

1

Броунівський рух однієї частинки на площині

Мета: отримати уявлення про броунівський рух та дифузю.

1.1 Броунівський рух

Броунівський рух – невпорядкований, хаотичний рух частинки під дією нерівномірних ударів молекул речовини з різних боків у розчинах. Названий на честь ботаніка Роберта Броуна, який спостерігав це явище під мікроскопом у 1827 р. Теорію броунівського руху сформулював у 1905 р. Альберт Ейнштейн.

Відкриття й пояснення броунівського руху мало велике значення для фізики, оскільки було свідченням теплового руху молекул. Р. Броун відкрив цей хаотичний рух випадково, спостерігаючи за спорами

плауна у воді. Рух завислих частинок відбувався внаслідок руху молекул. Молекули рідини зіштовхуються з завислими у ній частинками, отже й передають їм імпульс. Таким же чином рухаються частинки фарби у воді, пилинки в променях світла (хоча на рух пилинок також впливають і мікропотоки в повітрі) тощо.

Це явище можна спостерігати, помістивши на предметне скло мікроскопа зі збільшенням в 500...600 разів краплю дуже розведеної у воді або молоці туші. Рідина, яка здавалася суцільною і однорідною, в полі зору мікроскопа виглядатиме зовсім інакше — чорні неправильної форми шматочки різних розмірів плавають у безбарвній рідині. Зрозуміло, що це не молекули, а шматочки сажі, що рухаються хаотично, переміщуючись то в один, то в інший бік. Якщо положення будь-якої частинки фіксувати послідовно через рівні інтервали часу (наприклад, через кожні 30 с), то одержимо «заплутану» ламану, яка характеризує траєкторію, котра насправді значно складніша.

У броунівському русі вражає одна незвична для нас особливість – рух частинок не припиняється за будь-яких обставин, хоча під час дослідження його причин вживалися запобіжні заходи, які виключали можливість

зовнішніх впливів на броунівські частинки. Характер їх руху не змінювався. Отже, причину руху броунівських частинок слід шукати в самій рідині.

Досліди свідчать, що інтенсивність броунівського руху тим більша, чим вища температура рідини, що ще раз підтверджує безпосередній зв'язок броунівського руху з тепловим рухом молекул. Перша кількісна теорія броунівського руху з'явилася у 1905. Її автором був Альберт Ейнштейн. Він записав рівняння, яке враховувало хаотичність сили, що діє на броунівську частинку, і, розв'язавши його, отримав співвідношення

$$\langle x^2 \rangle = \frac{kT}{2\eta\pi r} t,$$

де $\langle x^2 \rangle$ – середнє значення квадрата зміщення броунівської частинки вздовж осі x за час t , T – абсолютна температура рідини, r – радіус частинки, η – динамічна в'язкість а k – стала Больцмана.

Теорію Ейнштейна експериментально підтвердив французький фізик Жан Батист Перрен. У період з 1908 по 1913 роки він досліджував броунівський рух і седиментацію (осадження) частинок у дисперсних системах, а у 1913 році опублікував результати своїх спостережень.

Молекули рідини при скінченій температурі перебувають у безперервному русі, який отримав назву теплового руху. Стороннє тіло в рідині зазнає поштовхів від молекул. Згідно із законом рівнорозподілу, середня кінетична енергія будь-якої частинки, що перебуває у такому стані, дорівнює кінетичній енергії молекул рідини

$$\langle E_K \rangle = \frac{3}{2} kT$$

(без врахування кінетичної енергії, що припадає на обертальний рух). При цьому рух буде абсолютно хаотичним – в середньому частинка діаметром 0,1 мкм зазнає удару молекули, а отже, змінює швидкість 300 мільйонів раз на секунду. При цьому, якщо частинка рухається, то кількість ударів об її передню частину є більшою, ніж об задню. Через це, рух частинки не залежить від природи речовини, з якої вона складається, а тільки від її розмірів – легкі частинки мають більші швидкості (що впливає з однаковості їх кінетичних енергій), проте і швидше гальмуються, важчі частинки – навпаки. Середня пройдена відстань при цьому виявляється однаковою.

Чим більша частинка, тим менша частка випадкових ударів молекул, порівняно з опором рідини, тому

броунівський рух є помітним лише для маленьких частинок: переміщення частинок радіусом в десятки мікронів і більше є малими порівняно з їхніми розмірами, тому сприймаються як дрижання, або навіть є зовсім непомітними.

У математиці броунівський рух розглядається як один із прикладів Вінерівських процесів. Вінерівський процес в теорії випадкових процесів – це стохастичний процес з неперервним часом, що математично виражає випадкові блукання. Названий на честь Норберта Вінера – американського математика, творця основ кібернетики, пов'язаних із теорією інформації та теорією керування. Випадковий процес називається вінерівським, якщо:

- 1) Починається в нулі;
- 2) Він має незалежні прирости, тобто величина кожного наступного зміщення (стрибка) ніяк не залежить від попереднього;
- 3) Всі прирости є стаціонарними, тобто всі мають *однаковий* закон розподілу (як правило – нормальний).

Вінерівський процес часто зустрічається в чистій та прикладній математиці, економіці та фінансовій математиці, фізиці.

1.2 Моделювання траєкторії броунівського руху

Для цієї практичної роботи ми будемо використовувати наробітки з попередньої практичної роботи – про рандомізовані алгоритми.

У папці з робочими файлами повинні бути ті ж самі файли `index.html`, `styles.css` та `whowroteit.js`. Проте ми їх дещо модифікуємо. Також у папці проекту буде ще два `js`-файли, але про них трохи згодом.

Загалом ми використаємо ту ж саму заготовку в `index.html`:

```
<!DOCTYPE html>
<html>
  <head>
    <meta charset="utf-8">
    <link rel="stylesheet"
          href="styles.css"
          type="text/css">
    <title> </title>
  </head>
  <body>
    <header>
      <script type="text/javascript"
              src="whowroteit.js">
      </script>
    </header>
```

```
<div class="container">
  <canvas id="BrownMove"
    width="800" height="600">
    <script type="text/javascript"
      src="brownmove_trace.js">
    </script>
  </canvas>
</div>
</body>
</html>
```

Зверніть увагу, що тег <title> у даному випадку пустий. Тепер ми його заповнимо в `whowroteit.js`:

```
whowroteIt(%lessonNumber%, %lessonTheme%,
           %studentName%, %studetnGroup%)
//=====

function whowroteIt(lessonNumber, lessonTheme,
                    studentName, studetnGroup) {
  document.title="Practice " + String(lessonNumber);
  document.write("Практичне заняття " +
                String(lessonNumber));
  document.write("<h2>" + lessonTheme + "</h2>");
  document.write("<p>" + studentName + "</p>");
  document.write("<p>" + studetnGroup + "</p>");
}
```

Тут ми прописуємо вміст тегу `<title>` (за допомогою властивості `document.title`), а також використовуємо *явне* перетворення типів (функція `String()`).

Щодо стилів, то загалом наш `styles.css` залишиться практично без змін:

```
header {
  border: 1px solid black;
}

.container {
  display: grid;
  border: 1px solid black;
}

#BrownMove {
  display: inline-grid;
  border: 1px solid black;
}
```

Як видно з файлу `index.html`, основна візуалізація має відбуватися на `canvas`, що має `id BrownMove`, і код для цієї візуалізації міститься у файлі `brownmove_trace.js`.

У цьому файлі ми будемо використовувати одну з функцій для генерації випадкового цілого числа з

рівномірним розподілом у інтервалі (щоправда, не для моделювання траєкторії броунівського руху, а для порівняння із моделлю броунівського руху із нормальним законом розподілу) –

```
getIntRandomInRange(min, max):
```

```
function getIntRandomInRange(min, max) {  
    return Math.floor(Math.random()*(max-min+1)+min);  
}
```

Також нам знадобиться функція для отримання випадкового цілого числа, що має [квазі]-нормальний закон розподілу:

```
function getIntRandomQNormal(min, max) {  
    return (getIntRandomInRange(min, max) +  
        getIntRandomInRange(min, max) +  
        getIntRandomInRange(min, max) +  
        getIntRandomInRange(min, max))/4;  
}
```

Для візуалізації траєкторії броунівського руху достатньо на canvas домальовувати нове положення частинки, не стираючи при цьому старого. Нове положення частинки відрізняється від старого на випадкову величину (точніше – на дві випадкові величини, все-таки частинка рухається у нас по цілочисельним координатам – по x та по y), що має

нормальний закон розподілу. У попередній роботі ми перевіряли, чи доступний взагалі canvas, але у сучасних браузерах зробити його недоступним – це треба дуже спеціально постаратися – і тому, враховуючи те, що для отримання траєкторії потрібно виконати не менше тисячі рухів – ми не будемо штучно уповільнювати виконання скрипту непотрібними перевітками і вважаємо, що canvas у нас є. Далі наводяться лістинг скрипту та приклади його роботи:

```
let canvas = document.getElementById('BrownMove');
let ctx = canvas.getContext('2d');

const X = canvas.width;
const Y = canvas.height;
const x0 = X/2;
const y0 = Y/2;
const R = 15;
const minStep = -20;
const maxStep = 20;

ctx.fillStyle = «#00FF00»;

let dx = 0, dy = 0;
let x = x0, y = y0;

let i = 0;
do {
```

```
ctx.beginPath();
ctx.arc(x, y, R, 0, 2*Math.PI);
ctx.closePath();
ctx.fill();
ctx.stroke();

//dx = getIntRandomInRange(minStep, maxStep);
//dy = getIntRandomInRange(minStep, maxStep);
dx = getIntRandomQNormal(minStep, maxStep);
dy = getIntRandomQNormal(minStep, maxStep);

x = x + dx;
y = y + dy;
i++;
} while (i<1000);
```

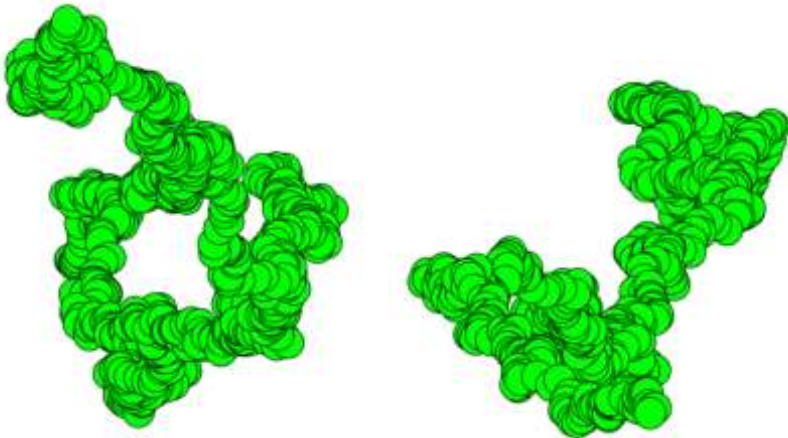


Рис. 1.1 – Приблизні траєкторії броунівського руху частинки

Детальніше з функціями малювання на canvas можна ознайомитися тут:

https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Canvas_API/Tutorial/Drawing_shapes

У скрипті для порівняння закоментарені рядки, в яких зміщення положення частинки dx та dy отримують випадкові значення, але з рівномірним законом розподілу. Спробуйте скористатися ними, замість нормального закону – і порівняйте результат.

В цьому прикладі ніяк не контролюється можливість виходу частинки за межі canvas – спробуйте самі придумати, як це зробити.

1.3 Анімація броунівського руху

Траєкторії броунівських рухів бувають химерні і заплутані, але по статичній картинці важко сказати, як вони утворилися. Набагато інформатившою може бути анімація моделі.

Загальна ідея анімації на canvas засобами JavaScript полягає у тому, що

- 1) спочатку малюється об'єкт на певному фоні;

- 2) координати вимальовування рухомого об'єкта дещо змінюються (за якимось правилом);
- 3) зображення об'єкта у попередній позиції стирається;
- 4) малюється об'єкт у нових координатах;
- 5) далі все повторюється.

Якщо все це робиться із частотою понад 16...24 разів на секунду – складається враження неперервного руху.

Детальна інструкція з анімації на canvas засобами JavaScript: https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Canvas_API/Tutorial/Basic_animations та https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Canvas_API/Tutorial/Advanced_animations

На основі даних рекомендацій можна зробити інший файл (`brownmove.js`), підключити його замість `brownmove_trace.js` у `index.html`. У цей файл потрібно буде прописати функцію для отримання випадкового числа із нормальним законом розподілу. Все інше у файлі буде таким:

```
let canvas = document.getElementById('BrownMove');  
let ctx = canvas.getContext('2d');
```

```
const X = canvas.width;
const Y = canvas.height;
const x0 = X/2;
const y0 = Y/2;
const R = 15;
const minStep = -20;
const maxStep = 20

ctx.fillStyle = "#00FF00";

let raf;

let particle = {
  x: x0,
  y: y0,
  dx: 0,
  dy: 0,
  radius: R,
  draw: function() {
    ctx.beginPath();
    ctx.arc(this.x,this.y, this.radius, 0, Math.PI*2);
    ctx.closePath();
    ctx.fill();
    ctx.stroke();
  }
};

function draw() {
  ctx.clearRect(0, 0, X, Y);
  particle.draw();
}
```

```
particle.x += getIntRandomQNormal(minStep, maxStep);
particle.y += getIntRandomQNormal(minStep, maxStep);

raf = window.requestAnimationFrame(draw);
}

canvas.addEventListener('mouseover',
  function(){raf=window.requestAnimationFrame(draw);}
);
canvas.addEventListener('mouseout',
  function(){window.cancelAnimationFrame(raf);}
);

particle.draw();
```

Зверніть увагу, що `particle` – це одночасно і клас і об’єкт. Таким чином, `x`, `y`, `dx`, `dy`, `radius` – це його властивості (поля, змінні), а `draw()` – метод (функція). У подіях-слухачах (*eventListener*) відбувається виклик функцій без назв (так званих анонімних функцій). Анімація у цьому скрипті відбувається тоді, коли користувач наводить вказівник миші на `canvas` і припиняється, коли вказівник миші покидає `canvas`. Скрипт рекурсивно викликає функцію `particle.draw()`, але кожен раз із новими координатами.

1.4 Зміст звіту

Звіт з цієї практичної роботи повинен включати наступне:

- 0) Титульна сторінка.
- 1) Назва і мета практичної роботи.
- 2) Лістинг остаточного варіанту файлу `index.html` із заповненими тегами `<header>`, `<div>` та `<canvas>`, а також тегами `<script>` із включеннями файлів `whowroteit.js` та `brownmove_trace.js` або `brownmove.js`.
- 3) Лістинг остаточного варіанту файлу `styles.css`.
- 4) Лістинг модифікованого файлу `whowroteit.js`.
- 5) Лістинг файлу `brownmove_trace.js`, та кілька скріншотів вікна браузера із різними траєкторіями броунівських рухів.
- 6) Лістинг файлу `brownmove.js`, який робить анімацію броунівського руху, але з якимось змінами відносно наведеного прикладу. Наприклад, можна змінити радіус частинки, її колір та швидкість, а найкраще – додати контроль границь, щоб частинка ніколи ні за яких обставин не могла вийти за межі `canvas`, але й не «телепортувалася» назад у центр, якщо доходить до краю...

- 7) Висновки. Чим обумовлений броунівський рух? Чому при броунівському русі зміщення частинок мають саме нормальний, а не рівномірний закон розподілу? Що зміниться, якщо в моделі броунівського руху використати помилково або навмисно рівномірний закон розподілу, а не нормальний?

Звіт з практики зберегти у форматі pdf і надіслати на пошту krt_kro@ztu.edu.ua.

1.5 Контрольні запитання

- 1) Що таке броунівський рух?
- 2) Чим обумовлений броунівський рух?
- 3) До якого класу випадкових процесів відноситься математична модель броунівського руху?
- 4) Що таке дифузія?
- 5) Як процес дифузії пов'язаний із броунівським рухом?
- 6) Чому при броунівському русі зміщення частинки має нормальний, а не рівномірний розподіл?
- 7) Що зміниться, якщо в моделі броунівського руху використати помилково або навмисно рівномірний закон розподілу, а не нормальний?

- 8) Які переміщення частинок при броунівському русі називаються малими? Великими?
- 9) Від чого залежить швидкість малих переміщень частинки при броунівському русі?
- 10) Від чого залежить швидкість великих переміщень частинки при броунівському русі?
- 11) Як можна експериментально спостерігати броунівський рух?
- 12) Якого порядку величини реальні швидкості при броунівському русі?