Практичне заняття 2

Розв'язування задач ЛП симплексним методом

Мета заняття: ознайомитись із змістом та особливостями розв'язування задач ЛП та засвоїти теоретичний матеріал шляхом розв'язування задачі про ранець за варіантом індивідуального завдання.

2.1. Короткі теоретичні відомості

2.1.1. Загальна постановка та формалізований опис задач ЛП

Зміст цього п.п. наведений в 1.1.1.

2.2. Стислий зміст симплекс-методу розв'зування задач ЛП

Одним із спеціалізованих методів, що націлений на розв'язування задач ЛП, **є симплексний метод**, або, як його іще називають, **метод послідовного покращення плану**. . Цей метод дозволяє переходити від одного допустимого базисного рішення до іншого, причому так, що значення цільової функції безперервно зростають. В результаті оптимальне рішення знаходять за кінцеве число кроків.

Базисним рішенням системи m лінійних рівнянь з n змінними ($m < n$) називається всяке її рішення, в якому всі неосновні змінні мають нульові значення.

Основними змінними називаються будь-які m змінних системи m лінійних рівнянь з n змінними ($m < n$), якщо визначник матриці коефіцієнтів при них відмінний від нуля.

Неосновними (або вільними) **змінними** називаються всі інші mn-их змінних.

Процес застосування симплексного методу передбачає реалізацію трьох його основних елементів:

1) спосіб визначення будь-якого початкового допустимого базисного розв'язку задачі;
2) правило переходу до кращого розв'язку;
3) критерій перевірки оптимальності знайденого рішення.

Симплексний метод включає в себе ряд етапів і може бути сформульований у вигляді чіткого алгоритму, що дозволяє успішно його програмувати та автоматизовано реалізовувати.

Узагальнена блок-схема алгоритму симплекс-методу, що ілюструє його роботу, приведена на рис. 2.1.

Його *реалізація* передбачає виконання наступних *8 кроків*.

1. Формування цільової функції та системи обмежень. Наприклад, для задачі знаходження максимуму її формалізована постановка буде наступною:

$$F(x) = (\sum_{i=1}^{n} c_i x_i) \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ \ldots,\ \ x_n \geq 0.$$

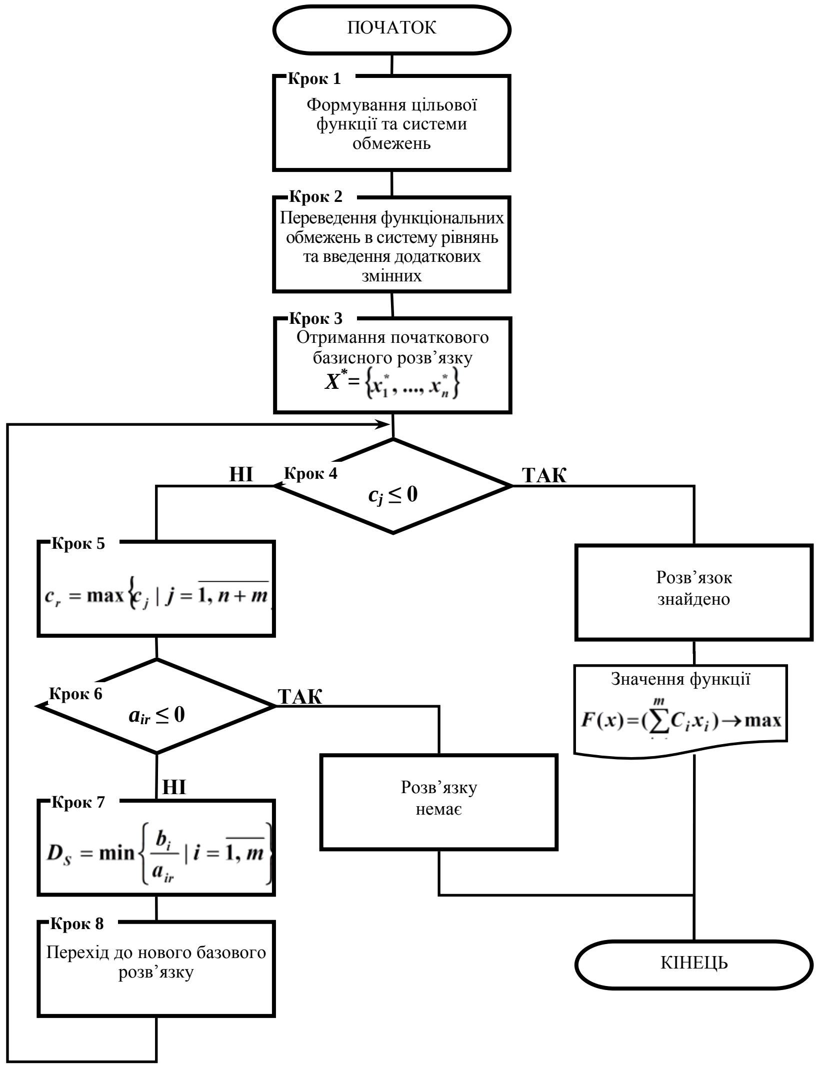

Рис. 2.1. Узагальнена блок-схема алгоритму симплекс-методу

2. Приведення задачі до канонічної форми (переведення функціональних обмежень в систему рівнянь) шляхом введення додаткових змінних

$$y_1 = x_{n+1}, y_2 = x_{n+2}, \ldots, y_m = x_{n+m},$$

де n – кількість змінних в задачі;
m – кількість рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2; \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m. \end{cases}$$

Всі *додаткові змінні* повинні відповідати наступним *умовам*:

1) невід'ємності своїх значень, тобто

$$y_1 = x_{n+1} \geq 0;\ y_2 = x_{n+2} \geq 0;\ \ldots;\ y_m = x_{n+m} \geq 0;$$

2) відповідності свого знаку і знаку вільних членів функціональних обмежень.

3. Отримання початкового базисного розв'язку $X^{*}=\{x_1^*,...,x_n^*\}$ шляхом побудови вихідної базисної симплекс-таблиці (табл. 2.1), в лівому стовпчику якої записуються основні (базисні) змінні, в першому рядку таблиці перераховуються всі змінні задачі.

Крайній правий стовпець містить вільні члени системи обмежень b_1, b_2, ..., b_m.

В останньому рядку таблиці, що називається *оціночним*, записуються коефіцієнти цільової функції $F(x)$, а також значення цільової функції (зі зворотним знаком) при **поточному базисному рішенні** ($L= -F(x)$).

У робочу область таблиці (починаючи з другого стовпця x_1 і другого рядка x_{n+1}) занесені коефіцієнти a_{ij} при змінних системи обмежень.

Таблиця 2.1

Загальний вигляд вихідної базисної симплекс-таблиці

Базис	**Змінні**							**b**
	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+m}	
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	...	0	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	1	b_m
c_j	c_1	c_2	...	c_n	0	0	0	L

4. Перевірка умови $c_j \leq 0$, тобто наявності в останньому рядку симплекс-таблиці (табл. 2.1) від'ємних елементів. У випадку виконання вказаної умови, тобто наявності від'ємних елементів, задача вважається розв'язаною. В іншому випадку, тобто при $c_j > 0$, продовжують розв'язувати задачу, виконуючи наступні кроки алгоритму за рис. 2.1.
5. Визначення так званого *дозволяючого* стовпчика, яким є стовпчик із найбільшим додатнім елементом c_j:

$$c_r = \max\{c_j \mid j = \overline{1, n+m}\},$$

де r – номер дозволяючого стовпчика.

6. Перевірка наявності від'ємних елементів у дозволяючому стовпчику. При виконанні умови $a_{ir} \leq 0$ задача не має розв'язків. В іншому випадку, тобто при $a_{ir} > 0$, продовжують розв'язувати задачу, виконуючи наступні кроки алгоритму за рис. 2.1.
7. Виведення із базисного розв'язку змінної x_j, що відповідає наступній умові:

$$D_S = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ir}} \mid i = \overline{1, m}\right\},\ \text{для}\ a_{ir} > 0,$$

де D_S – частка від ділення $\frac{b_i}{a_{ir}}$;

S – номер дозволяючого рядка. Дозволяючим рядком є рядок, для якого $\frac{b_i}{a_{ir}} = \min$;

b_i – елемент останнього рядка симплекс-таблиці;

a_{ir} – елементи дозволяючого стовпчика симплекс-таблиці.

Тобто змінна x_j виводиться із рядка, для якого результат ділення $\frac{b_i}{a_{ir}}$ є найменшим.

Елемент, що знаходиться на перетині дозволяючого стовпчика та дозволяючого рядка, називають **дозволяючим елементом**.

Наприклад, в табл. 2.1 дозволяючий стовпчик та дозволяючий рядок виділені темним кольором, дозволяючим елементом при цьому є a_{22}.

Таблиця 2.1

Вихідна симплекс-таблиця із виділеними дозволяючим рядком та дозволяючим стовпчиком

Базис	**Змінні**							**b_i**
	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	…	0	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	1	b_m
c_j	c_1	c_2	…	c_n	0	0	0	L

8. *Перехід до нового базисного розв'язку*, що полягає у перерахунку елементів симплекс-таблиці:

1) **елементів дозволяючого рядка** за формулами:

$$a'_{sj} = \frac{a_{sj}}{a_{sr}}; \quad b'_s = \frac{b_s}{a_{sr}},$$

де s – номер дозволяючого рядка;

r – номер дозволяючого стовпця;

a'_{sj}, b'_s – нові значення перерахованих елементів;

a_{sj}, b_s – попередні значення перерахованих елементів;

a_{sr} – попереднє значення дозволяючого елемента.

2) **елементів дозволяючого стовпця**, які приймаються рівними нулю за виключенням дозволяючого елемента:

$$a'_{ir} = 0; \quad c'_r = 0;$$

3) **інших елементів**, що не належать до елементів дозволяючого рядка та дозволяючого стовпця, за правилом прямокутника. За цим правилом подумки виділяють прямокутник, в якому елемент, що підлягає перерахунку, та дозволяючий елемент утворюють одну із діагоналей:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ir}a_{sj}}{a_{sr}}; \quad b'_i = b_i - \frac{a_{ir}b_s}{a_{sr}}; \quad c'_j = c_j - \frac{a_{sj}c_r}{a_{sr}}; \quad L' = L - \frac{c_r b_s}{a_{sr}},$$

де a'_{ij}, b'_i, c'_j, L' – нові значення перерахованих елементів;

a_{ij} , b_i , c_j , L – попередні значення перерахованих елементів.

Після закінчення перерахунку повертаються до кроку 4.

Кроки 4 – 8 повторюють до тих пір, поки елементи останнього рядка симплекс-таблиці не набудуть від'ємного значення, тобто поки не виконається умова $c_j \leq 0$.

Приведений алгоритм підкреслює значну трудомісткість розв'язування задач ЛП. Крім того, враховуючи те, що кількість змінних та обмежень у задачах може бути досить великою, очевидною є необхідність застосування ЕОМ та відповідних програмних продуктів для автоматизації їх розв'язування, що передбачає наявність інформаційної та автоматизованої підтримки відповідних процесів прийняття рішень.

2.2. Варіанти індивідуальних завдань при розв'язуванні задачі про ранець

Умова.

Є n предметів, кожен з яких характеризується вагою x і ціною c.

Потрібно вибрати з них такі предмети, щоб їх загальна вага не перевищував m кг, а сумарна ціна була максимальною. В стовпчику "Наявність предмету" фіксувати наявність (1) або відсутність (0) предмета в наборі. Дані для розв'язання задачі приведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Вихідні дані для розв'язування задачі "про ранець"
(задачі управління товарно-матеріальними запасами

Варіант №	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Предмет	x_1, x_2, x_3, x_4	x_5, x_6, x_7, x_8	x_9, x_{10}, x_1, x_2	x_3, x_4, x_5, x_6	x_7, x_8, x_9, x_{10}	x_1, x_3, x_5, x_7
Варіант №	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Предмет	x_9, x_1, x_3, x_5	x_2, x_4, x_6, x_8	x_{10}, x_2, x_4, x_6	x_1, x_2, x_3	x_5, x_6, x_7	x_9, x_{10}, x_1
Варіант №	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
Предмет	x_3, x_4, x_5, x_8	x_7, x_8, x_9, x_1	x_1, x_3, x_5	$x_4, x_5, x_6,$	x_2, x_3, x_4	x_6, x_7, x_8
Варіант №	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
Предмет	x_{10}, x_1, x_3	x_1, x_5, x_3, x_4	x_9, x_7, x_1, x_2	x_3, x_4, x_5, x_1	x_7, x_8, x_9, x_1	x_9, x_3, x_5, x_7
Варіант №	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Предмет	x_1, x_5, x_9, x_3	$x_9, x_3, x_7, x_1,$	x_9, x_2, x_{10}, x_1	$x_5, x_9, x_6, x_2,$	x_{10}, x_1, x_9, x_3	x_2, x_7, x_5, x_6

Предмет	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
Вага, кг	2	4	6	8	7	5	3	4	9	1
Ціна, грош. один.	10	15	17	20	25	23	5	7	9	10
Наявність предмету	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

2.3. Зміст звіту

2.3.1. Назва та мета заняття.

2.3.2. Короткі теоретичні можливості щодо змісту та методів розв'язування задач лінійного програмування.

2.3.3. Короткі теоретичні можливості щодо змісту симплексного методу розв'язування задач лінійного програмування.

2.3.4. Зміст індивідуального завдання згідно визначеного варіанту за табл. 2.2.

2.3.5. Математична постановка задачі індивідуального завдання при розв'язуванні задачі про ранець із зазначеною цільовою функцією та обмеженнями.

2.3.6. Розв’язування задачі ЛП за варіантом індивідуального завдання. Результати представити за аналогією рис. 1.1 з відповідними коментарями.

2.3.7. Висновки по роботі.