

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28/1

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною
радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»
протокол від 16 грудня
2022 р.
№ 13

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ для самостійної роботи з навчальної дисципліни «ВИМІРЮВАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЮВАЧІ»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»
спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка»
освітньо-професійна програма «Комп'ютеризовані інформаційно-
вимірювальні системи»
факультет комп'ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки і
робототехніки

кафедра метрології та інформаційно-вимірювальної техніки

Рекомендовано на засіданні
кафедри метрології та
інформаційно-вимірювальної
техніки
30 серпня 2022р., протокол № 8

Укладачі: к.т.н., доцент кафедри метрології та інформаційно-
вимірювальної техніки ЧЕПЮК Ларіна, старший викладач кафедри
метрології та інформаційно-вимірювальної техніки ОМЕЛЬЧУК Ігор

Житомир
2022

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 28 / 2</i>

Методичні рекомендації до до лабораторних робіт з дисципліни «ВИМІРЮВАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЮВАЧІ» для студентів спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка»/ Укладачі Л.О. Чепюк, І.А. Омельчук. – Житомир: ДУ «Житомирська політехніка», 2022. – 28 с.

Укладачі: Л.О. Чепюк, І.А. Омельчук

Рецензенти:

к.т.н., доцент, зав. кафедри робототехніки, електроенергетики та автоматизації ім. проф. Б.Б. Самотокіна Ткачук А.Г.,

к.т.н., доцент кафедри робототехніки, електроенергетики та автоматизації ім. проф. Б.Б. Самотокіна Добржанський О.О.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 3

ЗМІСТ

Назва теми	Стор.
1. Рівняння Лагранжа як основа загальної теорії перетворювачів	4
2. Вимірювальний перетворювач як чотириполюсник	7
3. Основні статичні характеристики вимірювальних перетворювачів	10
4. Характеристики перетворювачів у динамічному режимі	14
5. Динамічні похибки	23

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 4

1. Рівняння Лагранжа як основа загальної теорії перетворювачів

Передавання і перетворення вимірювальної інформації у перетворювачах фізичних величин здійснюється через передавання та перетворення енергії. Такий підхід дав змогу академіку О.О.Хакевичу створити основи загальної теорії вимірювальних перетворювачів. Згідно з цією теорією будь-який вимірювальний перетворювач, для якого справедливий принцип оборотності, може бути представлений як чотиріполюсник зі сторонами, загалом різної фізичної природи, а перетворення вимірювальної інформації – як перетворення енергії одного виду в енергію іншого виду.

Звичайно, енергію будь-якої системи за аналогією з механічними системами можна подати добутком двох величини, однією з яких є сила, а іншою - переміщення (координата). Вибір фізичних величин, які були б еквівалентні механічній силі та переміщенню, значною мірою умовлений, але їх добуток повинен відповідати енергії як фізичній величині. Як узагальнені параметри можуть бути прийняті також сила та швидкість (похідна переміщення за часом), добуток яких відповідає потужності як фізичній величині.

Для знаходження зв'язку між силами та переміщеннями рухомої системи тіл широко використовуються рівняння Лагранжа другого роду. Ці рівняння дають змогу порівняно легко роз'язувати задачі динаміки зв'язаних систем.

Отримані для механічних систем рівняння Лагранжа застосовуються і для інших, немеханічних систем. Так, вони були використані Д.Максвеллом для вивчення електромагнітних явищ, В.Томсоном (лордом Кельвіном) для вивчення теплових явищ, внаслідок чого були створенні відповідно теоретичні основи електродинаміки та теоретичні основи термодинаміки.

В найзагальнішому випадку в рівняннях Лагранжа як узагальнені координати можуть бути прийняті будь-який фізичні величини, які визначають енергетичний стан системи. Це дає змогу застосувати рівняння Лагранжа для аналізу роботи ВП, вхідні та вихідні величини яких можуть бути величинами різної фізичної природи.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 5

Рівняння Лагранжа, що встановлює залежність між зовнішніми узагальненими силами, що діють на систему та внутрішніми узагальненими силами, які визначаються змінами кінетичної та потенціальної енергії системи за наявності необоротних втрат на тертя, має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F_k}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial x_i} + \frac{\partial E_l}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_p}{\partial v_i} = F_i$$

де E_k , E_l – відповідно кінетична та потенціальна енергії системи; Φ_l , – функція розсілювання, яка характеризує потужність необоротних втрат; x_i – i -та узагальнена координата; $v_i = \frac{dx_i}{dt}$ – узагальнена швидкість по i -й координат; F_i – i -та зовнішня сила, що діє на систему.

З теоретичної механіки відомо, що кінетична енергія системи зі стаціонарними зв'язками є квадратичною функцією швидкостей

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ik} v_i v_k$$

де m_{ik} – сталі коефіцієнти, що означає масу і характеризують інерційність елементів системи.

Аналогічно потенціально енергія:

$$E_l = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n W_{ik} x_i x_k$$

де W_{ik} – сталі коефіцієнти, що характеризують пружність.

Необоротні втрати енергії системи, що йдуть на нагрівання тіл внаслідок тертя (у механіці) чи нагрівання активних опорів електричним струмом (в електричних системах) описуються дисипативною (від лат. dissipatio – розсіяння) функцією Релея.

$$\Phi_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n R_{ik} v_i v_k$$

де R_{ik} – сталі коефіцієнти, що характеризують узагальнений опір.

Оскільки для ВП з одним входом та одним виходом обмін енергії між перетворювачем і доквіллям (іншим перетворювачем) здійснюється через дві сторони (вхід та вихід), то вирази для E_k , E_l та Φ_l , наберуть вигляд

$$E_k = \frac{1}{2} m_{11} v_1^2 + \frac{1}{2} m_{12} v_1 v_2 + \frac{1}{2} m_{21} v_1 v_2 + \frac{1}{2} m_{22} v_2^2$$

$$E_l = \frac{1}{2} W_{11} x_1^2 + \frac{1}{2} W_{12} x_1 x_2 + \frac{1}{2} W_{21} x_1 x_2 + \frac{1}{2} W_{22} x_2^2$$

$$\Phi_p = \frac{1}{2} R_{11} v_1^2 + \frac{1}{2} R_{12} v_1 v_2 + \frac{1}{2} R_{21} v_1 v_2 + \frac{1}{2} R_{22} v_2^2$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 6

Враховуючи, що узагальнені швидкості та узагальнені координати є взаємно незалежними аргументами для лінійних систем зі стаціонарними зв'язками (кінетична енергія не є функцією координат, $\frac{\partial E_k}{\partial x_i} = 0$)

Узагальнені сили, спричинені змінами кінетичної та потенціальної енергії, а також енергії втрат, наберуть значення

$$F_{k1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial v_1} \right) = \frac{d}{dt} (m_{11}v_1 + m_{12}v_2)$$

$$F_{k2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial v_2} \right) = \frac{d}{dt} (m_{21}v_1 + m_{22}v_2)$$

$$F_{n1} = \frac{\partial E_{ll}}{\partial x_1} = W_{11}x_1 + W_{12}x_2; \quad F_{n2} = \frac{\partial E_{ll}}{\partial x_2} = W_{21}x_1 + W_{22}x_2$$

$$F_{R1} = \frac{\partial \Phi_p}{\partial v_1} = R_{11}x_1 + R_{12}v_2; \quad F_{R2} = \frac{\partial \Phi_p}{\partial v_2} = R_{21}x_1 + R_{22}v_2;$$

оскільки для перетворювачів, для яких справедливий принцип оборотності, коефіцієнти попарно дорівнюють один одному: $m_{12} = m_{21}$, $W_{12} = W_{21}$ та $R_{12} = R_{21}$

З врахування наведених вище виразів для узагальнених сил рівняння Лагранжа для Вп, до входу якого подається вхідна узагальнена сила F_1 , а на виході діє сила F_2 , наберуть вигляд:

$$F_1 = \frac{d}{dt} (m_{11}v_1) + R_{11}v_1 + W_{11}x_1 + \frac{d}{dt} (m_{12}v_2) +$$

$$R_{12}v_2 + W_{12}x_2 = m_{11} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + R_{11} \frac{dx_1}{dt} + W_{11}x_1 +$$

$$m_{12} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + R_{12} \frac{dx_2}{dt} + W_{12}x_2 = (p^2 m_{11} + p R_{11} + W_{11})x_1 + (p^2 m_{12} + p R_{12} + W_{12})x_2 = \xi_{11}x_1 +$$

$$\xi_{12}x_2$$

і аналітично

$$F_2 = (p^2 m_{21} + p R_{21} + W_{21})x_1 + (p^2 m_{22} + p R_{22} + W_{22})x_2 = \xi_{21}v_1 + \xi_{22}v_2$$

де $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \xi_{22}$ - операторні квазіпружні коефіцієнти, фізична суть яких – пружність

Вирази для F_1 та F_2 можна також записати у вигляді:

$$F_1 = (p m_{11} + R_{11} + \frac{1}{p} W_{11})v_1 + (p m_{12} + R_{12} + \frac{1}{p} W_{12})v_2 = Z_{11}v_1 + Z_{12}v_2$$

$$F_2 = (p m_{21} + R_{21} + \frac{1}{p} W_{21})v_1 + (p m_{22} + R_{22} + \frac{1}{p} W_{22})v_2 = Z_{21}v_1 + Z_{22}v_2$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 7

де Z_{11}, Z_{12}, Z_{21} та Z_{22} - операторні опори.

Аналізуючи останні два вирази, легко побачити їх математичну подібність з відповідними півняннями електричного пасивного чотириполюсника Z-форми, в якого узагальненими швидкостями – відповідні струми. Аналогія математичних формул, що описують вимірювальний перетворювач та електричний пасивний чотириполюсників для аналізу роботи вимірювальних перетворювачів.

2. Вимірювальний перетворювач як чотириполюсник

Вимірювальний перетворювач з двома каналами зв'язку (один вхід та один вихід, рис. 1), може бути описаний рівнями Z-форми пасивного чотириполюсника:

$$\begin{aligned} F_1 &= Z_{11}v_1 + Z_{12}v_2; \\ F_2 &= Z_{21}v_1 + Z_{22}v_2. \end{aligned}$$

Розв'язуючи наведену систему рівнянь відносно вхідної та вихідної узагальнених швидкостей, одержимо так звану Y-форму рівнянь:

$$\begin{aligned} v_1 &= Y_{11}F_1 + Y_{12}F_2; \\ v_2 &= Y_{21}F_1 + Y_{22}F_2. \end{aligned}$$

де

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta}; \quad Y_{12} = -\frac{Z_{12}}{\Delta}; \quad Y_{21} = -\frac{Z_{21}}{\Delta}; \quad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta}.$$

(тут $\Delta = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$ – визначник системи).

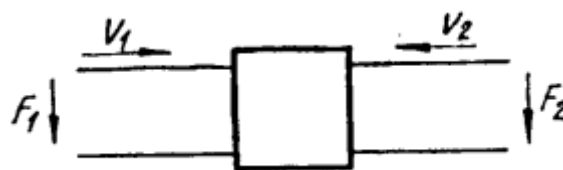


Рис. 1. Вимірювальний перетворювач як чотириполюсник

Подання вимірювального перетворювача у вигляді пасивного чотириполюсника дає можливість легко визначити його параметри як теоретично, так і практично на основі дослідів неробочого ходу та короткого замикання. Вважаючи неробочим ходом ВП такий режим роботи, при якому на одній із його сторін відсутнє переміщення

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 8

(узагальнена швидкість дорівнює нулю), а коротке замикання - режим, при якому на одній із сторін узагальнена сила дорівнює нулю, одержимо значення основних коефіцієнтів:

$$Z_{11} = Z_{1_{н.х}} = \frac{F_1}{v_1} |_{v_2=0}; \quad Z_{22} = Z_{2_{н.х}} = \frac{F_2}{v_2} |_{v_1=0};$$

$$Z_{21} = \frac{F_2}{v_1} |_{v_2=0} \quad Z_{12} = \frac{F_1}{v_2} |_{v_1=0}.$$

Опори Z_{11} та Z_{22} визначаються як відношення відповідних узагальнених сил до узагальнених швидкостей за умови відсутності руху ($v = 0$) на протилежній стороні. У режимі неробочого ходу визначаються також опори Z_{12} та Z_{21} . Отже, значення всіх цих опорів не залежать від властивостей наступних пристроїв, які можуть бути підключені до перетворювача, і характеризують лише властивості ВП. Відповідно до місця цих опорів в структурі перетворювача $Z_{11} = Z_{1_{н.х}}$ та $Z_{22} = Z_{2_{н.х}}$ називають власними вхідними та вихідними опорами сторін перетворювача, а Z_{12} та Z_{21} – власними взаємними (передавальними) опорами. О.О.Харкевич називає Z_{12} та Z_{21} коефіцієнтами перетворення.

Аналогічно можна визначити провідність короткого замикання

$$Y_{11} = Y_{1k} = \frac{v_1}{F_1} |_{F_2 = 0}; \quad Y_{22} = Y_{2k} = \frac{v_2}{F_2} |_{F_1 = 0};$$

а також опори короткого замикання

$$Z_{1k} = \frac{F_1}{v_1} |_{F_2=0} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}}; \quad Z_{2k} = \frac{F_2}{v_2} |_{F_1=0} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11}};$$

які, як і параметри неробочого ходу, визначаються лише властивості ВП і називаються його власними параметрами .

Вище ми розглянули роботи та визначили параметри ВП для двох режимів роботи – неробочого та короткого замикання, тобто для режимів, за яких від ВП не споживається енергія. Визначимо тепер його параметри при роботі під навантаженням. У цьому випадку вхідний опір може бути визначений як

$$Z_{1в.х} = \frac{F_1}{v_1} = Z_{11} + Z_{12} \frac{v_2}{v_1}.$$

Оскільки $\frac{v_2}{v_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_{н} + Z_{22}}$ (тут $Z_{н} = -\frac{F_2}{v_2}$ і за фізичною суттю є опором навантаження: знак мінус враховує протилежність напрямів вихідної узагальненої сили та вихідної узагальненої швидкості в Z-формі рівнянь чотирьохполюсника), то

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 9

$$Z_{1\text{вх}} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{\text{н}} + Z_{22}} = Z_{\text{н}} - \Delta Z.$$

Із останнього виразу випливає, що вхідний опір ВП загалом відрізняється від його власного вхідного опору, тобто опору $Z_{11} = Z_{1\text{н.х}}$ (при $Z_{\text{н}} = \infty$) на значення так званого внесеного опору ΔZ , яке обернено пропорційно сумі власного вихідного опору та опору навантаження.

Аналогічно можна одержати вираз для вихідного опору:

$$Z_{\text{вих}} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{1\text{н}} + Z_{11}}.$$

де $Z_{1\text{н}}$ – умовне навантаження на вході ВП, що визначається еквівалентним вихідним опором пристрою, увімкненого до входу ВП.

Коефіцієнт перетворення, що виражає вихідний ефект щодо вхідної дії (так визначає О.О. Харкевич чутливість), може набирати різні значення, залежно від того який, параметр вхідного та вихідного сигналів є інформативним. Зокрема, якщо інформативними параметрами будуть F_1 та v_2 , то

$$k_1 = \frac{v_2}{F_1} = \frac{Z_{21}}{Z_{12}Z_{21} - Z_{11}(Z_{\text{н}} + Z_{22})}$$

якщо ж інформативними параметрами будуть F_1 та F_2 , то

$$k_2 = \frac{F_2}{F_1} = -\frac{v_2 Z_{\text{н}}}{F_1} = -k_1 Z_{\text{н}} = -\frac{Z_{21}Z_{\text{н}}}{Z_{12}Z_{21} - Z_{11}(Z_{\text{н}} + Z_{22})}$$

для двох інших випадків матимемо:

$$k_3 = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_2 Z_{1\text{вх}}}{F_1} = \frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_{\text{н}}}$$

$$k_4 = \frac{F_2}{v_1} = \frac{F_2 Z_{1\text{вх}}}{F_1} = -k_1 Z_{\text{н}} Z_{1\text{вх}} = \frac{Z_{\text{н}} Z_{21}}{Z_{22} + Z_{\text{н}}}.$$

Коефіцієнти перетворення k_1, k_2, k_3 та k_4 для розглянутих вище лінійних систем (перетворювачів) є сталими та незалежними від аргументів v_1 та v_2 . Необхідно однак зауважити, що загалом ми завжди маємо справу з нелінійними системами (перетворювачами). Рівняння таких перетворювачів можуть бути записані через повні диференціали відповідних сил:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 10

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial F_1}{\partial v_2} dv_2$$

$$dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial F_2}{\partial v_2} dv_2,$$

Коефіцієнти $Z_{11}^* = \frac{\partial F_1}{\partial v_1} = f_1(v_1, v_2)$, $Z_{12}^* = \frac{\partial F_1}{\partial v_2}$, $Z_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial v_1}$ та $Z_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial v_2}$ є тут функціями аргументів v_1 та v_2 .

Аналіз роботи таких нелінійних систем зводиться до розв'язання складних нелінійних диференціальних рівнянь, що пов'язано зі значними труднощами. Тому дуже часто застосовують лінеаризацію цих рівнянь. Розглядають настільки малі прирости Δv_1 та Δv_2 , що узагальнені власні опори Z_{ik} будуть практично незмінними.

3. Основні статичні характеристики вимірювальних перетворювачів

Статичними називають характеристики вимірювальних перетворювачів, що відповідають статичному режиму їх роботи, при якому перетворювана величина не змінюється в часі, а тривалість перетворення достатня для загасання перехідного процесу у вимірювальному колі перетворювача. Основні статичні характеристики ВП можна поділити на дві групи: перетворювальні характеристики (функція перетворення, коефіцієнт перетворення, чутливість, поріг чутливості) та похибки в статичному режимі.

Перетворювальні характеристики. Зв'язок між вихідною та вхідною величинами описується функцією перетворення.

$$Y = F(X)$$

де Y та X – дійсні значення вихідної та вхідної величин.

Загалом функції перетворення окремих однотипних перетворювачів через наявність індивідуальних похибок перетворення будуть дещо відмінними одна від одної, тобто кожний перетворювач може характеризуватися індивідуальною функцією перетворення. Як узагальнена характеристика ВП даного типу усереднена функція перетворення великої

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 11

групи однотипних перетворювачів у різних режимах їх роботи в певних точках діапазону перетворення в нормальних умовах. Вимірювальному перетворювачу присвоюють або визначену згаданим способом усереднену функцію перетворення, або деяку математичну функцію, яка є найкращим наближенням до усередненої.

Присвоєна ВП функція перетворення називається номінальною функцією перетворення, або градууювальною характеристикою. Вона може бути записана аналітично, подана у вигляді таблиць чи графіка.

Коефіцієнтом перетворення називаються відношення вихідної величини до вхідної

$$k(X) = \frac{Y}{X} = \frac{F(X)}{X}$$

Номінальний коефіцієнт перетворення визначається з номінальної функції перетворення як

$$k_{\text{НОМ}}(X) = \frac{F_{\text{НОМ}}(X)}{X}$$

Відзначимо, що номінальний коефіцієнт перетворення є сталою величиною тільки тоді, коли номінальна функція перетворення є лінійною її графік проходить через початок координат.

Загалом X та Y є величинами різної фізичної природи. Через номінальний коефіцієнт перетворення вихідна величина може бути зведена до входу ВП і одержана зведена функція перетворення

$$x = \frac{Y}{k_{\text{НОМ}}(X)} = \frac{F(X)}{k_{\text{НОМ}}(X)} = f(x).$$

Номінальна зведена функція перетворення

$$f_{\text{НОМ}}(X) = \frac{F_{\text{НОМ}}(X)}{k_{\text{НОМ}}(X)}$$

є лінійною і її графік проходить через початок координат.

Чутливість. Похідна від функції перетворення

$$S = \frac{dY}{dX} = \varphi(X).$$

чи в кінцевих приростах

$$S = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

називається чутливістю ВП.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 12

Використовується також поняття відносної чутливості, під якою розуміють відношення відносної зміни вихідної величини до відносної зміни вхідної величини:

$$S_{\text{відн}} = \frac{\Delta Y / Y}{\Delta X / X}$$

Необхідно відзначати, що зміна вихідної величини ВП може бути зумовлена впливом неінформативного параметра. Тому часто використовують поняття чутливості ВП до відповідного неінформативного параметра

Похибки. Загалом номінальний коефіцієнт перетворення ВП не дорівнює одиниці, як у вимірювальних приладів, тому похибки Вп можуть бути визначені, як за входом, так і за виходом. Оскільки виникнення похибок є наслідок незбігання дійсної функції перетворення

$F(X)$ та номінальної функції перетворення $F_{\text{ном}}(X)$, то абсолютна похибка, зведена до виходу, може бути визначена як (рис 1.1):

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{вих}} &= Y - Y_{\text{ном}} = F(X) - F_{\text{ном}}(X) = |K_{\text{д}}(X) - K_{\text{ном}}(X)|X \\ &= \frac{K_{\text{д}}(X) - K_{\text{ном}}(X)}{K_{\text{д}}(X)} Y \end{aligned}$$

Де $K_{\text{ном}}(X)$ та $K_{\text{д}}(X)$ – номінальний та дійсний коефіцієнти перетворення; $Y_{\text{ном}}$ – номінальне значення вихідної величини, встановлене за номінальною функцією перетворення $F_{\text{ном}}(X)$ для дійсного значення вхідної величини X .

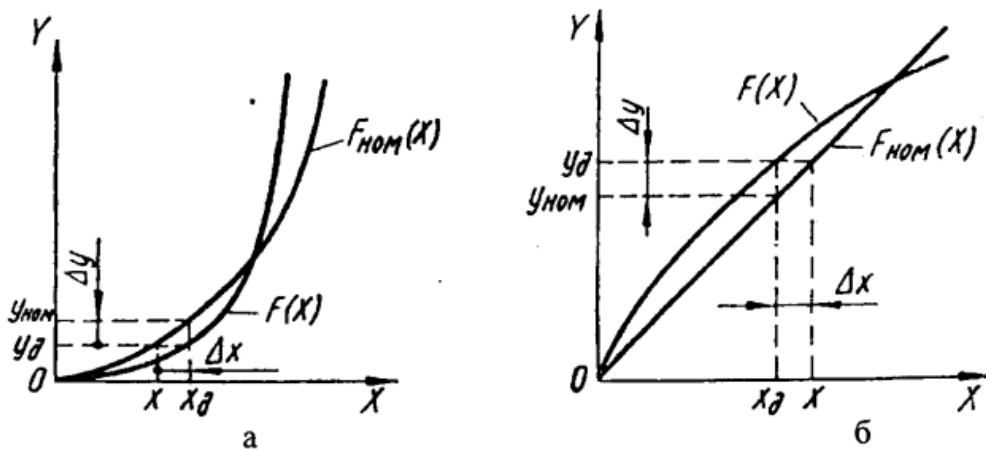


Рис. 2 До визначення зведених до входу похибок ВП.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 13

Абсолютну похибку, зведену до входу, визначають як

$$\Delta_{\text{вх}} = x - X = F^{-1}(Y) - X = \frac{Y}{k_{\text{ном.у}}(X)} - X = \frac{k_{\text{д}}(X)X}{k_{\text{ном.у}}(X)} - X$$

$$= \frac{k_{\text{д}}(X) - k_{\text{ном.у}}(X)}{k_{\text{д}}(X)k_{\text{ном.у}}(X)} Y,$$

Де X – значення вхідної величини, що відповідає дійсному значенню вихідної величини Y , визначеному за номінальною функцією перетворення, $x=F(Y)$ - обернена функція перетворення, $K_{\text{ном.у}}(X)$ – номінальний коефіцієнт перетворення, який відповідає значенню Y за номінальною функцією перетворення.

Із виразів для абсолютних значень похибок, зведених до входу та до виходу, може бути встановлений зв'язок між ними:

$$\Delta_{\text{вх}} = \frac{k_{\text{д}}(X) - k_{\text{ном.у}}(X)}{k_{\text{д}}(X) - k_{\text{ном.у}}(X)} k_{\text{ном.у}}(X) \Delta_{\text{вих}}$$

Відносні похибки ВП, зведені до входу та до виходу, визначаються як

$$\delta_{\text{вх}} = \frac{\Delta_{\text{вх}}}{X} = \frac{k_{\text{д}}(X) - k_{\text{ном.у}}(X)}{k_{\text{ном.у}}(X)} = \frac{k_{\text{д}}(X)}{k_{\text{ном.у}}(X)} - 1,$$

$$\delta_{\text{вих}} = \frac{\Delta_{\text{вих}}}{Y} = \frac{k_{\text{д}}(X) - k_{\text{ном}}(X)}{k_{\text{д}}(X)} = 1 - \frac{k_{\text{ном}}(X)}{k_{\text{д}}(X)}$$

Розділивши праву та ліву частини виразу для $\Delta_{\text{вих}}$ на $Y=K_{\text{д}}(X)X$, одержимо:

$$\delta_{\text{вих}} = \frac{k_{\text{д}}(X) - k_{\text{ном}}(X)}{k_{\text{д}}(X) - k_{\text{ном.у}}(X)} * \frac{k_{\text{ном.у}}(X)}{k_{\text{д}}(X)} \delta_{\text{вх}}$$

Якщо похибки перетворювача малі або його функція перетворення лінійна $k_{\text{ном}}(X) = k_{\text{ном.у}}(X) = k_{\text{ном}}$ і $k_{\text{ном}} = k_{\text{д}} = \text{const}$, тоді

$$\Delta_{\text{вих}} = k_{\text{ном}} \Delta_{\text{вх}}; \delta_{\text{вих}} = \frac{k_{\text{ном}}}{k_{\text{д}}} \delta_{\text{вх}} = \delta_{\text{вх}}$$

Здебільшого з достатньою для практики точністю можна вважати, що відносні значення зведених до входу та виходу похибок є однаковими.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 14

Зведені до нормувального значення похибки ВП визначаються як відношення абсолютної похибки за входом чи за виходом до відповідного нормувального значення

$$\gamma_{вх} = \frac{\Delta_{вх}}{X_N}; \gamma_{вих} = \frac{\Delta_{вих}}{Y_N}$$

Нормувальні значення вхідної та вихідної величин відповідно до Державного стандарту прирівнюються до більшої (за модулем) із границь вимірювань, якщо нульове значення знаходиться всередині діапазону перетворення, або ж до верхньої границі перетворення, якщо діапазон перетворення починається з нуля чи коли нульове значення X (або Y) знаходиться поза діапазоном перетворення. Як і для всіх засобів вимірювань, залежно від умов виникнення похибки ВП поділяються на основні та додаткові.

Основна похибка – це похибка, властива перетворювачу за нормальних умов його використання, тобто в умовах, коли чинники, що впливають (наприклад, температура довкілля), мають нормальні значення або знаходяться в межах нормальної області їх значень. Додаткова похибка – це складова похибки ВП, викликана відхиленням одної з величин, що впливають, від нормального значення або виходом її значення за межі нормальних значень.

Узагальненою характеристикою, що визначає межі допустимої основної та додаткової похибок, є клас точності. Згідно з Державним стандартом межі допустимих значень основної та додаткової похибок ВП для кожного класу точності встановлюються у вигляді абсолютних, відносних та зведених значень за одночленною або двочленною формулою визначення допустимої зони похибок у діапазоні перетворення.

4. Характеристики перетворювачів у динамічному режимі

Динамічним режимом роботи ВП називають режим перетворення змінних у часі величин. Динамічним треба також вважати режим перетворення сталих величин при обмеженому часі відбору вимірювальної інформації, коли час перетворення недостатній для загасання перехідного процесу у вимірювальному колі перетворювача.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 15

ВП в динамічному режимі його роботи трактується як динамічна система, яка перетворює вхідний сигнал $X(t)$ у вихідний $Y(t)$. Основною характеристикою, що описує роботу ВП як лінійної стаціонарної динамічної системи з зосередженими параметрами, є диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n Y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} Y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 Y(t) = \\ = b_m \frac{d^m X(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} X(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 X(t). \end{aligned}$$

або в операторній формі

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0) Y(t) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0) X(t).$$

Диференціальне рівняння є вичерпною характеристикою роботи ВП в динамічному режимі. Необхідно, однак, відзначити, що ця характеристика є надто складною і ненаочною. На практиці користуються звичайно іншими, простішими характеристиками, які можна вважати розв'язками диференціального рівняння ВП для певних типових вхідних сигналів та певних початкових умов. Зокрема, це перехідна функція $h(t)$ як реакція на вхідний сигнал у вигляді одиничної функції $I(t)$ чи імпульсна перехідна функція $q(t)$ як реакція на вхідний сигнал у вигляді δ -функції (рис.3), або ж усталена реакція на синусоїдний вхідний сигнал.

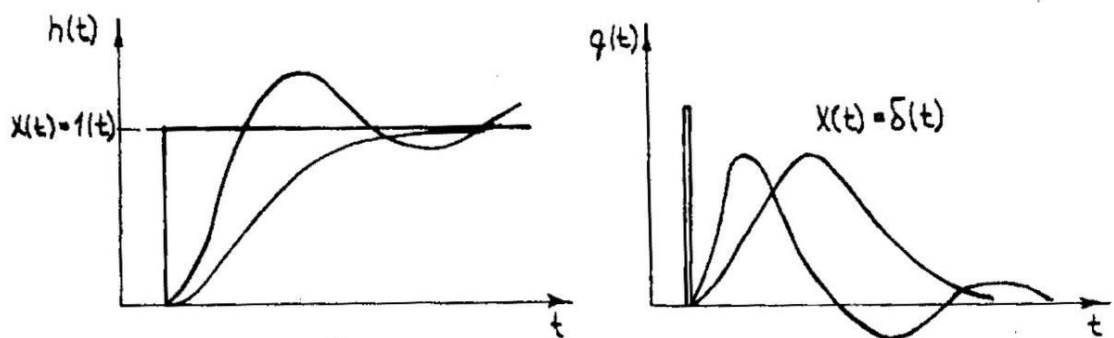


Рис. 3 – Перехідна та імпульсна перехідна функції

Усталена реакція на синусоїдний вхідний сигнал загалом є складною функцією параметрів перетворювача і описується відповідними амплітудно-частотною та фазочастотною характеристиками, які можуть бути одержані з диференціального рівняння в результаті нижчеподаних математичних дій.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 16

Застосувавши до диференціального рівняння ВП за початкових нульових умов перетворення Лапласа, отримаємо передаточну функцію

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0},$$

де s - оператор Лапласа, $Y(s)$ та $X(s)$ - зображення за Лапласом відповідна вихідної та вхідної величин.

Заміна оператора Лапласа в передаточній функції на $j\omega$ дає комплексну частотну характеристику

$$K(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

де $P(\omega)$ та $Q(\omega)$ – її дійсна та уявна частини.

Комплексна частотна характеристика є вихідною для визначення амплітудно-частотної:

$$K(\omega) |K(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

та фазочастотної

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

характеристик.

Залежно від порядку диференціального рівняння, яке описує динаміку ВП (порядку похідної в рівнянні), перетворювачі поділяють на перетворювачі першого, другого чи вищого порядків. Порівняльні характеристики деяких ідеальних та реальних перетворювачів першого порядку наведені в табл.3.1

Одним із ідеальних є пропорційний чи безінерційний перетворювач , що має такі характеристики :

$$a_0 Y(t) = b_0 X(t); K(j\omega) = \frac{b_0}{a_0} = k_0; Y(t) = k_0 X(t); h(t) = k_0 \delta(t);$$

$$q(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k_0 \delta(t).$$

Для безінерційного перетворювача характерна незалежність від частоти с перетворювального сигналу, відсутність фазової похибки в необмеженому частотному діапазоні.

Ідеальний диференціювальний перетворювач описується диференціальним рівнянням :

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 17

$$a_0 Y(t) = b_1 \frac{dX(t)}{dt}$$

Комплексний коефіцієнт перетворення такого перетворювача

$$K(j\omega) = \frac{b_1}{a_0} j\omega = Tj\omega.$$

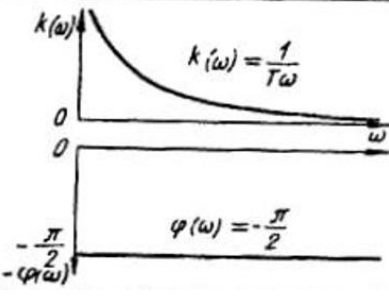
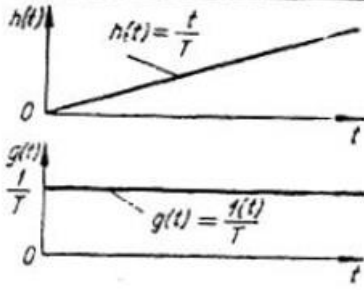
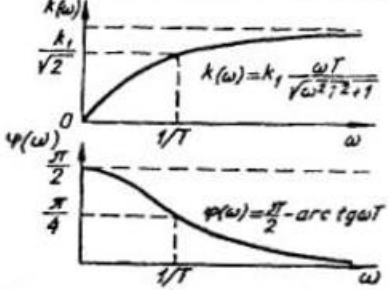
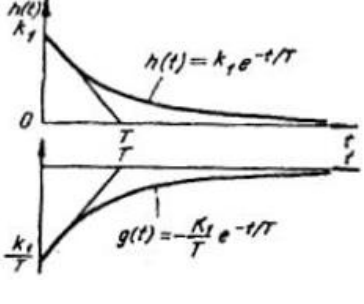
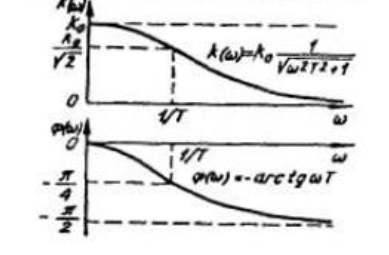
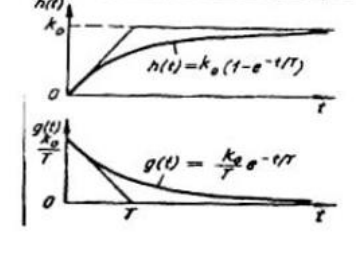
(тут T – стала часу перетворювача). Ідеальний диференціальний перетворювач має АЧХ у вигляді лінійної функції частоти та сталий фазовий зсув $\varphi(\omega) = +\pi/2$, а при ступінчастому вхідному сигналі $I(t)$ його вихідний сигнал буде мати вигляд δ -функції, тобто нескінченно вузький імпульс нескінченно великої амплітуди.

Ідеальний інтегровальний перетворювач, що описується диференціальним рівнянням

$$a_1 \frac{dY(t)}{dt} = b_0 X(t)$$

Динамічні характеристики перетворювачів першого порядку

Вид перетворювача	Частотні характеристики	Часові характеристики
1	2	3
Пропорційний (безінерц.) $a_0 Y(t) = b_0 X(t)$ $W(s) = k_0; k_0 = b_0/a_0$		
Ідеальний диференціальний $a_0 Y(t) = b_1 \frac{dX(t)}{dt}$ $W(s) = T_s; T = b_1/a_0$		

<p>Ідеальний інтегровальний</p> $a_1 \frac{dY(t)}{dt} = b_0 X(t)$ $W(s) = 1/T_s; T = a_1/b_0$		
<p>Реальний диференціальний</p> $a_1 \frac{dY(t)}{dt} + a_0 Y(t) = b_1 \frac{dX(t)}{dt}$ $W(s) = 1/T_s; k_1 \frac{T_s}{T_s+1}$ $k_1 = b_1/a_1; T = a_1/a_0$		
<p>Реальний інтегровальний</p> $a_1 \frac{dY(t)}{dt} + a_0 Y(t) = b_0 X(t)$ $W(s) = k_0 \frac{T_s}{T_s+1}$ $k_0 = b_0/a_0; T = a_1/a_0$		

комплексний коефіцієнт якого

$$K(j\omega) = \frac{b_0}{a_1} \cdot \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{Tj\omega}$$

має АЧХ у вигляді гіперболи, сталий фазовий зсув $\varphi(\omega) = -\pi/2$, і перехідну характеристику у вигляді лінійної функції часу.

Характеристики реальних перетворювачів можуть значно відрізнятись від характеристик відповідних ідеальних ланок. Так, реальний інтегровальний перетворювач описується диференціальним рівнянням

$$a_1 \frac{dY(t)}{dt} + a_0 Y(t) = b_0 X(t).$$

Передаточна функція такого перетворювача матиме вигляд

$$W(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} = k_0 \frac{1}{T_s + 1},$$

а комплексний коефіцієнт перетворення

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 19

$$K(j\omega) = k_0 \frac{1}{Tj\omega + 1}, \text{ де } T = \frac{a_1}{a_0} - \text{ стала часу перетворювача.}$$

АЧХ реального інтегрувального перетворювача значно відрізняється від гіперболи $\frac{1}{\omega}$ (характеристики ідеального інтегратора) при низьких частотах. У деякій вузькій початковій області частот реальний інтегрувальний перетворювач поводить себе як безінерційний і лише при порівняно високих частотах стає інтегрувальним. Перехідні характеристики реального та ідеального інтегрувальних перетворювачів збігаються лише якщо $t \ll T$, а реакція на одиничний стрибок реального інтегрувального перетворювача є експонентою, що прямує до усталеного значення k_0 , на відміну від прямої, яка прямує до безмежності для ідеального інтегрувального перетворювача.

Реальний диференціувальний перетворювач має диференціальне рівняння вигляду

$$a_1 \frac{dY(t)}{dt} + a_0 Y(t) = b_1 \frac{dX(t)}{dt}.$$

$$\text{передаточну функцію } W(s) = \frac{b_1 s}{a_1 s + a_0} = k_1 \frac{T_s}{T_s + 1},$$

а комплексний коефіцієнт перетворення

$$K(j\omega) = k_1 \frac{Tj\omega}{Tj\omega + 1}.$$

З наведених у табл.3.1 динамічних характеристик реального диференціувального перетворювача видно, що в області низьких частот такий перетворювач є диференціувальним з фазовим зсувом $\varphi(\omega) = +\pi/2$, а в області високих частот його характеристики наближаються до характеристик безінерційного перетворювача.

Аперіодичний характер перехідних процесів властивий тепловим і хемічним перетворювачам. В електричних, механічних, акустичних перетворювачах, крім аперіодичного, може відзначатись і коливний характер перехідного процесу. Робота таких перетворювачів описується диференціальними рівняннями другого порядку. Диференціальні рівняння перетворювачів різної фізичної природи є аналогічними рівнянням узагальненого перетворювача. Внаслідок ідентичності диференціальних рівнянь перетворювачів з різною фізичною природою описання

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 20

динамічних властивостей перетворювачів другого порядку може бути здійснене в узагальнених характеристиках, які одержують, розв'язавши диференціальне рівняння другого порядку з узагальненими параметрами, тобто рівняння вигляду

$$a_2 \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dY(t)}{dt} + a_0 Y(t) = b_0 X(t),$$

де a_2, a_1, a_0 та b_0 – коефіцієнти узагальненого перетворювача, значення яких залежать від параметрів перетворювача.

Передаточна функція такого перетворювача буде мати вигляд

$$W(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = k_0 \frac{1}{\frac{a_2}{a_0} s^2 + \frac{a_1}{a_0} s + 1},$$

Якщо ми позначимо ступінь заспокоєння перетворювача

$\beta = a_1 / 2 \sqrt{a_0 a_2}$, а власну частоту його коливань $\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$, то вираз для

комплексного коефіцієнта перетворення набере вигляд

$$K(j\omega) = k_0 \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j2\beta \frac{\omega^2}{\omega_0}}$$

Якщо, крім цього, позначити відносну частоту вхідного сигналу $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$,

то частотна характеристика набере вигляд

$$K(j\eta) = k_0 \frac{1}{1 - \eta^2 + j2\beta\eta} = k_0 \frac{1 - \eta^2 - j2\beta\eta}{(1 - \eta^2)^2 + 4\beta^2 \eta^2} = A(\eta) e^{j\varphi(\eta)},$$

де $A(\eta) = k_0 \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\beta^2 \eta^2}}$ – амплітудно-частотна характеристика;

$\varphi(\eta) = -\arctg \frac{2\beta\eta}{1 - \eta^2}$ – фазочастотна характеристика

перетворювача.

Для сталого в часі вхідного сигналу, тобто при $\omega = 0$, а отже

$\eta = 0$, матимемо $A(\eta)|_{\eta=0} = k_0$.

З врахуванням останнього виразу можна записати амплітудно-частотну характеристику коливного перетворювача у відносних координатах по обидвох осях:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 21

$$M(\eta) = \frac{A(\eta)}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\beta^2\eta^2}}$$

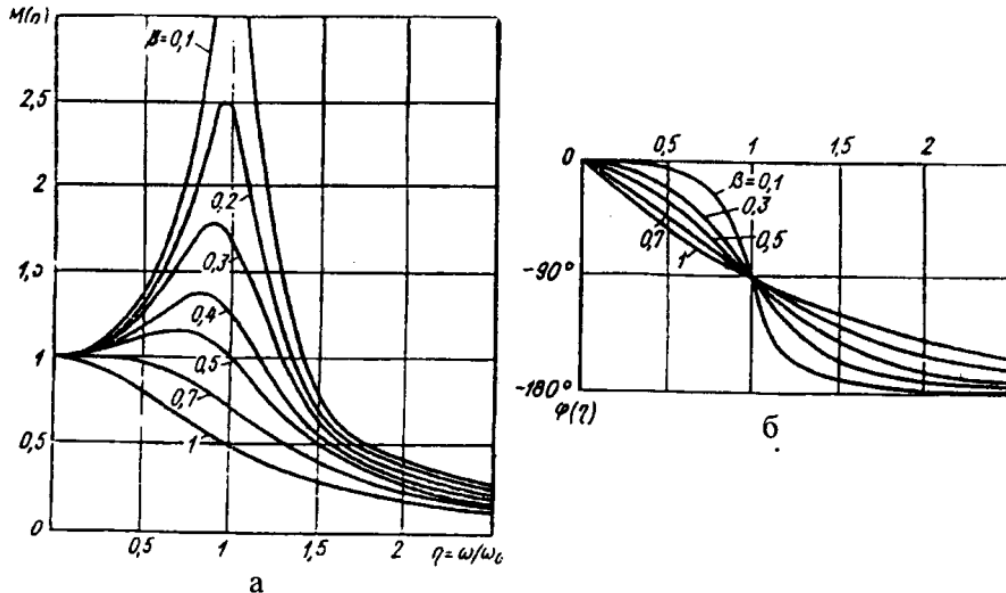


Рис. 4 Частотні характеристики перетворювача другого порядку

У цей вираз, як і у вираз для фазочастотної характеристики, не входить жодне абсолютне значення параметрів перетворювача. Тому ці вирази можуть бути застосовані для описання роботи перетворювача будь-якої фізичної природи з будь-якими значеннями його параметрів, якщо ці параметри виразити у відносних одиницях (рис.4).

Для визначення перехідних характеристик перетворювача другого порядку його передаточна функція з врахуванням наведених вище позначень може бути записана у вигляді

$$W(s) = k_0 \frac{\omega_0^2}{(s + \beta\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \beta^2)}$$

Тоді згідно з теоремою розкладання перехідна функція набере вигляд

$$h(t) = k_0 \left[1 - \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sin \left(\omega_0 t \sqrt{1 - \beta^2} + \arctg \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \right) \right]$$

а імпульсна перехідна функція

$$q(t) = k_0 \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} e^{-\beta\omega_0 t} \sin \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2} t.$$

Залежно від того, яке значення має β , можливі три випадки :

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 22

1) $\beta < 1$ – перехідний процес буде коливним з частотою вільних коливань $\omega_B = \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ та амплітудою, яка загасає за експонентою (рис. 5);

2) $\beta > 1$ - характеризує аперіодичний перехідний процес; перехідна та імпульсна перехідна функції з врахуванням того, що $\sin jx = jshx, a tgjx = jthx$, наберуть вигляд:

$$h(t) = k_0 \left[1 - \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} sh \left(\omega_0 t \sqrt{\beta^2 - 1} + arcth \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta} \right) \right]$$

$$q(t) = k_0 \omega_0 \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} e^{-\beta\omega_0 t} \sin \omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1} t.$$

3) $\beta = 1$ – характеризує критичний режим, що є окремим видом аперіодичного перехідного процесу. Вирази для перехідної та імпульсної перехідної функцій мають вигляд

$$h(t) = k_0 [e^{-\beta\omega_0 t} (1 + \omega_0 t)];$$

$$g(t) = k_0 \omega_0 t e^{-\omega_0 t}.$$

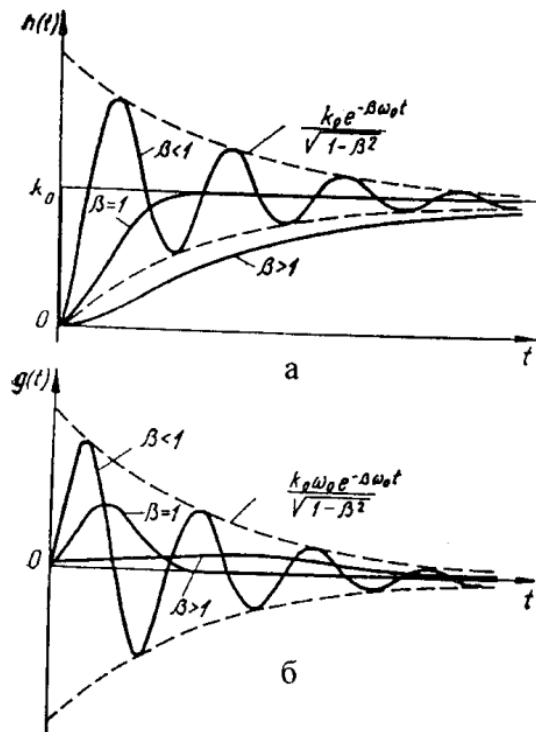


Рис. 5. Часові характеристики перетворювачів другого порядку

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 23

Необхідно відзначити, що найбільше практичне значення має випадок, коли β дещо менший від одиниці ($\beta \approx 0.8$), оскільки тривалість перехідного процесу найменша.

5. Динамічні похибки

Якщо засіб вимірювань працює у динамічному режимі, тобто в режимі змінних у часі величин або ж вимірювання сталих у часі величин при дуже короткому часі вимірювання, недостатньому для закінчення перехідного процесу у вимірювальному колі, виникають так звані динамічні похибки. Останні зумовлені інерційними властивостями засобу вимірювань і тому їх значення залежать від швидкості зміни вимірюваної величини при вимірюванні змінних у часі величин або від часу вимірювання, якщо цей час співмірний з часом перехідного процесу вимірювального кола при дуже малому часі вимірювання сталих величин.

Якщо за аналогією зі статичними похибками розглядати динамічну похибку як наслідок неідентичності дійсної передаточної функції $W_d(s)$ та номінальної $W_{ном}(s)$, то для оцінки динамічної похибки можна використати операторні рівняння ВП. Тоді, зокрема, зображення за Лапласом зведеної до входу динамічної похибки можна записати

$$\Delta x_{дин}(s) = \frac{Y(s)}{W_{ном}(s)} - X(s) = \frac{W_d(s)X(s)}{W_{ном}(s)} - X(s)$$

або

$$\Delta x_{дин}(s) = W_\delta(s)X(s)$$

Де $W_\delta(s) = \left[\frac{W_d(s)}{W_{ном}(s)} - 1 \right]$ – передаточна функція похибка перетворювача.

Зауважимо, що для номінально безінерційного перетворювача передаточна функція похибки набере вигляд

$$W_\delta(s) = \left[\frac{W_d(s)}{k_0} - 1 \right]$$

Де k_0 – коефіцієнт перетворення в статичному режимі.

Якщо вхідна величини $X(t)$ змінюється порівняно повільно, коли динамічні похибки будуть незначними, то, розклавши $W_\delta(s)$ в ряд, динамічну похибку як функцію часу можна записати у вигляді

$$\Delta x_{дин}(t) = a_0 X(t) + a_1 X'(t) + a_2 X''(t) + \dots + a_n X^n(t)$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 24

Найзручнішим методом визначення коефіцієнтів, які є складовими динамічної похибки, є метод Кінга, згідно з яким

$$a_0 = \lim_{s \rightarrow 0} [W_\delta(s)];$$

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [W_\delta(s) - a_0];$$

$$a_n = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [W_\delta(s) - a_0 - a_1(s) - \dots - a_{n-1}(s)^{n-1}];$$

Для синусоїдного вхідного сигналу, коли $X(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$, динамічна похибка також буде синусоїдною функцією часу з амплітудою $X_{max}(\omega)$ та фазовим зсувом $\varphi_\Delta(\omega)$, тобто

$$\Delta x_{дин}(t) = \Delta X_{max}(\omega) \sin[\omega t + \varphi + \varphi_\Delta(\omega)].$$

Амплітуда та фаза комплексної динамічної похибки може бути визначена з її комплексної амплітудно-фазочастотної характеристики $K_\delta(j\omega)$ як

$$\Delta X_{max}(\omega) = |K_\delta(j\omega)| X_{max}; \quad \varphi_\Delta(\omega) = \arg K_\delta(j\omega).$$

Вираз для $\Delta x_{дин}(t)$ є часовою характеристикою миттєвого значення динамічної похибки, визначеної як різниця між існуючими одночасно значеннями вхідного та зведеного до входу вихідного сигналів (рис. 6)

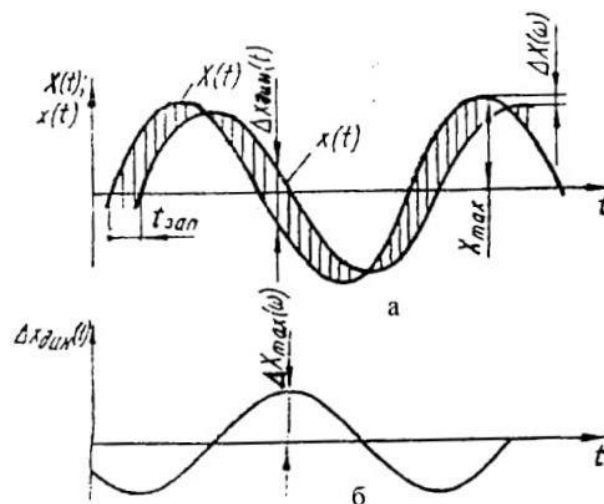


Рис. 6. Визначення динамічних похибок ВП

Здебільшого миттєве значення не враховують і вимірюваним параметром є амплітуда, динамічну похибку визначають як різницю між миттєвим значенням сигналу $X(t)$ та миттєвим значенням суміщеного з ним за фазою зведеного до входу сигналу $x(t)$.

Амплітудна динамічна похибка в останньому випадку може бути визначена як

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 25

$$\Delta X(\omega) = \frac{Y_{max}}{K_{ном}(\omega)} - X_{max} = \left[\frac{K_d(\omega)}{K_{ном}(\omega)} - 1 \right] X_{max},$$

а відносна амплітудна похибка

$$\delta_x(\omega) = \frac{\Delta X(\omega)}{X_{max}} = \frac{K_d(\omega)}{K_{ном}(\omega)} - 1 = \frac{|K_d(j\omega)|}{|K_{ном}(j\omega)|} - 1.$$

Важливими параметрами, що характеризують динамічні властивості ВП, є час перетворення та гранична частота перетворення.

Часом перетворення називають такий час t_n , після закінчення якого динамічна похибка буде дорівнювати допустимому значенню $\Delta x_{дин.доп}$. Відповідно граничною частотою перетворення $\omega_{гр}$ називають таку частоту перетворюваного сигналу, за якої динамічна похибка дорівнюватиме допустимому значенню.

Характеристики динамічних похибок перетворювачів першого порядку наведені в твбл.1.

Зупинимось на динамічних похибок перетворювачів другого порядку. Оскільки передаточна функція такого перетворювача має вигляд

$$W_d(s) = \frac{k_0}{\frac{a_2}{a_0}s^2 + \frac{a_1}{a_0}s + 1} = k_0 \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\frac{\beta}{\omega_0}s + 1},$$

то при його використанні як безінерційного, для якого $K_{ном} = k_0$, передаточна функція відносної динамічної похибки

$$W_\delta(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + 2\frac{\beta}{\omega_0}s + 1} - 1 = -\frac{s^2 + 2\beta\omega_0s}{s^2 + 2\beta\omega_0s + \omega_0^2},$$

а комплексний коефіцієнт динамічної похибки

$$K_\delta(j\omega) = -\frac{-\omega^2 + 2\beta\omega_0j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta\omega_0j\omega}.$$

Для вхідного збурення у вигляді одиничного стрибка зміна в часі динамічної похибки

Якщо $\beta < 1$

$$\Delta X_{дин}(t) = \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\beta^2}} \sin\left(\sqrt{1-\beta^2}\omega_0 t + \arctg\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\right),$$

Якщо $\beta > 1$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/152.00.1/Б/ОК16- 2022
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 26

$$\Delta X_{\text{дин}}(t) = \frac{e^{-\beta \omega_0 t}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_0 t + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta} \right),$$

Якщо $\beta = 1$

$$\Delta X_{\text{дин}}(t) = -e^{\omega_0 t} (1 + \omega_0 t).$$

Враховуючи складність виразу для $\Delta X_{\text{дин}}(t)$ при $\beta < 1$, можна скористатись модулем цього виразу як мірою граничного значення цієї похибки

$$\Delta X_{\text{дин.гр}}(t) = \frac{e^{-\beta \omega_0 t}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Для синусоїдного сигналу

$$\delta_x(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\beta\eta)}} - 1;$$

$$\Delta\varphi(\eta) = -\operatorname{arctg} \frac{2\beta\eta}{1 - \eta^2}.$$

В області низьких частот $\omega \ll \omega_0$ похибки перетворювача другого порядку, що використовується як безінерційний, дорівнюватимуть

$$\delta_x(\eta) = -2\beta\eta;$$

$$\Delta\varphi(\eta) = -\operatorname{arctg} 2\beta\eta.$$

Графіки цих похибок наведені на рис. 7.

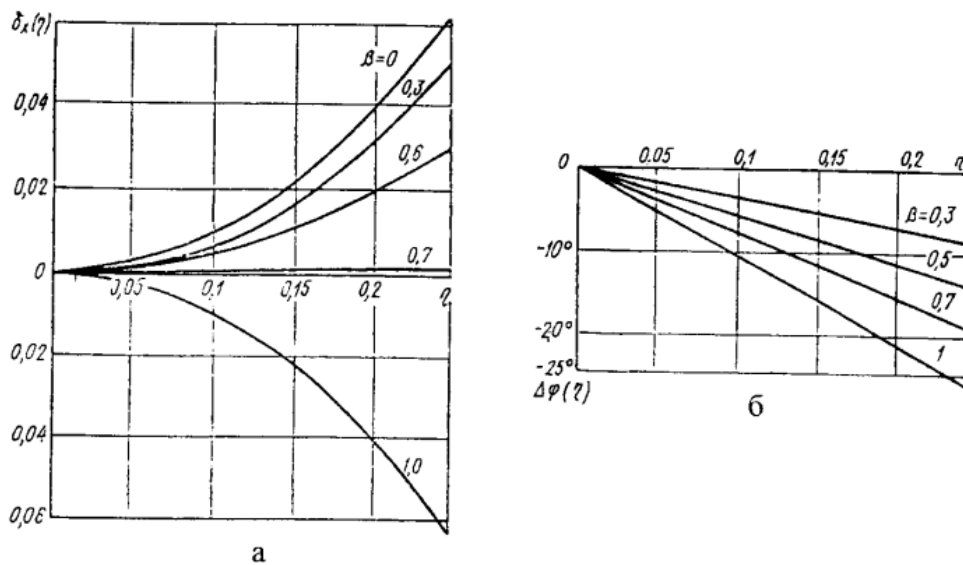
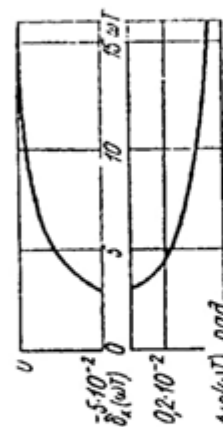
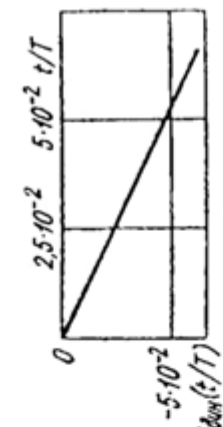
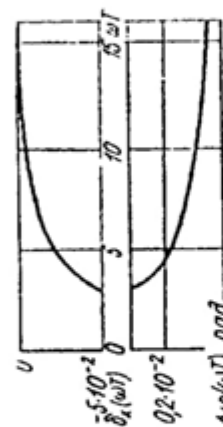
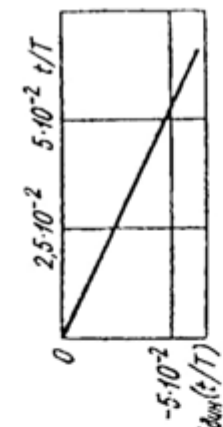


Рис. 7. Динамічні похибки перетворювачів другого порядку

Табл.1. Характеристики динамічних похибок перетворювачів першого порядку

Частотні		Часові (для одиничного вхідного збурення)
Математичний вираз	Графіки	
1	2	3
<p>Реальний диференціальний</p> $W_{\Delta}(s) = \frac{T_s}{1 + T_s s}$ $\delta_x(\omega T) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} - 1$ $\Delta\varphi(\omega T) = -\arctg \omega T$		$\Delta x_{\text{дин}}\left(\frac{t}{T}\right) = e^{-t/T}$
<p>Реальний диференціальний як безінерційний</p> $W_{\Delta}(s) = \frac{1}{1 + T_s s}$ $\delta_x(\omega T) = \frac{\omega T}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} - 1$ $\Delta\varphi(\omega T) = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega T$		$\Delta x_{\text{дин}}\left(\frac{t}{T}\right) = e^{-t/T} - 1$

<p>1</p> <p>Реальний інтегровальний</p> $W_{\Delta}(s) = -\frac{1}{1 + T_s}$ $\delta_x(\omega T) = \frac{\omega T}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} - 1$ $\Delta\varphi(\omega T) = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega T$		<p>2</p> 	<p>3</p> $\Delta x_{\text{дин}}\left(\frac{t}{T}\right) = e^{-t/T} - 1$ 
<p>Реальний інтегровальний як безінерційний</p> $W_{\Delta}(s) = \frac{T_s}{1 + T_s}$ $\delta_x(\omega T) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} - 1$ $\Delta\varphi(\omega T) = -\arctg \omega T$			$\Delta x_{\text{дин}}\left(\frac{t}{T}\right) = e^{-t/T}$ 

Література: Поліщук Є. С. Методи та засоби вимірювань неелектричних величин