Лекція 4-5

Прийняття рішень в умовах визначеності

У цьому розділі будуть вивчатися ЗПР в умовах визначеності при числовій оцінці наслідків, тобто коли зв'язок між альтернативами та наслідками детермінований (кожній альтернативі відповідає лише один наслідок) і ціль ототожнюється з максимізацією чи мінімізацією деякої дійснозначної функції, що визначена на множині всіх наслідків.

4.1. Основні поняття та визначення

Найпростішим типом залежності між альтернативами та наслідками є *детермінований* тип, коли кожна альтернатива приводить до єдиного наслідку. При цьому між альтернативами та наслідками існує функціональна залежність і такі ЗПР називаються *ЗПР в умовах визначеності*.

Оскільки кожній альтернативі відповідає тільки один наслідок і "корисність" (відносно до цілі задачі) цього наслідку оцінюється деякою єдиною числовою оцінкою, а нас цікавить у кінцевому підсумку найкраща оцінка і відповідна їй альтернатива, то можна встановити прямий зв'язок "альтернатива – числова оцінка відповідного наслідку", минаючи саме наслідок.

Унаслідок такого підходу отримаємо дійснозначну функцію $\mathbf{f}$, яка визначена на множині альтернатив, і будемо називати її *цільовою функцією*. Оскільки ціль у ЗПР при числовій оцінці наслідків полягає у знаходженні такого наслідку, що максимізує чи мінімізує числову оцінку, то під оптимальним розв'язком задачі в умовах визначеності природно розуміти ту альтернативу, яка забезпечує цільовій функції її екстремум, тобто мінімальне чи максимальне значення.

Таким чином, можна зробити висновок:

> *математичною моделлю ЗПР* в *умовах визначеності* при числовій оцінці наслідків є задача оптимізації (максимізації чи мінімізації) дійснозначної функції, що задана на множині альтернатив.

Якщо функція $\mathbf{f}$ є скалярною (тобто наслідки оцінюються тільки за одним показником – критерієм), то приходимо до "звичайної" задачі оптимізації, для якої існує єдина концепція оптимальності – оптимальною буде та альтернатива, яка забезпечує цільовій функції мінімальне чи максимальне значення.

Припустимо, що маємо таку ЗПР, наслідки якої оцінюються не за одним, а за двома показниками $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, а ціль полягає в максимізації цієї пари показників (критеріїв) одночасно, тобто за вектором $\mathbf{f} = (\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2})$.

Зрозуміло, що лише винятково точки максимумів цих функцій можуть збігатися. Такі задачі не мають розв'язку у звичайному сенсі (є некоректними). Тому спочатку потрібно визначити принцип оптимальності.

4.2. Загальні відомості про задачі багатокритеріальної оптимізації.

Концепція прийняття рішення в багатокритеріальних ЗПР полягає у свідомому виборі з множини альтернатив однієї. Цей вибір робить ОПР, яка прагне до досягнення своєї певної цілі.

У ролі такої особи виступають або:

- окрема людина (прийняття індивідуальних рішень);
- група людей (прийняття колективних рішень), що володіють правами вибору рішення і несуть відповідальність за його наслідки.

Застосування математичних методів при прийнятті рішень допускає побудову математичної моделі, що формально представляє проблемну ситуацію, тобто ситуацію вибору рішення. Для задач прийняття рішень в умовах визначеності, коли випадкові та невизначені фактори відсутні, компонентами такої моделі є:

- множина **X** альтернатив (рішень), із якої і варто зробити вибір однієї найкращої альтернативи (оптимального розв'язку);
- опис переваг ОПР.

Для того, щоб була забезпечена можливість (воля) вибору, множина альтернатив **X** повинна містити не менш двох елементів.

За наявності числових оцінок наслідків порівняння альтернатив за перевагою ОПР здійснюється не безпосередньо, а за допомогою заданих на **X** числових функцій $\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, ..., \mathbf{f_m}$, які називаються *критеріями*:

- показниками корисності чи ефективності;
- критеріальними функціями;
- цільовими функціями і т. п.

Передбачається, що $\mathbf{m \geq 2}$ (при $\mathbf{m = 1}$ задача оптимізації називається однокритеріальною).

4.2.1. Шкала критерію

Для кожного критерію $\mathbf{f_i}$ на числовій прямій $\mathbf{E^1}$ вказується підмножина $\mathbf{Y_i}$, на якій він (критерій $\mathbf{f_i}$) приймає свої значення. На практиці множину $\mathbf{Y_i}$ (яку часто називають *шкалою критерію* $\mathbf{f_i}$) визначають відповідно до предметного змісту цього критерію.

Наприклад:

- якщо відомо, що значення критерію $\mathbf{f_i}$ є додатним чи невід'ємним (критерій характеризує масу, вартість), то можна прийняти $\mathbf{Y_i = (0, +\infty)}$;

- якщо значення $\mathbf{f_i}$ обмежені знизу та зверху деякими природними границями **a** і **b**, то $\mathbf{Y_i}$ = [**a**, **b**] (наприклад, якщо $\mathbf{f_i}$ – деяка частка запасу ресурсів, то $\mathbf{Y_i}$ = [0,1]);

- якщо значеннями $\mathbf{f_i}$ можуть слугувати лише нуль і натуральні числа (скажімо, коли $\mathbf{f_i}$ визначається внаслідок підрахунку кількості деяких об'єктів), то $\mathbf{Y_i}$ = {0, 1, ;

- якщо на значення $\mathbf{f_i}$ немає жодних змістовних обмежень, то 1 $\mathbf{Y_i} = \mathbf{E^1}$ і т. п.

4.2.2. Кількісні та якісні критерії

У задачах прийняття індивідуальних рішень критерії слугують для вираження "інтенсивності" істотних властивостей (ознак) рішень.

Наприклад, при порівнянні деяких виробів можуть використовуватися такі критерії, як маса, вартість, дата випуску, зовнішній (товарний) вид і т. п.

У задачах прийняття групових рішень критерій $\mathbf{f_i}$ характеризує "якість" (чи перевагу) рішень із погляду індивіда **і**, що входить у скінченну множину **M = {1, 2, ..., m}** .

Наприклад, якщо множина альтернатив є скінченною й індивід **і** їх проранжував (упорядкував за перевагою), то можна прийняти:

- $\mathbf{f_i(x') = 1}$ для найбільш переважної альтернативи $\mathbf{x'}$;

-$\mathbf{f_i(x'') = 2}$ для наступної за перевагою $\mathbf{x''}$ і т. д.

За своїм характером критерії поділяються на кількісні та якісні.

Критерій є:

- *кількісним*, коли його значення має сенс порівнювати, вказуючи, на скільки чи в скільки разів його значення є більшим за інший;

- *якісним*, коли ці порівняння безглузді.

Прикладом кількісного критерію $\mathbf{f_i}$ є маса. Якщо фіксована одиниця виміру маси, то можна говорити про те, у скільки разів (чи на скільки) один виріб важчий за інший. Відношення ваги виробів не змінюється після переходу до іншої одиниці виміру, тобто після перетворень $\mathbf{f_i}$ у $\mathbf{f_i^k}$, де $\mathbf{k} > 0$.
Зрозуміло, що будь-яке інше перетворення (яке не є множенням на додатне число) може привести до зміни вихідного значень $\mathbf{f_i}$.

У розглянутому прикладі допустимими перетвореннями критерію $\mathbf{f_i}$ є всі додатні лінійні перетворення і лише вони.

Функцію $\boldsymbol{\varphi}$ називають допустимим перетворенням критерію $\mathbf{f_i}$, якщо функція $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{f_i})$ знову є критерієм, що вимірює (характеризує) ту ж саму властивість. При заміні $\mathbf{f_i}$ на $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{f_i})$ множина $\mathbf{Y_i}$ змінюється на $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{Y_i})$.

Таким чином, із кожним критерієм зв'язують множину допустимих перетворень $\boldsymbol{\varphi}$ і кажуть, що цей критерій має шкалу типу $\boldsymbol{\varphi}$ чи що вимірювання виконуються за шкалою типу $\boldsymbol{\varphi}$. Як правило, множина $\boldsymbol{\varphi}$ вводиться разом із завданням критерію, але іноді визначення типу шкали виявляється самостійною і досить складною задачею.

У вищенаведеному прикладі

$\boldsymbol{\varphi = \varphi_0 = \{ \varphi \mid \varphi(z) = kz,\ k > 0 \}}$.

Шкала такого типу називається *шкалою відношень* тому, що зберігаються відношення величин $\mathbf{kz'/ kz'' = z'/ z'' = C}$, $\mathbf{C}$ const.

Розповсюдженим є випадок виміру в шкалі типу

$\boldsymbol{\varphi_u = \{ \varphi \mid \varphi(z) = kz+l,\ k > 0 \}}$.

Тут допустимими перетвореннями є множення на додатне число **k** і додавання довільного числа **l**. Така шкала називається *шкалою інтервалів*.

Ця назва пояснюється властивістю збереження відношень інтервалів:

$$\frac{z1-z2}{z3-z4} = \frac{(\mathbf{kz1+l})-(\mathbf{kz2+l})}{(\mathbf{kz3+l})-(\mathbf{kz4+l})} = \mathbf{C},\ \mathbf{C}\ \text{const.}$$

Прикладом критерію, що має шкалу інтервалів, слугує "дата випуску виробу", оскільки для виміру часу необхідно фіксувати масштаб і початок відліку.

Шкала є тоді досконалою, чим вужча множина $\boldsymbol{\varphi}$ допустимих перетворень. Критерії, що мають шкалу не менш досконалу, ніж інтервальна, називаються *кількісними*. У більшості випадків кількісні критерії відповідають вимірам об'єктивних (фізичних) властивостей. Однак дуже поширені й критерії з менш досконалими шкалами, ніж шкала інтервалів.

Найменш досконалою шкалою критеріїв, що зустрічається у задачах оптимізації, є *порядкова шкала*. Для неї множина допустимих перетворень складається з усіх монотонно зростаючих функцій:

$$\boldsymbol{\varphi_n = \{ \varphi \mid z' > z'' \rightarrow \varphi(z') > \varphi(z'') \}}.$$

Критерії, що мають порядкову шкалу, називаються *якісними*. Значення якісного критерію має сенс порівнювати тільки за відношенням "більше", "менше" і "дорівнює" – вони зберігаються при монотонних перетвореннях. Але з'ясовувати, у скільки разів чи на скільки одне значення є більшим за інше, безглуздо.

Критерій із порядковою шкалою природним чином виникає в тих випадках, коли розв'язки ранжуються, тобто розташовуються за зростанням чи за зменшенням інтенсивності деякої властивості. Потім їм приписуються числа таким чином, щоб більшій інтенсивності відповідало більше чи, навпаки, менше число.

Звичайно, такі ранжування отримують при суб'єктивних "вимірах", наприклад, коли вони відображають думку індивіда про перевагу альтернатив.

Дуже часто суб'єктивні виміри виконуються в бальних шкалах. Наприклад, експерти можуть оцінювати у балах зовнішній вигляд виробу.

Критерії з бальними шкалами займають "проміжне" положення між кількісними та якісними критеріями.

Твердження про значення критеріїв із заданими типами шкал називається *осмисленим*, чи *адекватним*, якщо його істинність не змінюється після застосування до критеріїв будь-яких допустимих перетворень, зумовлених типами шкал.

Тому для аналізу й розв'язання практичних багатокритеріальних задач оптимізації варто застосовувати тільки ті визначення та поняття, методи і процедури, що приводять до одержання адекватних висновків і рекомендацій.

Наприклад, широко відомим є метод розв'язку багатокритеріальних задач, заснований на "згортанні" векторного критерію в одну функцію – *узагальнений* (чи агрегований) критерій $\mathbf{F}(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \ldots, \mathbf{f_m})$.

Неважко переконатися в тому, що цей метод не придатний для розв'язку задач із якісними критеріями.

Візьмемо найрозповсюдженіший узагальнений критерій – лінійну "згортку":

$$\mathbf{F}_\Sigma = \sum_{i \in M} \boldsymbol{\mu}_i \mathbf{f}_i,$$

де $\boldsymbol{\mu}_i$ – деякі додатні числа, що характеризують відносну важливість критеріїв (коефіцієнти важливості).

4.2.3. Множина досяжності.

Окремі (локальні) критерії $\mathbf{f_i}$, утворюють *векторний критерій*

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \ldots, \mathbf{f_m}) = (\mathbf{f_i}),\ i \in M,$$

де $\mathbf{M} = \{1, 2, ..., m\}$ називають *множиною індексів критеріїв*.

Вважається, що кожна альтернатива x цілком характеризується відповідною (векторною) *оцінкою*, тобто вектором $\mathbf{f(x)}$. Тому вибір оптимальної альтернативи з множини всіх альтернатив $\mathbf{X}$ зводиться до вибору оптимальної оцінки з множини досяжних оцінок

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{E}^m \mid \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{X}\},$$

де $\mathbf{E}^m$ – $\mathbf{m}$-вимірний числовий простір, який називається *простором оцінок* (критеріїв).

За необхідності цей простір буде вважатися евклідовим, тобто з метрикою.

Часто буває, що в реальних задачах множину **Y** будувати дуже складно, а то й неможливо. Розглядаються інші підходи, що тут не розглядаються.

4.2.4. Незалежність критеріїв за перевагою

У багатокритеріальній задачі кожний розв'язок $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ цілком характеризується своєю оцінкою $\mathbf{y = f(x)}$ і тому вибір оптимального розв'язку зводиться до вибору оптимальної оцінки з множини **Y** всіх досяжних оцінок.

Природно, що найбільш просто порівнювати за перевагою ті векторні оцінки, що відрізняються одна від одної лише однією компонентою.

Значення критерію $\mathbf{f_i}$ можуть по-різному співвідноситися за перевагою ОПР залежно від того, які значення всіх інших критеріїв.

Інакше кажучи, для чисел **s** і **t** з **Y** може виявитися, наприклад, що оцінка

$(\mathbf{y_1, \ldots, y_{i-1}, s, y_{i+1}, \ldots, y_m})$ є важливішою за $(\mathbf{y_1, \ldots, y_{i-1}, t, y_{i+1}, \ldots, y_m})$,

однак оцінка $(\mathbf{y'_1, \ldots, y'_{i-1}, s, y'_{i+1}, \ldots, y'_m})$ є менш кращою за $(\mathbf{y'_1, \ldots, y'_{i-1}, t, y'_{i+1}, \ldots, y'_m})$. І тоді сказати, *яке зі значень критерію **s** чи **t** важливіше, не вказуючи значень інших критеріїв, неможливо*.

Критерій $\mathbf{f_i}$, для якого має місце зазначене твердження, називається *залежним за перевагою від інших*.

Наприклад, якщо $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$ відповідно – довжина й ширина кімнати, а $\mathbf{f_3}$ - висота стелі, то з погляду мешканця $\mathbf{f_3}$ залежить за перевагою від $(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2})$.

Ще приклад: кожний із критеріїв $\mathbf{f_1}$ (температура повітря) і $\mathbf{f_2}$ (його вологість) залежать за перевагою один від одного (мається на увазі комфортність для людини).

Однак, набагато частіше зустрічаються критерії, для яких можна впорядкувати за перевагою всі їхні значення без розгляду значень інших критеріїв.

Прикладами є вже згадувані критерії доходу, витрат і т. п. Такі критерії називаються *незалежними за перевагою від інших*. Критерій $\mathbf{f_i}$ є *незалежним за перевагою* від інших **m-1** критеріїв, якщо виконується ряд вимог (тут не розглядаються).

Задачі, у яких усі критерії незалежні за перевагою, тобто кожен критерій незалежний за перевагою від сукупності всіх інших, а відношення нестрогої переваги на множині значень кожного критерію є відношення " $\geq$ " ("не менше"), називаються *багатокритеріальними задачами максимізації.* У таких задачах кожному критерію бажано мати можливо більше значення, чи, як говорять, кожен критерій бажано максимізувати.

Якщо ж у задачі кожен критерій бажано мінімізувати, то вона називається *багатокритеріальною задачею мінімізації.*

Надалі, за винятком тих випадків, що особливо обговорюються, будуть розглядатися багатокритеріальні задачі максимізації.

4.3. Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації.

Будемо розглядати скінченно вимірні задачі багатокритеріальної максимізації:

$$\mathbf{f(x)} \to \mathbf{max},\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \qquad (1)$$

де **X –** множина альтернатив, яка є множиною з простору $\mathbf{E^m}$;

$\mathbf{f(x) = (f_i(x))|\ i} \in \mathrm{M}$ **–** вектор критеріїв, який відображається відображенням

$$\mathbf{f : X \to E^m};$$

M = {1, 2,..., m} – множина індексів критеріїв;

m – кількість критеріїв.

4.4. Методи багатокритеріальної оптимізації

Таким чином, вибір альтернативи, яка буде розв'язком задачі багатокритеріальної оптимізації (ЗБО), треба робити з множини ефективних альтернатив (чи слабко ефективних альтернатив, чи власно ефективних альтернатив, - в залежності від вимог ОПР і предметної області, в якій приймається рішення.

Але яку, власне, ефективну альтернативу вибирати? Звичайно, якщо множина абсолютно-оптимальних альтернатив не є порожньою, то будь-яка з них (слід нагадати, що всі абсолютно-оптимальні альтернативи рівноцінні між собою) може вважатися розв'язком ЗБО.

Як було з'ясовано вище, на практиці такі задачі зустрічаються досить рідко.

Таким чином нам треба вирішити, що робити у випадку, коли множина абсолютно-оптимальних альтернатив є порожньою. Оскільки ефективні альтернативи є непорівняними між собою за перевагою, яка задається критеріями задачі, а ми усе ж таки хочемо їх якимось чином порівняти, то для цього потрібна додаткова інформація окрім тієї, яка є при порівнянні альтернатив за кожним критерієм окремо. Точніше, для порівняння ефективних альтернатив потрібна додаткова інформація про перевагу не на множині альтернатив, а на множині критеріїв, тобто інформація наступного типу: *скількома одиницями виграшу по одних критеріях можна компенсувати програш по інших критеріях*.

Джерелом такої інформації може бути як ОПР, так і специфіка предметної області, в якій розв'язується задача прийняття рішення.

4.4.1. Метод ідеальної точки

Цей метод не використовує допоміжну інформацію від ОПР про перевагу на множині критеріїв. Це може відбуватися, коли у ОПР ця інформація відсутня або, при наявності, її не можна застосувати з деяких причин.

В цьому випадку робиться припущення про наявність, так званого "оптимального" розв'язку ЗБО, який може бути знайдено шляхом перетворення багатокритеріальної задачі у відповідну скаляризовану (однокритеріальну) задачу.

Точка $\mathbf{a= (a_1, ..., a_m)}$ називається *ідеальною* для задачі БКО (1), якщо її координати відповідають умові

$$\mathbf{a_i} = \mathbf{\max f_i(x)}, \mathbf{x \in X}, \mathbf{i} \in \mathrm{M}.$$

Ідея методу полягає у знаходженні альтернативи, яка має оцінку, що є найближчою до ідеальної точки.

Визначимо відстань $\boldsymbol{\varrho_s(f(x), a) = (\sum_{i=1}^{m} | f_i(x) - a_i|^s)^{1/s}}$ між точками $\mathbf{f(x)}$ та $\mathbf{a}$ в метричному Евклідовому просторі $\mathbf{R^m_s}$ оцінок з метрикою Міньковського з параметром $\mathbf{s >=1}$. Тоді згідно з методом ідеальної точки шукана альтернатива $\mathbf{x^*}$ буде розв'язком так званої скаляризованної задачі:

$$\mathbf{x^*=Argmin(| f_i(x) - a_i|^s)^{1/s}}.$$

Значення параметра метрики $\mathbf{s}$ вибирається в залежності від предметної області. На практиці в основному використовують значення $\mathbf{s} =1, 2$ та $\mathbf{s} \to \infty$.

При $\boldsymbol{s} = \mathbf{1}$(відстань міських кварталів) скаляризована задача приймає вигляд:

$$\sum_{\mathbf{i}\in \mathrm{M}} = \mathbf{f_i(x)} \to \mathbf{\max}\ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}).$$

Відповідно при $\mathbf{s} = 2$ (евклідова відстань) та $\mathbf{s} \to \infty$ ((відстань Чебишева):

$$\sum_{\mathbf{i}\in \mathrm{M}} = \mathbf{(f_i(x)\text{-}a_i)^2} \to \mathbf{\min}\ (\mathbf{x} \in \mathbf{X}).$$

$$\mathbf{\min}\ (\mathbf{x} \in \boldsymbol{X})\ \mathbf{(f_i(x)\text{-}a_i)} \to \mathbf{\max}\ (\mathbf{x} \in \mathbf{X}).$$

4.4.2. Метод послідовних поступок

Особливістю методу є те, що критерії задачі БКО повинні бути попередньо впорядковані за зменшенням їх важливості, після чого вибір розв'язку задачі здійснюється шляхом виконання багатокрокової діалогової процедури. *Діалогова процедура послідовних поступок* складається з одного попереднього і **m** основних кроків (нагадаємо, що **m** – це кількість критеріїв).

0-*ий крок*.

Критерії впорядковуються за зменшенням їх важливості за думкою ОПР (будемо вважати, що $\mathbf{f_1> f_2>\ldots> f_m}$) . Покладемо $\mathbf{G_1= X}$.

i-ий крок (**i=1, …, m**). Розв'яжемо задачу:

$$\mathbf{f_i(x) \rightarrow \max\ (x \in G_i)}.$$

Позначимо $\mathbf{x^i}$ її оптимальний розв'язок. Обчислимо оцінку:

$$\mathbf{y^i = (f_1(x^i), \ldots, f_m(x^i))}.$$

ОПР аналізує оцінку і у випадку, коли вона його не задовольняє, визначає величину поступки $\mathbf{f_1}$ за **i**-им критерієм, на яку він може погодитися з метою покращання показників за іншими, менш важливими критеріями.

Якщо крок не є останнім (**i < m**), то визначається "уточнена" множина альтернатив:

$$\mathbf{G_{i+1} = \{x \in G_i \mid f_i(x) \geq f_i(x^i) - \Delta f_i\}}$$

і здійснюється перехід на наступний крок.

В протилежному випадку альтернатива $\mathbf{x^i}$ вибирається як розв'язок багатокритеріальної задачі і процедура закінчується.

На **m**-му кроці ОПР повинна чи погодитися з отриманою альтернативою, чи повторно виконати процедуру. В цьому випадку ОПР збагачується знанням про взаємозв'язок поступок за критеріями та значеннями менш важливих критеріїв.

Слід зауважити, що метод не обмежує можливості ОПР у виборі ефективних альтернатив. Це обґрунтовується наступною теоремою Вентцеля (тут не приводиться).

4.4.3. Метод послідовного вводу обмежень

Характерною особливістю цього методу є послідовне (на кожному кроці) введення обмежень на альтернативи, які мають незадовільні, з точки зору ОПР, значення критеріїв.

k-ий крок (***k*=1, 2,** …).

Обчислюються оптимальні значення кожного критерію окремо на "уточненій" множині альтернатив:

$$\mathbf{f^{*k}_i = \max f_i(x),\ i=1, \ldots, m;\ G_1=X;}$$

і формується вектор "ідеальної" оцінки на уточненій множині альтернатив:

$$f^{*k}_i = (f^{*k}_1, \ldots, f^{*k}_m).$$

Далі визначається вагові коефіцієнти критеріїв $\alpha_1^k, \ldots, \alpha_m^k$ наступним способом. Складається матриця $\sigma^k=(\sigma_{ij}^k)$ $(i, j=1, \ldots, m)$ переваг ОПР на множині критеріїв, кожна пара симетричних елементів якої $(\sigma_{ij}^k, \sigma_{ji}^k)$ відносну важливість i-го критерію у порівнянні з j -им. Значення кожної пари елементів цієї матриці вибирається так:

-(8,1) – при подавляючій перевазі i -го критерію над j-им;

-(4,1) – при значній перевазі;

- (2,1) – при "звичайній" перевазі;

- (1,1) – при рівноцінності критеріїв.

Тепер розраховуються вагові коефіцієнти критеріїв за наступною формулою:

$$\alpha_i^{(k)}=\left(\sum_{s=1}^{m} \sigma_{is}\right) / \left(\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \sigma_{rs}\right), i=1, \ldots, m .$$

У результаті розв'язку задачі: $\max(x\in G_i) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(k)} f_i(x)$ визначається альтернатива x^k та її оцінка $y^k=(f_i(x^k), \ldots, f_m(x^k))$.

ОПР аналізує отриману альтернативу та оцінку y^k шляхом її співставлення з "ідеальною" оцінкою $f^{*(k)}$.

Якщо оцінка y^k задовольняє ОПР, то процедура закінчується, а альтернатива x^k приймається за розв'язок вихідної задачі.

Інакше, вказується номер $s\in M$ критерію, значення якого найменш, на думку ОПР, його задовольняє; визначається, до якого рівня ξ_s потрібно покращити значення цього критерію, формується нова "уточнена" множина альтернатив $G_{k+1} = \{x\in G_k \,|\, f_s(x)\geq \xi_s\}$ і здійснюється перехід на наступний крок.

4.4.4. Метод бажаної точки

Особливістю цього методу є необхідність задання ОПР бажаних значень критеріїв для визначення переваги на множині критеріїв.

0-ий крок.

Розраховуються "найкращі" і "найгірші" значення критеріїв:

$$f_i^*= f_i(x);\ \ h_i^*=\min f_i(x),\ i \in M,$$

здійснюється монотонне перетворення критеріїв до нормованого безрозмірного вигляду:

$$w_i(x)=\frac{fi_*-fi(x)}{fi_*-hi_*},\ i \in M.$$

k-ий крок (***k*=1, 2,** …).

ОПР аналізує отриманий на попередньому кроці розв'язок та його оцінку у порівнянні з "найкращими" і "найгіршими" значеннями критеріїв і вказує бажані значення критеріїв $\xi_i^k \in [h_i^*, f_i^*]$, $i \in M$.

Здійснюється перетворення бажаних значень цільових функцій до нормованого безрозмірного вигляду

$$w_i^k = \frac{f_{i*} - \xi_{ik}}{f_{i*} - h_{i*}}, \; i \in M.$$

Обчислюються вагові коефіцієнти критеріїв:

$$\varrho_i^k = \left(\prod_{j=1 j \neq i}^{m} w_i^k\right) / \left(\sum_{j=1}^{m} \prod_{l=1, j \neq i}^{m} w_l^k\right), \; i=1, \ldots, m.$$

Слабко ефективна альтернатива x^k знаходиться як розв'язок однокритеріальної задачі: $\max(x \in X) \min(i \in M) \varrho_i^k w_i(x)$.

Обчислюється оцінка $y^k=(f_i(x^k), \ldots, f_m(x^k))$.

Якщо отримані значення цільових функцій задовольняють ОПР, то процедура закінчується, у протилежному випадку – переходимо на наступний крок.