

# 3

## Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

---

**Мета:** отримати уявлення про принципи побудови траєкторії непрямолінійного руху тіла.

### 3.1 Коротка історична довідка

Вивчення особливостей такого руху почалося в XVI столітті і було пов'язане з появою і удосконаленням артилерійських гармат.

Уявлення про траєкторію руху артилерійських снарядів на той час були доволі своєрідні (рис. 3.1). Рахувалось, що траєкторія ця складається з трьох частин: А – насильницький рух; В – змішаний рух; С – природний рух, при якому ядро падає на солдат ворога зверху.



Рис. 3.1 – Уявлення про рух артилерійських гармат у XVI ст.

Закони польоту снарядів не привертали особливої уваги вчених доти, доки не були винайдені дальnobійні гармати, які посиляли снаряд через горби, дерева – так, що людина, яка стріляла не бачила їх польоту. Стрільба на дальні відстані з таких гармат на початку використовувалась в основному для демонстрації і залякування ворога, а точність стріляння спочатку не мала ніякого значення.

Близько до правильного рішення питання про політ гарматних ядер дійшов італійський математик Нікколо Тарталья, він розглядає питання траєкторії руху снарядів і стверджує, що ця траєкторія є кривою лінією на протязі всього руху, він показує, що найбільшу дальність польоту снарядів можна досягти під час стрільби під кутом  $45^\circ$  до горизонту та формулює правила стріляння, якими артилеристи керувалися до

середини XVII століття. Проте повне рішення проблеми, пов'язане з рухом тіл, кинутих під кутом до горизонту, здійснив італійський астроном і фізик Галілео Галілей.

Заслугою Галілео Галілея стало те, що він вперше запропонував розглядати рух тіла, кинутого під кутом до горизонту як результат складання двох прямолінійних рухів: рівномірного руху по горизонталі і рівноприскореного – по вертикалі.

З'явилася нова наука – *балістика* – розділ механіки, який вивчає рух тіла під впливом сили тяжіння Землі.

## 3.2 Формули

Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, характеризується (рис. 3.2):

- часом польоту  $t_{\text{п}}$ ;
- дальністю польоту  $L$ ;
- максимальною висотою підняття  $H_{\text{max}}$ .

Нехай тіло кинули зі швидкістю  $v_0$  під кутом  $\alpha$  до горизонту. З'єднаємо початок координат з початковим положенням тіла, спрямуємо вісь  $OY$  вертикально вгору, а вісь  $OX$  – горизонтально. У обраній системі координат:

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 0;$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha; \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha;$$

$$a_x = 0; \quad a_y = -g.$$

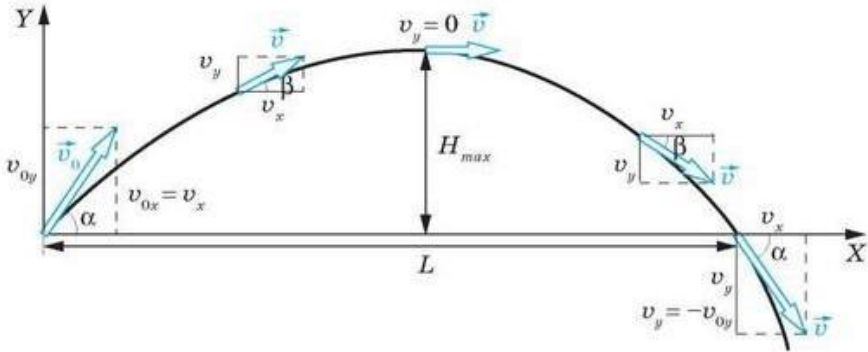


Рис. 3.2 – Схема руху тіла, кинутого під кутом до горизонту

По осі ОХ рух буде рівномірним:

$$x = x_0 + v_{0x}t.$$

По осі ОУ рух буде прискорений:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Якщо ці формули розписати через проєкції векторів, то получится:

$$x = x_0 + v_0 \cos \alpha t; \quad y = y_0 + v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

Щоб скласти рівняння руху у вигляді  $y(x)$ , можна прийняти  $x_0 = y_0 = 0$ , виразити  $t$  через  $x$  і підставити у вираз для  $y$ :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha};$$
$$y = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Таким чином, рівняння траєкторії буде:

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Відповідно, дальність польоту:

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

### **3.3 Моделювання траєкторії непрямолінійного руху**

Ця практична робота буде робитися по схожому шаблону, що і попередні – основний html-файл з canvas та js-файл з кодом, який щось малює на canvas.

Загалом, враховуючи досвід попередніх практичних робіт, можна написати html-файл, який в результаті ц браузері виглядатиме якимось так, як показано на рис. 3.3.

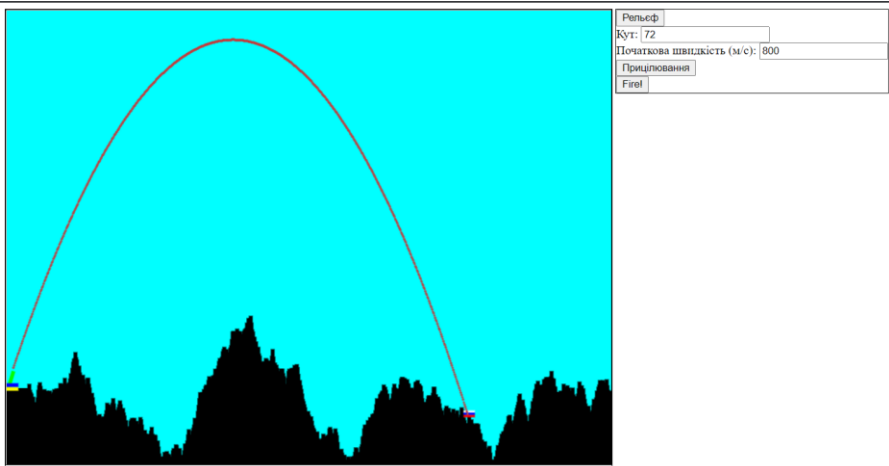


Рис. 3.3 – Приблизний вигляд canvas для цієї практичної роботи

Кнопка «Рельєф» імітує рельєф місцевості – це масив з випадкових чисел, відмальований лініями на кшталт того, як малювався графік закону розподілу в практичній роботі 0.

Кнопка «Прицілювання» очищає canvas та виставляє кут віртуальної гармати (початкова швидкість приблизно 800 м/с – це цілком реалістичне число для артилерії калібру до 155 мм). Кнопка «Fire!» вимальовує траєкторію польоту снаряду.

Код:

```
let canvas = document.getElementById('Arta');  
let ctx = canvas.getContext('2d');  
  
const X = canvas.width;
```

```

const Y = canvas.height;
const min = -10;
const max = 10;

let relief = [];

const gunLength = 25;
const g = 9.81;

let enemyX;

//=====

function makeRelief() {
  let i;
  for (i=0; i<X; i++) {
    if (i<30) {relief[i] = 100; }
    else { relief[i] = relief[i-1] +
              getIntRandomInRange(min, max); }
    if (relief[i] < 0) { relief[i] = 10; }
  }
  enemyX = getIntRandomInRange(200, X-10);
}

//=====

function drawRelief() {
  ctx.fillStyle = "#00FFFF";
  ctx.fillRect(0,0, X, Y);
  ctx.strokeStyle = "#000000";

  let x0 = 0;
  let y0 = Y;

```

```

let i;

for (i=0; i<X; i++) {
    ctx.beginPath();
    ctx.moveTo(x0+i, y0);
    ctx.lineTo(x0+i, y0-relief[i]);
    ctx.closePath();
    ctx.stroke();
}

ctx.lineWidth = 3;
ctx.strokeStyle = "white";
ctx.beginPath();
ctx.moveTo(enemyX-7, Y-relief[enemyX]-6);
ctx.lineTo(enemyX+7, Y-relief[enemyX]-6);
ctx.closePath();
ctx.stroke();
ctx.strokeStyle = "blue";
ctx.beginPath();
ctx.moveTo(enemyX-7, Y-relief[enemyX]-3);
ctx.lineTo(enemyX+7, Y-relief[enemyX]-3);
ctx.closePath();
ctx.stroke();
ctx.strokeStyle = "red";
ctx.beginPath();
ctx.moveTo(enemyX-7, Y-relief[enemyX]);
ctx.lineTo(enemyX+7, Y-relief[enemyX]);
ctx.closePath();
ctx.stroke();
}

//=====

```



```

function aiming() {
    drawRelief();

    let angle =
Number(document.getElementById("Angle").value) * Math.PI /
180;
    let x0 = 2 + Math.floor(gunLength*Math.cos(angle));
    let y0 = Y-100-Math.floor(gunLength*Math.sin(angle));

    ctx.strokeStyle = "#00FF00";
    ctx.lineWidth = 5;

    ctx.beginPath();
    ctx.moveTo(2, Y-100);
    ctx.lineTo(x0, y0);
    ctx.closePath();
    ctx.stroke();
    ctx.strokeStyle = "#FFFF00";
    ctx.beginPath();
    ctx.moveTo(0, Y-100);
    ctx.lineTo(15, Y-100);
    ctx.closePath();
    ctx.stroke();
    ctx.strokeStyle = "#0000FF";
    ctx.beginPath();
    ctx.moveTo(0, Y-105);
    ctx.lineTo(15, Y-105);
    ctx.closePath();
    ctx.stroke();
}

//=====

```

```

function fire() {
    aiming();

    const R = 1;
    const k = 8;
    let angle =
Number(document.getElementById("Angle").value) * Math.PI /
180;
    let v0 =
Number(document.getElementById("Velocity").value) / k;
    const X0 = 2 + Math.floor(gunLength*Math.cos(angle));
    const Y0 = Y-100;
    let t = 0;
    let x = X0;
    let y = Y0;

    ctx.strokeStyle = "#FF0000";
    ctx.lineWidth = 1;

    while (true) {
        x = Math.floor(X0 + v0*Math.cos(angle)*t);
        y = Math.floor(Y0 - x*Math.tan(angle) +
            (g*x*x)/(2*v0*v0*Math.cos(angle)*Math.cos(angle)));
        if ((x>0)&&(x<X)&&(y <= Y - relief[x])) {
            ctx.beginPath();
            ctx.arc(x, y, R, 0, 2*Math.PI);
            ctx.closePath();
            ctx.fill();
            ctx.stroke();
        }
        t+=0.02;

        if ((x>=enemyX-10)&&(x<=enemyX+10)&&(y>=Y-

```

```

relief[enemyX]-5)&&(y<=Y-relief[enemyX]+5)) {
    alert("СЛАВА УКРАЇНІ !!! \n \n тут повинен лунати
приспів з пісні «Арта» файного гурту «Пирятин»...");
    break;
}

if ((x<0)|| (x>X)|| (y>Y)) {break;}
}
}

//=====

function getRandom(min, max) {
    return Math.random() * (max - min) + min;
}

function getIntRandomInRange(min, max) {
    return Math.floor(Math.random() * (max - min + 1) +
min);
}

```

А тепер увага, завдання: ви повинні розрахувати відстань до умовного ворога та розрахувати кут, під яким потрібно наводити артилерію, щоб гарантовано його вразити. Цей функціонал можна винести у ту функцію, яка викликається коли натискають кнопку «Прицілювання» в кут або одразу підставляти у відповідне поле, або просто виводити у вигляді числа, щоб його можна було вписати у відповідне поле. Для

цього можна використати місце під формою праворуч від canvas.

### 3.4 Зміст звіту

Звіт з цієї практичної роботи повинен включати наступне:

- 0) Титульна сторінка.
- 1) Назва і мета практичної роботи.
- 2) Формули для обчислення кута, під яким треба кидати тіло для того, щоб вцілити на задану відстаню при заданій початковій швидкості.
- 3) Лістинг остаточного файлу `arta.js`.
- 4) 2-3 скріншоти з траєкторіями руху – демонстрація того, що все працює.
- 5) Висновки. Чи потрібно було вводити поправку на висоту цілі (тобто коли висота точки цілі та початкової точки руху снаряду не однакові)?

Звіт з практики зберегти у форматі pdf і надіслати на пошту [krt\\_kro@ztu.edu.ua](mailto:krt_kro@ztu.edu.ua).