила притягання з його боку зрівноважила сили взаємного відштовхування зарядів, які знаходяться у вершинах?



Мал. 1.32

Розв'язування

$q_1 = q_2 = q_3 = 1$ нКл
q_4 — ?

Заряд q_1 перебуватиме в рівновазі, якщо векторна сума діючих на нього сил дорівнюватиме нулю:

$$\vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = \vec{F} + \vec{F_4} = 0, \qquad (а)$$

де $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ і $\vec{F_4}$ — сили, з якими діють на заряд q_1 відповідно заряди q_2, q_3 і q_4; $\vec{F}$ — рівнодійна сил $\vec{F_2}$ і $\vec{F_3}$.

Оскільки сили $\vec{F}$ і $\vec{F_4}$ напрямлені по одній прямій, то з (*а*) випливає $F - F_4 = 0$, або $F = F_4$.

Виразивши в останньому рівнянні F через F_2 і F_3 і врахувавши, що $F_3 = F_2$, дістанемо

$$F_4 = \sqrt{F_2^2 + F_3^2 + 2F_2F_3\cos\alpha} = \sqrt{2F_2^2 + 2F_2^2\cos\alpha} =$$

$$= F_2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Згідно із законом Кулона і з урахуванням, що $q_1 = q_2 = q_3$, знайдемо

$$\frac{q_1 q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)},$$

звідки $$q_4 = \frac{q_1 r_1^2}{r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}. \qquad (б)$$

З геометричних побудов у рівносторонньому трикутнику

$$r_1 = \frac{\frac{r}{2}}{\cos 30^\circ} = \frac{r}{2\cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Підставивши значення r_1 і $\cos\alpha$ з останніх співвідношень у формулу (*б*), дістанемо

$$q_4 = \frac{q_1}{\sqrt{3}}. \qquad (в)$$

Підставимо числове значення q_1 у (*в*) і знайдемо

$$q_4 = \frac{1\cdot 10^{-9}}{\sqrt{3}} = 5{,}8\cdot 10^{-10}\ (\text{Кл}) = 0{,}58\ (\text{нКл}).$$

Відповідь: $q_4 = 0{,}58$ нКл.

Задача 1.3. Точкові заряди $q_1 = 1$ мкКл та $q_2 = -2$ мкКл знаходяться на відстані $d = 0{,}1$ м один від одного. Визначити напруженість поля в точці, віддаленій на $r_1 = 0{,}06$ м від першого та $r_2 = 0{,}08$ м від другого заряду. Визначити силу, що діє в цій точці на точковий заряд $q = 0{,}1$ мкКл.

Розв'язування

$q_1 = 1$ мкКл $= 1 \cdot 10^{-6}$ Кл
$q_2 = -2$ мкКл $= -2 \cdot 10^{-6}$ Кл
$d = 0{,}1$ м
$r_1 = 0{,}06$ м
$r_2 = 0{,}08$ м
$q = 0{,}1$ мкКл $= 1 \cdot 10^{-7}$ Кл

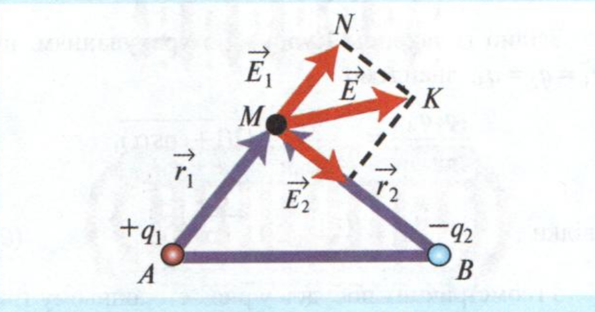
E — ? F — ?

Напруженість електростатичного поля системи зарядів q_1 і q_2 в деякій точці поля M, згідно з принципом суперпозиції, дорівнює векторній сумі напруженостей полів зарядів q_1 і q_2 в цій самій точці, тобто

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \qquad (a)$$

де $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ — напруженості поля відповідно зарядів q_1 і q_2.

Розмістимо в точках A та B відповідно заряди q_1 і q_2. Нанесемо точку M, в якій визначатимемо напруженість поля системи зарядів q_1 і q_2 (мал. 1.33). Проведемо з точок A і B в точку M радіуси-вектори $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$. Оскільки заряд q_1 позитивний, то напрямок напруженості його поля $\vec{E}_1$ збігається з напрямком $\vec{r}_1$. Напрямок напруженості поля другого заряду $\vec{E}_2$



Мал. 1.33

буде протилежним до напрямку $\vec{r}_2$, оскільки q_2 — негативний заряд.

Згідно з геометричною побудовою вектори $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ взаємно перпендикулярні. Вектор $\vec{E}$ є діагоналлю векторного прямокутника, побудованого на векторах $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ як на сторонах.

З ΔKMN визначимо за теоремою Піфагора модуль вектора E:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}, \qquad (б)$$

де $E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$, $E_2 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$ — модулі векторів $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$.

Підставимо у вираз (*б*) значення E_1, E_2 і дістанемо

$$E = \sqrt{\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\left(\frac{q_1}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{r_2^2}\right)^2}. \qquad (в)$$

Обчислимо напруженість поля:

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \dfrac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}}\sqrt{\left(\frac{10^{-6}}{0{,}06^2}\right)^2 + \left(\frac{-2\cdot 10^{-6}}{0{,}08^2}\right)^2} = 3{,}76 \cdot 10^6 \left(\frac{\text{Н}}{\text{Кл}}\right).$$

Сила, що діє в точці M на заряд q, дорівнює

$$F = qE = 10^{-7} \cdot 3{,}76 \cdot 10^6 = 0{,}376 \text{ (Н)}.$$

Відповідь: $E = 3{,}76 \cdot 10^6 \dfrac{\text{Н}}{\text{Кл}}$; $F = 0{,}376$ Н.

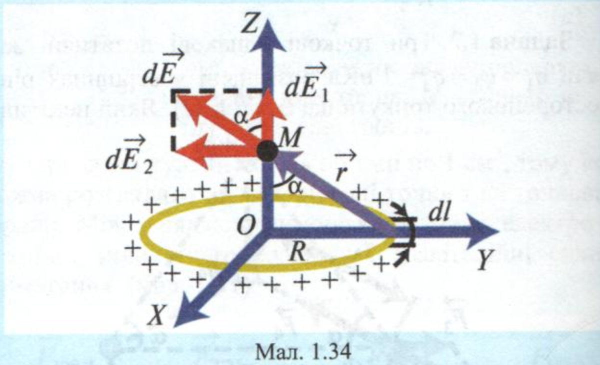
Задача 1.4. Тонке кільце радіусом $R = 15$ см несе заряд з рівномірно розподіленою лінійною густиною $\lambda = 2 \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}}$. Визначити напруженість електростатичного поля в точці, що рівновіддалена від усіх точок кільця на відстань $r = 50$ см.

Розв'язування

$R = 15$ см $= 0{,}15$ м
$\lambda = 2 \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}} = 2 \cdot 10^{-6} \dfrac{\text{Кл}}{\text{м}}$
$r = 50$ см $= 0{,}5$ м

E — ?

Розмістимо прямокутну систему координат так, щоб кільце лежало в координатній площині XOY, а початок координат O збігався з центром кільця (мал. 1.34).



Мал. 1.34

При цьому точка M, що знаходиться на осі OZ, рівновіддалена від усіх точок кільця на відстань r. Для обчислення напруженості поля заряду, що знаходиться на кільці, розділимо довжину кільця на елементи дуги dl. Заряд dq на такому елементі дуги дорівнює $dq = \lambda dl$. Напруженість поля цього заряду

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (а)$$

Напрямок $\vec{dE}$ збігається з напрямком радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з точки, що лежить на середині елемента дуги dl, в точку M. Розкладемо вектор $\vec{dE}$ на дві складові: в напрямку осі OZ — $\vec{dE_1}$ і в напрямку $\vec{dE_2}$, перпендикулярному до $\vec{dE_1}$.

Скориставшись міркуваннями симетрії, побачимо, що сума всіх векторів $\vec{dE_2}$ дорівнює нулю. Сума складових $\vec{dE_1}$, які перпендикулярні до площини кільця і мають однаковий напрямок (вздовж осі OZ), можна виразити інтегралом

$$E = \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dl = \frac{\lambda\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^{2\pi R} dl = \frac{\lambda R\cos\alpha}{2\varepsilon_0 r^2}. \qquad (б)$$

З ΔMON знайдемо $\cos\alpha = \frac{OM}{r}$. Врахувавши, що $OM = \sqrt{r^2 - R^2}$ (теорема Піфагора),

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r}. \qquad (в)$$

Підставимо значення $\cos\alpha$ з (в) у (б) і знайдемо робочу формулу для обчислення напруженості поля зарядженого кільця в точці M:

$$E = \frac{\lambda R\sqrt{r^2 - R^2}}{2\varepsilon_0 r^3}. \qquad (г)$$

Обчислимо значення напруженості поля:

$$E = \frac{2\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}15\sqrt{0{,}5^2 - 0{,}15^2}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}5^3} = 30850\ (\frac{\text{В}}{\text{м}}).$$

Відповідь: $E = 30850\ \frac{\text{В}}{\text{м}}$.

Задача 1.5. Точковий заряд $q = 25$ нКл знаходиться в електростатичному полі нескінченно довгого циліндра радіусом $R = 0{,}01$ м, який рівномірно заряджений і має поверхневу густину заряду $\sigma = 2\cdot 10^{-6}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$. Визначити силу F, що діє на заряд, якщо його відстань від осі циліндра $r = 0{,}1$ м.

Розв'язування

$q = 25$ нКл $= 2{,}5\cdot 10^{-8}$ Кл
$R = 0{,}01$ м
$\sigma = 2\cdot 10^{-6}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$
$r = 0{,}1$ м
F — ?

Абсолютне значення сили, що діє на точковий заряд q, який знаходиться в електростатичному полі, визначають за формулою

$$F = qE, \qquad (а)$$

де E — абсолютне значення напруженості електростатичного поля.

Напруженість поля нескінченно довгого рівномірно зарядженого циліндра, згідно з виразом (1.46),

$$E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}. \qquad (б)$$

Підставивши значення E з (б) у (а), знайдемо робочу формулу

$$F = \frac{q\sigma R}{\varepsilon_0 r}. \qquad (в)$$

Підставимо у (в) числові значення фізичних величин і знайдемо значення сили, що діє на заряд:

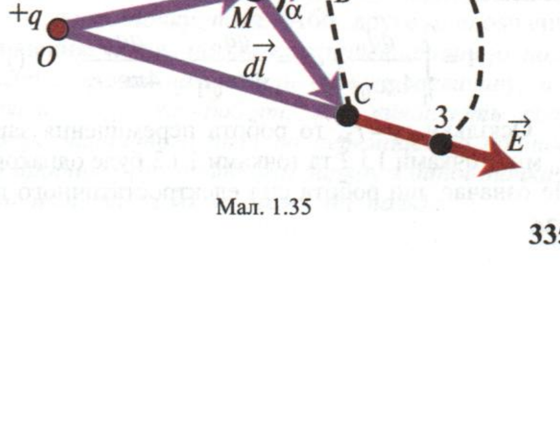
$$F = \frac{2{,}5\cdot 10^{-8}\cdot 2\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}01}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1} = 5{,}65\cdot 10^{-4}\ (\text{Н}).$$

Відповідь: $F = 5{,}65\cdot 10^{-4}$ Н.

1.8. РОБОТА СИЛ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ

При переміщенні зарядів в електростатичному полі прикладені до них сили з боку поля виконують роботу. Обчислимо величину цієї роботи. Розглянемо поле позитивного точкового заряду, який знаходиться в точці O нерухомої системи координат (мал. 1.35). Вмістимо в точку M цього поля пробний заряд q_0. Згідно із законом Кулона на нього діятиме сила

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$



Мал. 1.35