## Лекция 1

## Вступ в дисципліну. Засоби цифрової обробки сигналів . Принципи розробки та реалізації систем цифрової обробки сигналів

***Цифрова обробка сигналу*** (ЦОС ) – предмет, що вивчає процеси аналого-цифрового (АЦП) та цифро-аналогового перетворення (ЦАП) сигналів, а також обробки інформації про характеристики аналогового сигналу в цифровій формі (цифрового сигналу).

***Цифровий сигнал*** – будь-яка пронумерована послідовність чисел (цифрових кодів), наприклад, 3, 7, 11, 9, ..., в тому числі значень оцифрованого аналогового сигналу, що є функцією деякого дискретного аргументу (наприклад, порядкового номера, відстані або часу), і відображає лише інформацію про певний процес чи його характеристику.

***Задача дисципліни*** – вивчення процесів та принципів виділення та перетворення інформації про характеристики реальних сигналів, а також відтворення даних сигналів за наявності інформації про них у цифровій формі.

***Методи ЦОС*** - математичні співвідношення або алгоритми, відповідно до яких виконуються обчислювальні операції над цифровими сигналами. Алгоритми ЦОС , на відміну від інших обчислень на ЕОМ, виконуються в реальному масштабі часу. На відміну від методів аналогової обробки математичні співвідношення в ЦОС можуть реалізувати будь-яку функцію не прив’язуючись до природи пристрою обробки і його пропускної характеристики.

***Засоби ЦОС*** – цифрові логічні схеми, програмовані логічні інтегральні схеми (ПЛІС), мікропроцесори, мікроконтролери, цифрові сигнальні процесори. Їх сукупність – процесор ЦОС.

***Задачі, що вирішує ЦОС:***

- Виділення інформації про сигнал (амплітуда, фаза, частота, спектральні складові, часові співвідношення)
- Перетворення формату сигналу (передача даних з поділом каналів),
- Стиснення даних (модеми, мобільні телефони, телебачення HDTV, MPEG)

- Формування сигналів зворотного зв'язку (управління промисловими процесами)
- Виділення сигналу з шуму (фільтрація, автокореляція, згортка)
- Виділення та збереження сигналу в цифровому вигляді для наступної обробки

Галузі використання ЦОС




Найбільш поширені споживацькі напрямки ЦОС:

1. Обробка зображень:

- Розпізнавання образів;
- Машинний зір;
- Покращення якості зображень;
- Супутникові мапи, картографія;
- Анімація.

2. Інструментальні засоби, контроль:

- Контроль параметрів і характеристик процесу
- Спектральний аналіз
- Фільтрація від шуму
- Стиснення інформації

3. Мова/Аудіо:

- Розпізнавання мови;
- Синтез мови;
- Озвучування текстів;
- Цифрові аудіо системи (еквалайзери)

Переваги ЦОС:

- *Гарантована точність.* Точність визначається тільки числом задіяних бітів.
- *Досконала відтворюваність*. Можна ідентично відтворити кожен сигнал, оскільки відсутні відхилення, обумовлені стійкістю окремих складових засобів обробки і збереження сигналів. Наприклад, використовуючи методи ЦОС, цифрові записи можна копіювати або відтворювати багаторазово без погіршення якості сигналу.
- *Відсутність спотворення характеристик сигналу* при обробці під дією зовнішніх факторів (температури, вологи або старіння складових).
- Напівпровідникові технології дозволяють *підвищити надійність, зменшити розміри, знизити вартість, знизити енергоспоживання і збільшити швидкість роботи*.
- *Більша гнучкість*. Системи ЦОС можна запрограмувати і перепрограмувати на виконання різних функцій без зміни обладнання. Це, мабуть, одна з найважливіших переваг ЦОС.
- *Чудова продуктивність*. ЦОС можна використовувати для виконання функцій, які неможливі при аналогової обробки сигналів. Наприклад, можна отримати лінійну фазову характеристику і реалізувати складні алгоритми адаптивної фільтрації.
- У деяких випадках інформація вже може бути записана у цифровому вигляді, і
- *обробляти її можна тільки методами ЦОС*.

У ЦОС є і свої недоліки. Однак завдяки новим технологіям значення цих недоліків постійно зменшується.

Недоліки ЦОС:

- *Швидкодія і витрати*. Проекти ЦОС можуть бути дорогими,

особливо при великій ширині смуги сигналу, що оброблюється, через високу ціну сучасних і швидкісних АЦП/ЦАП та ЦСП. Необхідність високої швидкодії ЦСП викликана обробкою сигналу в реальному часі, тобто всі операції обробки повинні бути виконані за час інтервалу дискретизації.

- *Довготривалість і витрати розробки систем ЦОС*, що зв'язана з збільшенням кількості етапів розробки і фахівців, що їх виконуватимуть у порівнянні з системами аналогової обробки.
- *Проблеми скінченної розрядності та частотної смуги*. Сучасні АЦП/ЦАП, що володіють гарною роздільною здатністю і широкою смугою пропускання дорогі. З економічної точки зору доцільніше використовувати дані пристрої з меншими показниками, що погіршує якість обробки і перекладає частину функцій на вхідні/вихідні каскади ЦАП/АЦП, що здійснюють аналогову обробку.
- *Проблеми динамічного діапазону*. Оскільки характеристика перетворення АЦП/ЦАП дискретна, то деякі зміни слабкого аналогового сигналу не будуть сприйняті і поглинуться шумом квантування, тому амплітуду сигналу треба узгоджувати спеціальними вхідними/вихідними аналоговими каскадами АЦП/ЦАП, що складаються з підсилювачів та трансформаторів хвильового опору.

У наш час інженер стоїть перед вибором належної комбінації аналогових та цифрових методів для вирішення задачі обробки сигналів. Неможливо обробити фізичні аналогові сигнали, використовуючи тільки цифрові методи, так як всі датчики (мікрофони, термопари, тензорезистори, п'єзоелектричні кристали, головки накопичувача на магнітних дисках і т.д.) є аналоговими пристроями. Тому деякі види сигналів вимагають наявності ланцюгів узгодження для подальшої обробки сигналів аналоговим або цифровим методом.

В дійсності, ланцюги узгодження сигналу - це аналогові схеми, що виконують такі функції, як посилення, накопичення (у вимірювальних і попередніх (буферних) підсилювачах), виявлення сигналу на фоні шуму (високоточними підсилювачами синфазного сигналу, вирівнювача і лінійними приймачами), динамічне стиснення діапазону (логарифмічними підсилювачами, логарифмічними ЦАП і підсилювачами з програмованим коефіцієнтом підсилення) і фільтрація (пасивна та активна).

Кілька методів реалізації процесу обробки сигналів показано на рис. 1.

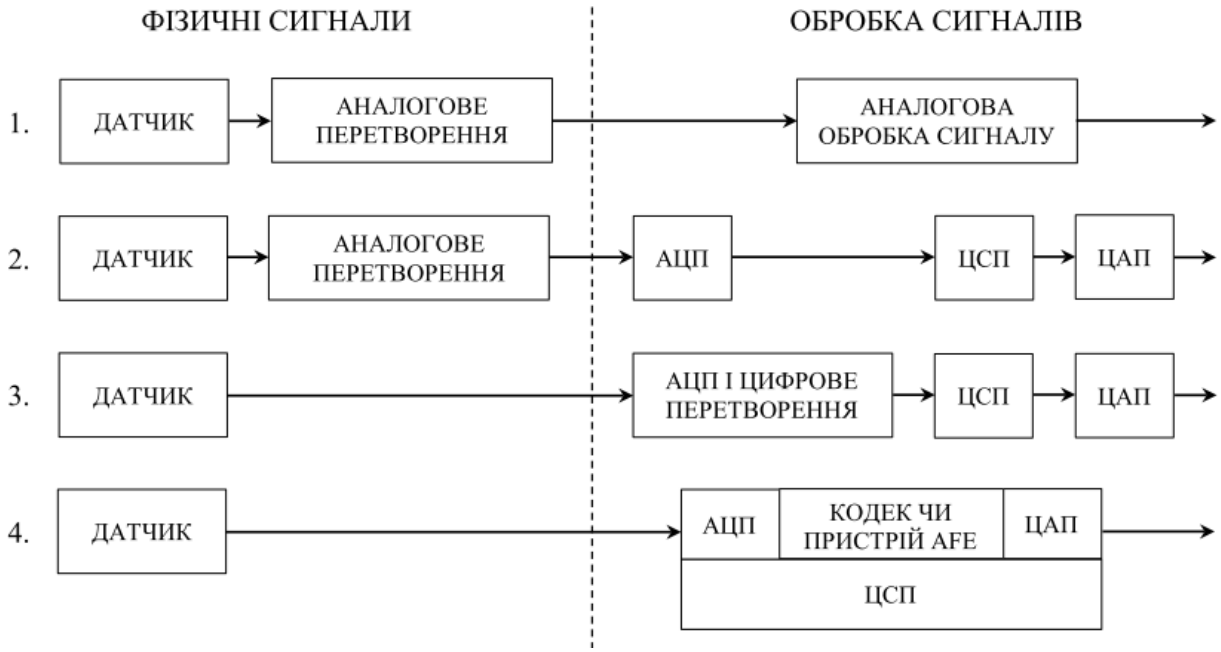



Рис. 1 Схеми обробки аналогових та цифрових сигналів

Перша схема відображає чисто аналоговий підхід. Інші три схеми відображають реалізацію ЦОС. Великий вплив на обсяг і якість реалізації ЦОС завдає місцеположення АЦП в тракті обробки сигналу. Друга схема відображає реалізацію ЦОС з ланками попереднього узгодження. В схемах три та чотири АЦП переміщений ближче до датчика, тому велика частина обробки аналогового сигналу тепер проводиться за допомогою АЦП, що вимагає збільшення його можливостей. Збільшення можливостей АЦП може виражатися у збільшенні частоти дискретизації, розширенні динамічного діапазону , підвищення роздільної здатності, відсіканні вхідного шуму, використанні вхідної фільтрації і програмованих підсилювачів (PGA), наявності джерел опорної напруги на кристалі і т.д. Всі згадані доповнення підвищують функціональний рівень і спрощують систему. При наявності сучасних технологій виробництва ЦАП і АЦП з високими частотами дискретизації і роздільними здатностями істотний прогрес досягнутий в інтеграції все більшого числа ланцюгів безпосередньо в АЦП / ЦАП. У сфері вимірювань, наприклад, компанією Analog Devices випущено 24-бітові АЦП з вбудованими програмованими підсилювачами (PGA), які дозволяють оцифровувати повномасштабні мостові сигнали 10 mV безпосередньо, без попереднього узгодження (наприклад, серія AD773x). Щоб керувати голосовими та звуковими сигналами є комплексні пристрої кодування-декодування - кодеки (Analog Front End, AFE), що відображені на схемі чотири, які мають вбудовану в чіп аналогову схему, що дає змогу вимагати

мінімум вимог до зовнішніх компонентів узгодження (AD1819B і AD73322). Існують також відеокодеки (AFE) для таких завдань, як обробка зображення за допомогою ПЗЗ (CCD), та інші (наприклад, серії AD9814, AD9816, і AD984X, все продукція Analog Devices).

В якості практичного прикладу використання ЦОС порівняємо аналоговий і цифровий фільтри низької частоти (ФНЧ), кожен з частотою зрізу 1 кГц, що мають однакові габарити в реалізації. Цифровий фільтр реалізований у вигляді типової дискретної системи, показаної на рис. 2.

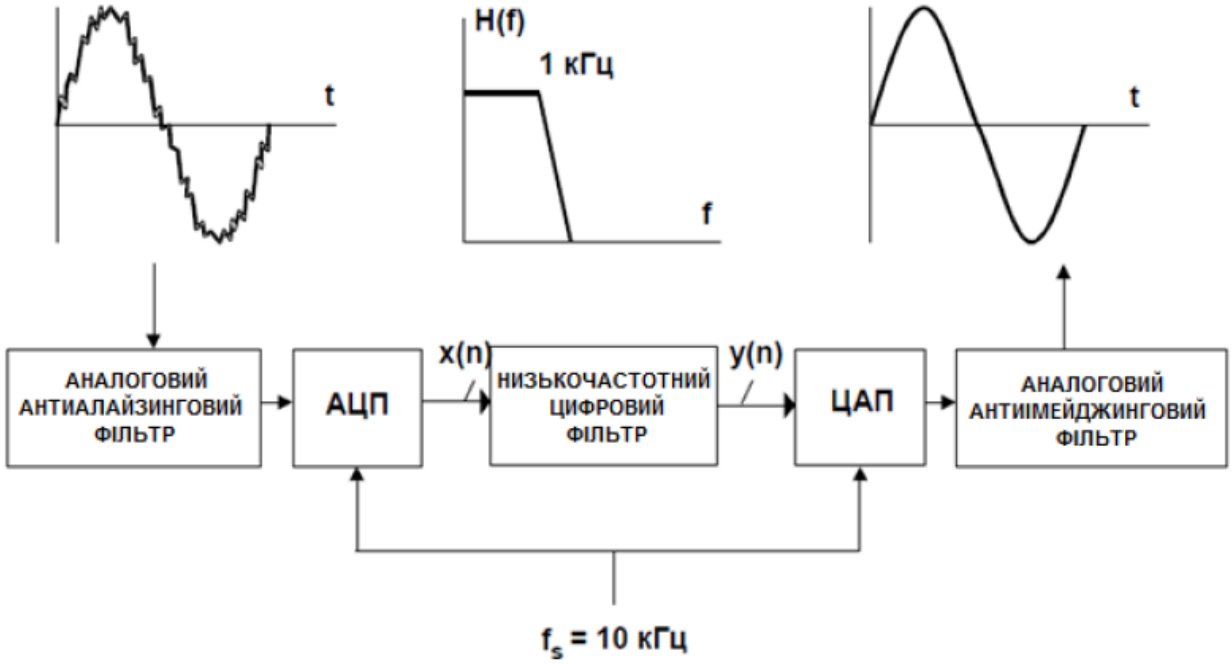



Рис. 2 Схема типової дискретної системи

При побудові системи прийнято кілька неявних припущень. По-перше, щоб точно обробити сигнал, приймається, що тракт АЦП / ЦАП володіє достатніми значеннями частоти дискретизації, роздільної здатності та динамічного діапазону. По-друге, для того, щоб закінчити всі свої обчислення в межах інтервалу дискретизації (1/f), пристрій ЦОС повинен мати достатню швидкодію. По-третє, на вході АЦП і виході ЦАП зберігається потреба в аналогових фільтрах низької частоти (anti-aliasing filter і anti-imaging filter), хоча вимоги до їх продуктивності невеликі.

Аналогове перетворення реалізується фільтром Чебишева першого роду шостого порядку (характеризується наявністю пульсацій коефіцієнта передачі в смузі пропускання і відсутністю пульсацій поза смугою пропускання). Його характеристики представлені на рис. 3.

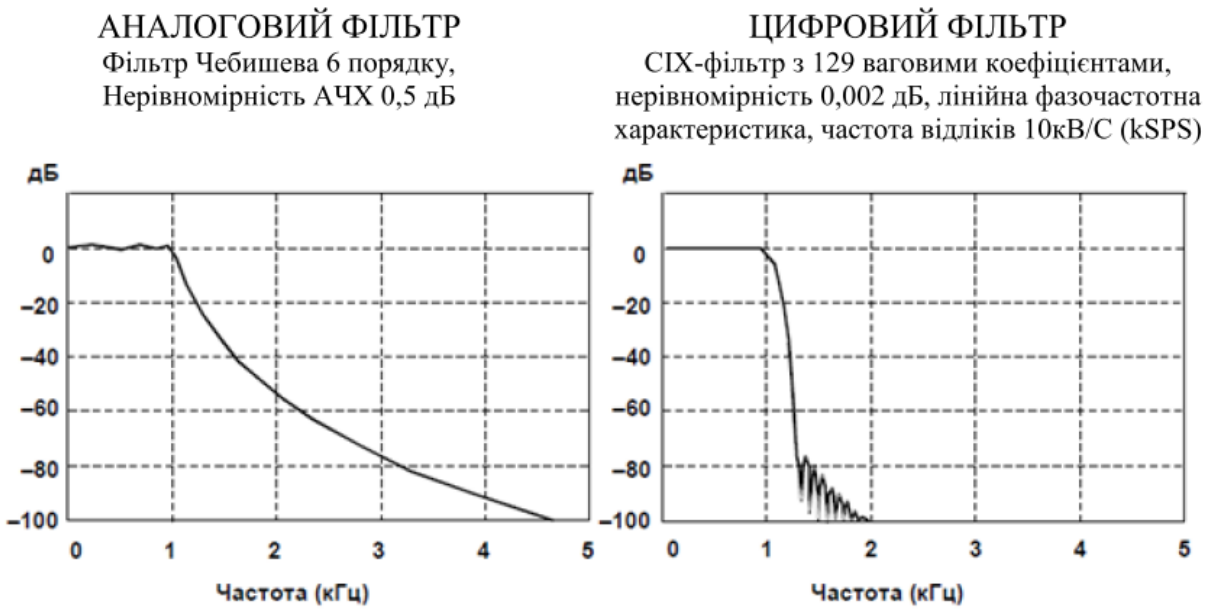



Рис. 3 Порівняння амплітудно-частотних характеристик аналогового та цифрового фільтрів

Представлений на рис. 3 цифровий СІХ-фільтр з 129 ваговими коефіцієнтами має нерівномірність характеристики всього 0,002 дБ в смузі пропускання , лінійну фазову характеристику і набагато більш крутий спад. На практиці такі характеристики неможливо реалізувати з використанням одних тільки аналогових методів. Інша очевидна перевага схеми полягає в тому, що цифровий фільтр не вимагає чіткого підбору компонентів і не чутливий до дрейфу частоти, так як вона стабілізована на кристалі. Фільтр з 129 коефіцієнтами вимагає 129 операцій множення з накопиченням (MAC) для обчислення кожного вихідного відліку. Ця обробка повинна бути закінчена в межах інтервалу дискретизації 1/f, щоб забезпечити роботу в реальному масштабі часу. У цьому прикладі частота дискретизації дорівнює 10 кГц, тому для обробки достатньо 100 мкс. Тоді такий фільтр вимагає швидкодії більше 129/100 мкс = 1,3 мільйона операцій в секунду (MIPS). Існуючі ЦСП мають набагато більшу швидкодію, тобто така реалізація не обмежується ніяким фактором.

**Загальна схема цифрової обробки сигналів.**

Узагальнена схема ЦОС (рис. 4) відображає послідовність процедур, необхідних для перетворення вихідного аналогового сигналу $x(t)$ в інший аналоговий сигнал $y(t)$ по заданому алгоритму засобами цифрової обчислювальної техніки.

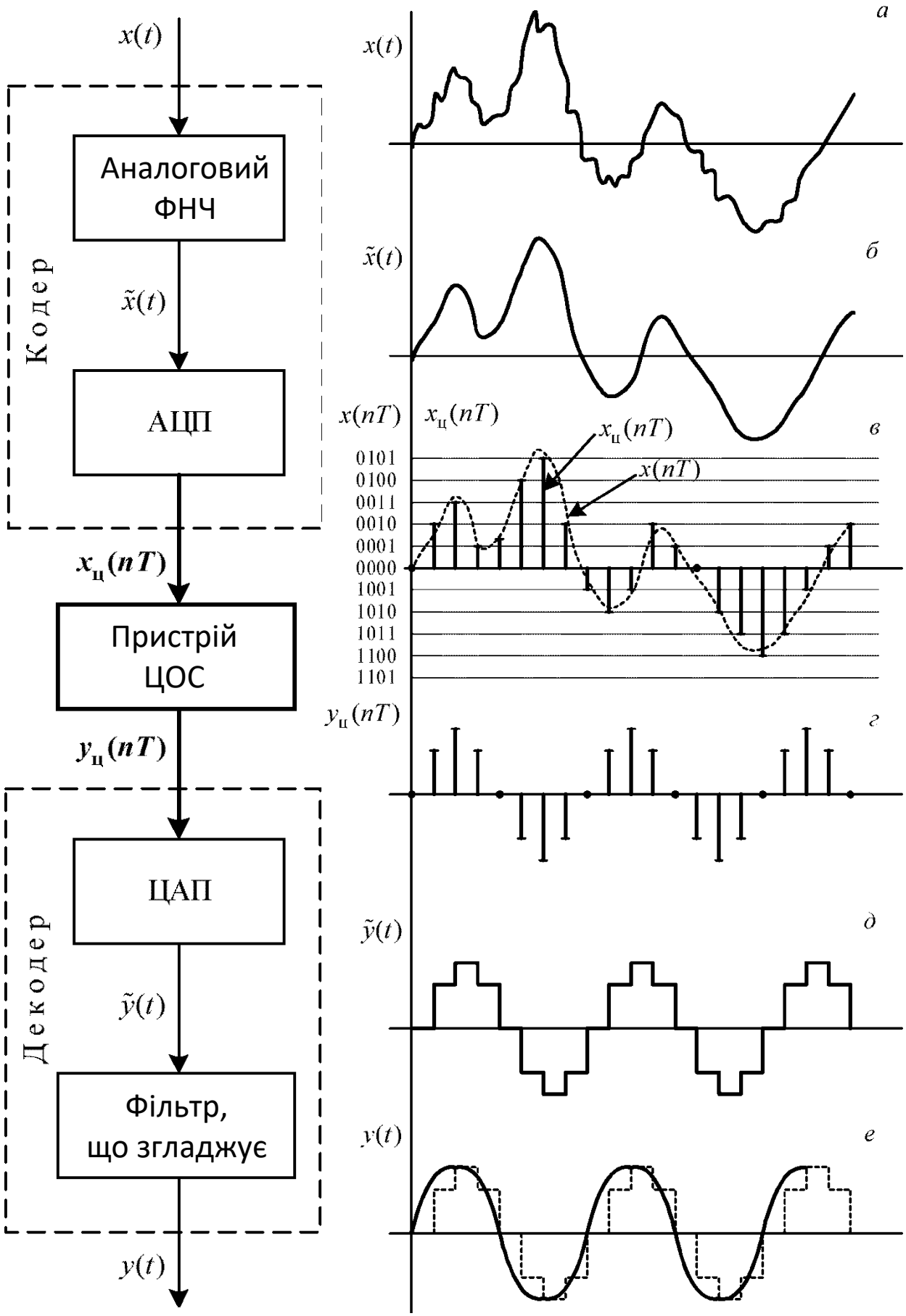



Рис. 4. Загальна схема цифрової обробки сигналів

У цифровій обробці сигналу можна виділити три основні етапи:

- формування цифрового сигналу $x_{\text{ц}}(nT)$ із вхідного аналогового сигналу $x(t)$;
- перетворення цифрового сигналу $x_{\text{ц}}(nT)$ у цифровий сигнал $y_{\text{ц}}(nT)$ за заданим алгоритмом;
- формування результуючого аналогового сигналу $y(t)$ з цифрового сигналу $y_{\text{ц}}(nT)$.

В узагальненій схемі ЦОС цим етапам відповідають три функціональні пристрої:

- кодер;
- пристрій ЦОС;
- декодер.

Узагальнена схема та часові діаграми поетапного процесу ЦОС наведено на рис. 4, а-е. Розглянемо кожен із етапів:

1. На *першому* етапі *кодер* з вихідного *аналогового сигналу* $x(t)$ (рис. 4,а) формує *цифровий* сигнал $x_{\text{ц}}(nT)$ (рис. 4,б), без чого принципово неможлива цифрова обробка. До складу кодеру входять аналоговий фільтр нижніх частот (ФНЧ) та аналого-цифровий перетворювач (АЦП).

*Аналоговий фільтр нижніх частот* призначений для обмеження спектру $X(j\omega)$ вхідного аналогового сигналу $x(t)$.

Необхідність обмеження спектра випливає з теореми Котельникова, відповідно до якої частота дискретизації $f_{\partial}$ вибирається з умов: $f_{\partial} \geq 2 f_{в}$, де $f_{в}$ – верхня частота спектра сигналу.

Можливість обмеження спектра пов'язана з особливостями частотного розподілу енергії сигналу: основна частина його енергії зосереджена в області $f \leq f_{в}$, тобто амплітуди спектральних складових, починаючи з деякої частоти $f > f_{в}$ істотно знижуються (рис. 5,а ). Вибір значення $f_{в}$ визначається конкретним типом сигналу і завданням, що розв'язується. При обробці аудіо- та відеосигналів вибір $f_{в}$ залежить від особливостей психофізичного сприйняття цих сигналів. Наприклад, для стандартного телефонного сигналу верхня частота $f_{в}$ дорівнює 3,4 кГц, а мінімальна стандартна частота дискретизації $f_{\partial}$ - 8 кГц.

На виході ФНЧ отримують аналоговий сигнал $\tilde{x}(t)$ із *фінітним* (обмеженим по частоті) спектром $\tilde{X}(j\omega)$ (рис. 5,б).

*Аналого-цифровий перетворювач* формує цифровий сигнал $x_{\text{ц}}(nT)$ за допомогою дискретизації та квантування сигналу $\tilde{x}(t)$ (рис. 4,в).

*Дискретизація за часом* (*дискретизація*) є процедурою взяття миттєвих значень (*відліків*) аналогового сигналу $\tilde{x}(t)$ з інтервалом часу, рівним періоду дискретизації $T$, Значення відліків $x(nT)$ збігаються зі значеннями сигналу $\tilde{x}(t)$ у моменти часу $t = nT$:

$$x(nT) = \tilde{x}(t)_{|t=nT}.$$

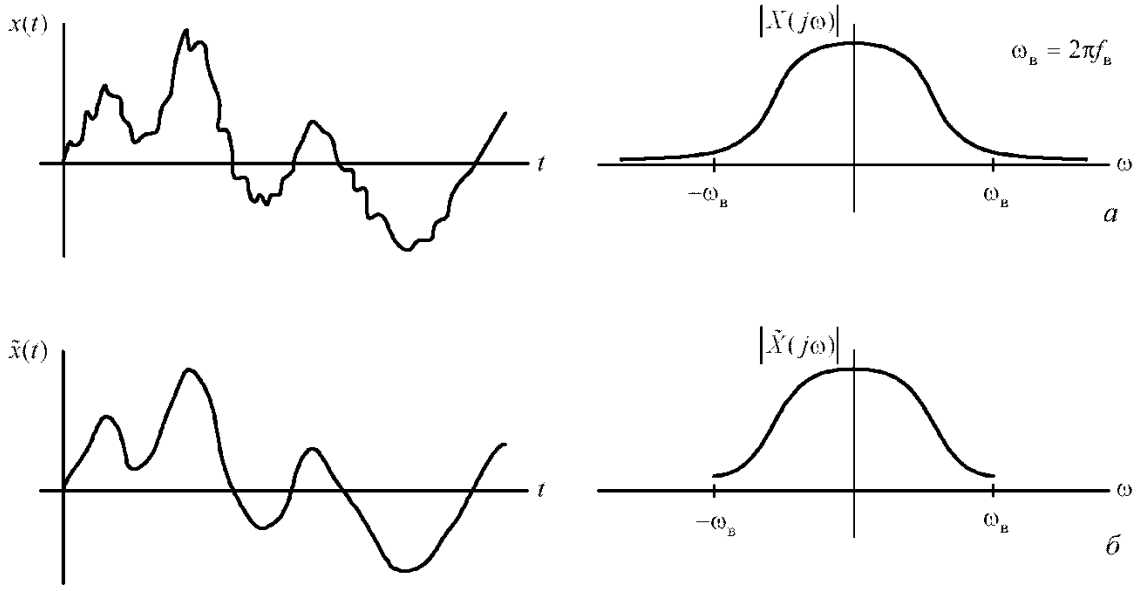



Рис. 5. Сигнали та їх амплітудні спектри на вході (а) і виході *(б )* ФНЧ

Сукупність відліків $x(nT)$, $n = 0,1,\ldots$ називають *дискретним сигналом*.

*Квантування за рівнем* (*квантування*) проводиться з метою подання точних значень відліків $x(nT)$ у вигляді двійкових чисел кінцевої розрядності *квантованих відліків* $x_{\text{ц}}(nT)$. Для цього динамічний діапазон дискретного сигналу $x(nT)$ розбивається на кінцеве число дискретних рівнів – *рівнів квантування* – і кожному відліку за певним правилом надається значення одного з найближчих рівнів, між якими він виявляється. Рівні квантування кодуються двійковими числами розрядності $b$ що залежить від числа рівнів квантування $R$:

$$R \le 2^b$$

звідки $b = \text{int}(\log_2 R)$. На часовій діаграмі (рис. 4,в) для прикладу вибрано 5 рівнів квантування (без урахування знака), тому $b = 3$ і відліки $x_{\text{ц}}(nT)$ кодуються чотири розрядними двійковими числами: один знаковий розряд, три значущих.

Сукупність квантових відліків $x_{\text{ц}}(nT)$, $n = 0,1,\ldots$ називають *цифровим сигналом*.

2.На *другому* етапі *пристрій ЦОС* перетворює цифровий сигнал $x_{\text{ц}}(nT)$ (рис. 4,в) у цифровий сигнал $y_{\text{ц}}(nT)$ (рис. 4,г) за заданим алгоритмом.

*Пристрій ЦОС* може бути реалізовано апаратно або програмно. У першому випадку – у вигляді спеціалізованого цифрового пристрою, у другому – у вигляді програми на комп'ютері або цифровому процесорі обробки сигналів (ЦПОС). Програмна реалізація переважає.

Пристрої ЦОС можуть працювати у реальному чи нереальному часі.

У реальному часі обробка сигналів повинна виконуватися у темпі надходження відліків вхідного сигналу $x_{\text{ц}}(nT)$, $n = 0,1,\ldots$ і відповідати таким вимогам:

• час циклу $\Delta t_{ц}$ при обчисленні відліку $y_{\text{ц}}(nT)$ не повинен перевищувати інтервалу між двома сусідніми відліками $x_{\text{ц}}(nT)$, тобто періоду дискретизації $T$

$$\Delta t_{ц} \le T;$$

• тактова частота $f_{\tau}$ процесора повинна бути набагато вищою за частоту дискретизації $f_{д}$ сигналу $x_{\text{ц}}(nT)$

$$f_{\tau} >> f_{д}.$$

Останнє викликано тим, що у алгоритмах ЦОС кількість операцій на циклі, необхідна для обчислення одного відліку $y_{\text{ц}}(nT)$, дуже велика. Наприклад, для стандартного телефонного сигналу з частотою дискретизації 8 кГц тактова частота має бути не менше 6 мГц.

У *реальному часі* виконується обробка сигналів, пов'язана з її передачею по каналам зв'язку, зокрема, у мережі Internet. До типових завдань ЦОС у реальному часі відносяться: виявлення, фільтрація, стиснення, розпізнавання сигналів та ін.

У *нереальному часі* виконується обробка сигналів, пов'язана, передусім, зі їх дослідженням. До типових завдань ЦОС у нереальному часі

відносяться: студійна обробка аудіо- та відеосигналів; обробка даних різної фізичної природи, отримана від датчиків та ін.

3. На *третьому* етапі *декодер* формує результуючий аналоговий сигнал $y(t)$ із цифрового сигналу $y_{\text{ц}}(nT)$. До складу декодера входять цифроаналоговий перетворювач (ЦАП) і фільтр, що згладжує.

*Цифро-аналоговий перетворювач* формує із цифрового сигналу $y_{\text{ц}}(nT)$ (рис. 4,г) ступінчастий аналоговий сигнал $\tilde{y}(t)$ (рис. 4,д).

*Фільтр, що згладжує* (низькочастотний) усуває ступінчастий ефект (стрибки) у вихідному сигналі ЦАП $\tilde{y}(t)$. На виході фільтра, що згладжує, отримуємо аналоговий сигнал $y(t)$ (рис. 4,е) – результат перетворення вихідного сигналу $x(t)$.

## Основні типи сигналів та їх математичний опис. Нормування часу

*Сигналом* називають фізичний процес, що несе інформацію. Математично сигнали описуються *функціями* часу, тип яких залежить від типу сигналу. До основних типів сигналів відносять: *аналоговий*, *дискретний* та *цифровий*.

*Аналоговим* називають сигнал, безперервний за часом і станом (рис. 6,а). Такий сигнал описується *безперервною* або кусково-безперервною функцією $x(t)$, при цьому і аргумент, і функція можуть приймати будь-які значення з деяких інтервалів $t_1 \le t \le t_2$, $x_1 \le x \le x_2$ відповідно.

*Дискретним* називають сигнал, дискретний за часом і безперервний за станом (рис. 6,б). Такий сигнал описується решітчастою функцією (послідовністю) $x(nT)$, $n = 0,1,2,\ldots$, яка визначена тільки в дискретні моменти часу $nT$ і може приймати будь-які значення деякого інтервалу $x_1 \le x \le x_2$.

Інтервал $T$ називають *періодом дискретизації*, а обернену величину – частотою дискретизації

$$f_д = \frac{1}{T} \qquad (1.1)$$

Значення послідовності у моменти часу $nT$ називають *відліками*. Дискретний сигнал може бути як *дійсним*, так і *комплексним*. В останньому випадку його дійсна та уявна частини описуються дійсними послідовностями

$$x(nT) = x_1(nT) + jx_2(nT).$$

*Цифровим* називають сигнал, дискретний за часом і квантований за станом (рис. 6,в). Такий сигнал описується квантованою гратчастою функцією (*квантованою послідовністю*) $x_{\text{ц}}(nT)$, відліки якої в кожний момент часу $nT$ приймають дискретні значення рівнів квантування з деякого інтервалу $x_1 \le x \le x_2$.

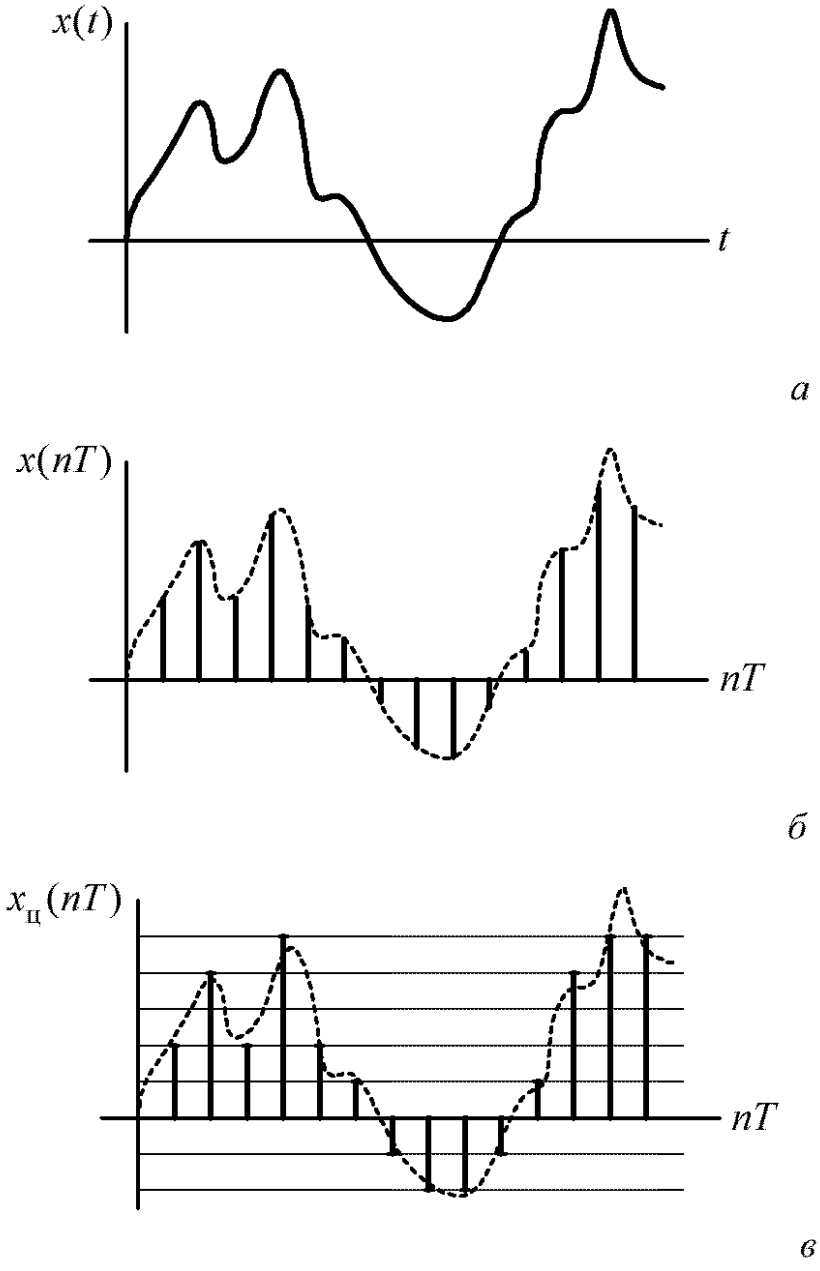



Рис. 6. Основні типи сигналів: аналоговий (а), дискретний (б) і цифровий (в)

При описі дискретних і цифрових сигналів зручно користуватися *нормованим часом* $\hat{t}$ ˆ

$$\hat{t} = \frac{t}{T},$$

який за $t = nT$ має сенс номеру відліку $n$

$$\hat{t} = \frac{t}{T} = \frac{nT}{T} = n \qquad (1.2)$$

і означає, що відлік взятий в момент $nT$ , Це дозволяє описувати дискретний сигнал функцією цілісної змінної $x(n)$ і вважати тотожними позначення дискретного сигналу $x(n)$ і $x(nT)$:

$$x(nT) \equiv x(n).$$

## Типові дискретні сигнали

У ЦОС ряд дискретних сигналів використовують як випробувальні впливи і називають типовими. До них відносяться:

1. *Цифровий одиничний імпульс*, що описується послідовністю

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, n = m; \\ 0, n \neq m, \end{cases} \qquad (1.3)$$

Тобто цей сигнал дорівнює одиниці при $n = 0$ і нулю при всіх інших значеннях $n$ (рис. 7, а*)*.

*Затриманий* цифровий *одиничний імпульс* описується послідовністю

$$u_0(n - m) = \begin{cases} 1, n = m; \\ 0, n \neq m, \end{cases} \qquad (1.4)$$

тобто цей сигнал,на відміну від незатриманого, дорівнює одиниці при $n = m$ і нулю при всіх інших значеннях $n$ (рис. 7,*б).*

З визначення затриманого цифрового одиничного імпульсу (1.4) випливає важливе співвідношення

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)u_0(n - m). \qquad (1.5)$$

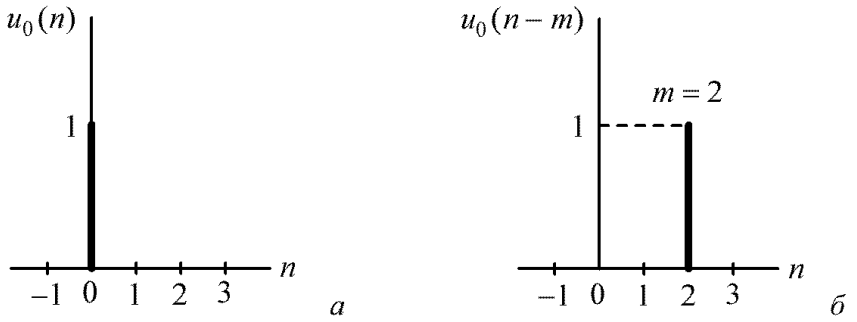



Рис. 7 Цифровий одиничний (а) і затриманий цифровий одиничний *(б)* імпульси

За визначенням (1.4) послідовність $u_0(n-m)$ дорівнює нулю у всіх точках $n$, крім $n=m$ (де вона дорівнює одиниці), тому складові в (1.5) при всіх значеннях $m$, крім $n=m$, дорівнюють нулю,оОтже, сума дорівнює $x(n)$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} x(m)u_0(n-m) = x(0)u_0(n) + x(1)\,u_0(n-1) + \cdots + x(n)u_0(n-n) + x(n+1)u_0[n-(n+1)] + \cdots = 0 + 0 + \cdots + x(n)u_0(0) + 0 + \cdots = x(n).$$

Наприклад, підставивши у (1.5) $n=2$, отримаємо

$$\mathrm{x}(2) = \mathrm{x}(0)u_0(2) + \mathrm{x}(1)u_0(1) + \mathrm{x}(2)u_0(0) + \mathrm{x}(3)u_0(-1) + \ldots = = 0 + 0 + \mathrm{x}(2)u_0(0) + 0 + \ldots = \mathrm{x}(2).$$

За аналогією з властивістю дельта-функції співвідношення (1.5) називають *фільтруючою властивістю* або *властивістю селективності* цифрового одиничного імпульсу.

2. *Цифровий одиничний стрибок,* що описується послідовністю

$$u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0; \\ 0, n < 0, \end{cases} \qquad (1.6)$$

тобто цей сигнал дорівнює одиниці при всіх невід'ємних значеннях $n$ (рис. 8,*а).*

*Затриманий* цифровий *одиничний стрибок* (рис. 8,6) описується послідовністю

$$u_0(n-m) = \begin{cases} 1, n \geq m; \\ 0, n < m, \end{cases} \qquad (1.7)$$

тобто цей сигнал, на відміну від незатриманого, дорівнює одиниці при всіх значеннях $n \geq m$ і нулю при інших значеннях $n$.

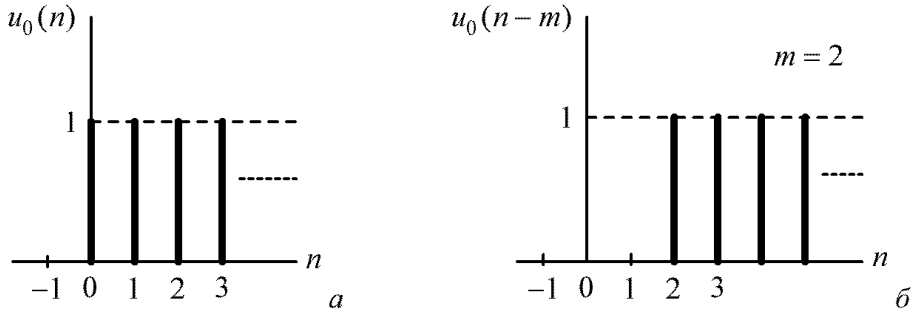



Рис. 8 Цифровий одиничний (а) і затриманий цифровий одиничний *(б)* стрибки

3. *Дискретна експонента*, що описується послідовністю

$$\mathrm{x(n)} = \begin{cases} \mathrm{a^n}, \mathrm{n} \geq 0; \\ 0, \mathrm{n} < 0, \end{cases} \qquad (1.8)$$

де $a$ – дійсна константа. В залежності від величини та знаку $a$ дискретна експонента буде:

$|a| < 1$ і $a > 0$ – спадаюча знакопостійна (рис. 9,а);

$|a| < 1$ і $a < 0$ – спадаюча знакозмінна (рис. 9,б);

$|a| > 1$ – зростаюча;

$|a| = 1$ і $a > 0$ – цифровим одиничним стрибком;

$|a| = 1$ і $a > 0$ – знакозмінна послідовність одиниць.

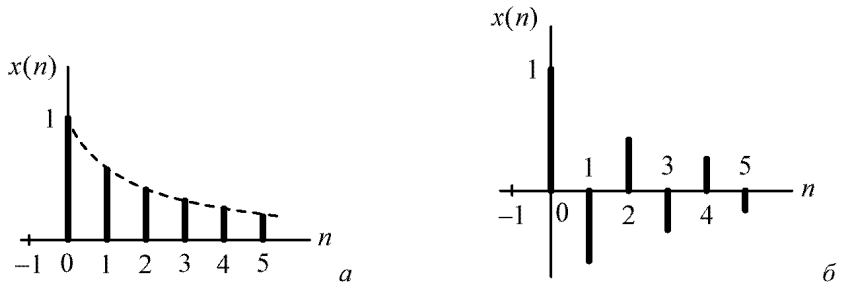



Рис. 9. Знакопостійна (а) і знакозмінна *(б)* дискретні експоненти

*4. Дискретний гармонічний сигнал,* наприклад, дискретна косинусоїда, що описується послідовністю

$$x(nT) - x(n) = A\cos(2\pi fnT) - A\cos(\omega nT), \qquad (1.9)$$

де $T$ – період дискретизації; $A$ – амплітуда; $\omega$ – *кругова* частота, пов'язана з частотою $f$ коефіцієнтом пропорційності $2\pi$

$$\omega = 2\pi f. \qquad (1.10)$$

Дискретна косинусоїда отримується із аналогової

$$x(t) - Acos(2\pi ft) = Acos(\omega t)$$

в результаті заміни неперервного часу дискретним (рис. 10)

$$x(nT) = x(n) = Acos(\omega t)_{|t=nT} = Acos(\omega Tn).$$

Дискретна синусоїда описується аналогічно.

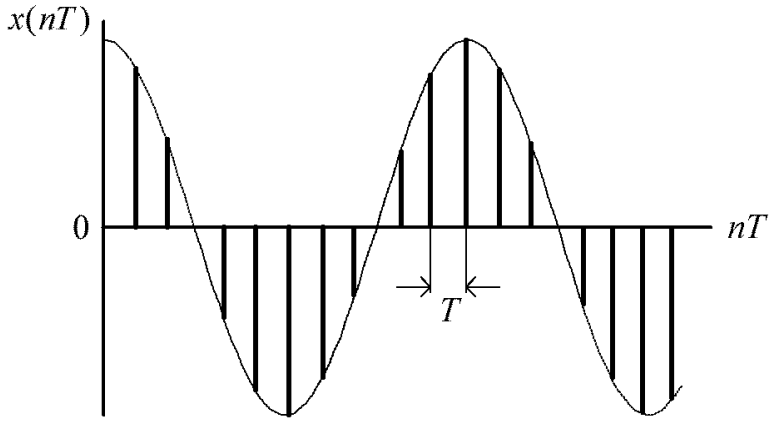



Рис. 10. Дискретна косинусоїда

5. *Дискретний комплексний гармонічний сигнал,* що описується комплексною послідовністю

$$x(n) = Ae^{j\omega Tn}$$

або двома дійсними послідовностями: косинусоїдою (дійсна частина) и синусоїдою (уявна частина)

$$x(nT) = Acos(\omega Tn) + jAsin(\omega Tn).$$

## Основна смуга частот. Нормування частоти

Відповідно до теореми Котельникова, верхня частота $f_в$ аналогового сигналу не має перевищувати половини частоти дискретизації $f_д$ цього сигналу. Отже, дискретні сигнали доцільно розглядати в області $\left[0; \frac{f_д}{2}\right]$, яка називається основною смугою частот або основним діапазоном частот.

Це дозволяє запровадити поняття нормованих частот:

- $\hat{f}$ – відношення поточної частоти $f$ до частоти дискретизації $f_д$

$$\hat{f} = \frac{f}{f_д} = fT \qquad (1.11)$$

- $\hat{\omega}$ – відношення поточної частоти $\omega$ до частоти дискретизації $f_д$

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_д} = \omega T \qquad (1.12)$$

Нормовані частоти $\hat{f}$ і $\hat{\omega}$ пов'язані співвідношенням, подібним (1.10):

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_д} = \frac{2\pi f}{f_д} = 2\pi \hat{f}$$

.

Залежно від обраної шкали частот основна смуга відповідає областям:

$$f \to \left[0; \frac{f_д}{2}\right];$$
$$\hat{f} \to [0; 0{,}5];$$
$$\omega \to 0; \frac{\omega_д}{2} - 0; \frac{\pi}{T};$$
$$\hat{\omega} \to [0;\ \pi].$$

Зазвичай, перевага надається абсолютній частоті $f$ і нормованій частоті $\hat{\omega}$ .

Наприклад, дискретна косинусоїда (1.9) в області нормованих частот має вигляд:

$$x(n) = A\cos\left(2\pi \hat{f} n\right) = A\cos(\hat{\omega} n).$$

Введення нормованої частоти вказує на те, що в ЦОС важливі не абсолютні значення частот сигналу і дискретизації, а їх відношення. Покажемо це на найпростішому прикладі двох дискретних косінусоїд:

$$x_1(n) = \cos(2\pi f_1 T_1 n) = cos\left(2\pi \frac{f_1}{f_{д1}} n\right) \textit{ при } f_1 = 2\text{Гц}, f_{д1} = 16\text{Гц};$$

$$x_2(n) = \cos(2\pi f_2 T_2 n) = cos\left(2\pi \frac{2}{f_{д2}} n\right) \textit{ при } f_2 = 5\text{Гц}, f_{д2} = 40\text{Гц};$$

Підставивши значення $f$ і $f_{\partial}$, отримаємо в області нормованих частот однакові дискретні сигнали

$$x_1(n) = cos\left(2\pi \frac{2}{16} n\right) = cos\left(\frac{\pi}{4} n\right);$$

$$x_2(n) = cos\left(2\pi \frac{5000}{40000} n\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) n;$$

тому що вони мають рівні значення нормованих частот

$$\hat{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{f_{\partial 1}} = \frac{2\pi f_1}{f_{\partial 1}} = \frac{2\pi \cdot 2}{16} = \frac{\pi}{4};$$

$$\hat{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{f_{\partial 2}} = \frac{2\pi f_1}{f_{\partial 2}} = \frac{2\pi \cdot 5}{40000} = \frac{\pi}{4}.$$