Лекція 3
Інформаційні моделі (ІМ) складових ГВК

План теми

3.1. Короткі теоретичні відомості про теорію кватерніонів як математичну основу складання інформаційних моделей (ІМ) складових ГВК

Кватерніон – це впорядкована четвірка дійсних чисел *s, a, b, c*, які зв'язані з чотирма базисними елементами *1, i, j, k* (рис 3.1), що мають такі властивості:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1;\ i \cdot j = k;\ j \cdot k = i;\ k \cdot i = j;\ j \cdot i = -k;\ k \cdot j = -i;\ i \cdot k = -j. \qquad (3.1.1)$$

Операції додавання і віднімання кватерніонів визначені покомпонентно. Множення кватерніонів визначається законом множення їх уявних одиниць. Будь який кватерніон може бути записаний у вигляді:

$$q = s \cdot 1 + a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k\ , \qquad (3.1.2)$$

де *i, j, k* – уявні одиниці.

Кожен кватерніон q можна записати у вигляді суми двох кватерніонів: скаляра (s) і вектора ($a \cdot i+b \cdot j+c \cdot k$), тобто:

$$q = s(q) + v(q) = \left[scalar;(vector)\right], \qquad (3.1.3)$$

де $s(q) = s$ – скалярна частина кватерніона q; $v(q) = a \cdot i+b \cdot j+c \cdot k$ – векторна частина кватерніона q.

Наприклад, у кватерніоні $q=3-5 \cdot i+4 \cdot k$ скалярна частина дорівнює 3, а векторна частина дорівнює $-5 \cdot i+4 \cdot k$.

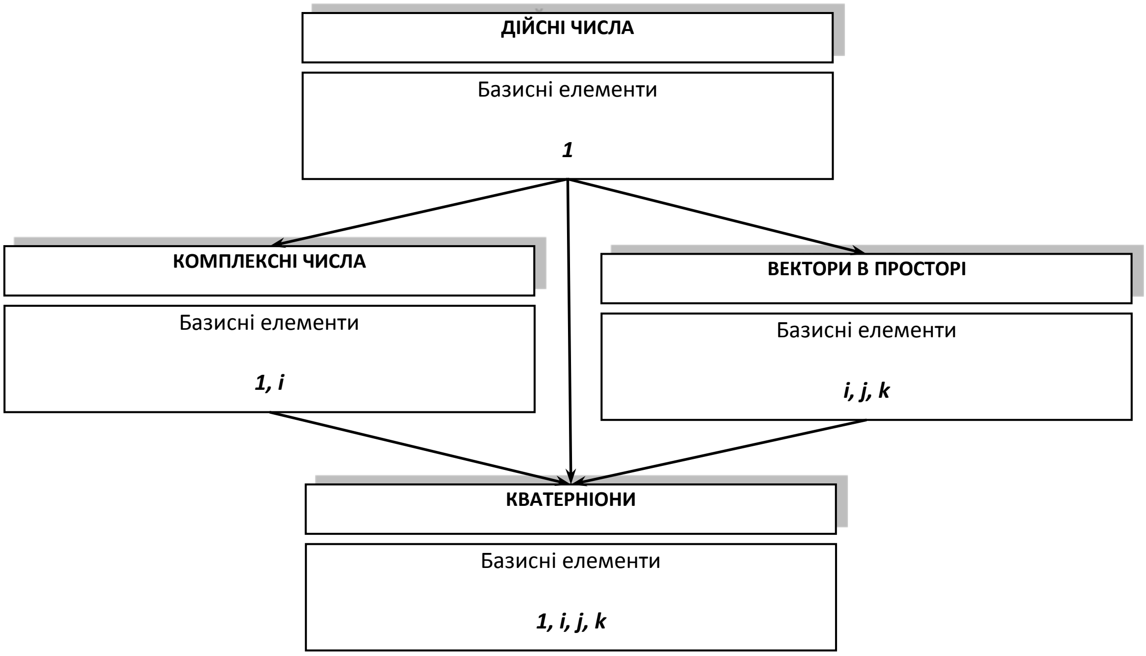


Рис. 3.1.1. Числові системи та базисні елементи

Іноді кватерніон зручно представляти набором чотирьох чисел: як число та 3D-вектор, тобто як гіперкомплексне число з трьома уявними одиницями *i, j, k,* що може бути записано у вигляді:

$$q = [s, a, b, c] = [scalar, (vector)] = [s, (a, b, c)] = \\ = s \cdot 1 + a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k = s + v. \tag{3.1.4}$$

Іноді достатньо обмежитись лише окремим видом кватерніонів – вектором. Кватерніон (3.1.2) приймає вид вектора у випадку рівності нулю його скалярної частини:

$$q(vector) = a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k; scalar = 0. \tag{3.1.5}$$

Геометричний зміст операцій з кватерніонами виду (3.1.5) відповідає геометричному змісту операцій з векторами. Причому, довжина вектора $v = a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k$ кватерніона q в тривимірному просторі визначається за формулою (4.1.6). Цей вектор іде з початку координат O в точку M з координатами *a, b, c* (рис. 3.1.3). Тому:

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \tag{3.1.6}$$

де v – векторна частина кватерніону (3.1.4);

a, b, c – координати точки *M*, що задає напрямок вектору (рис. 3.1.2).

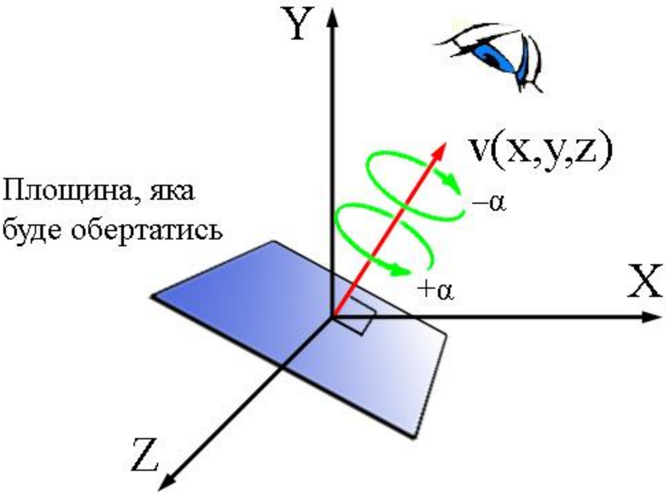


Рис. 3.1.2. Представлення кватерніону у вигляді вектора v і кута оберту α

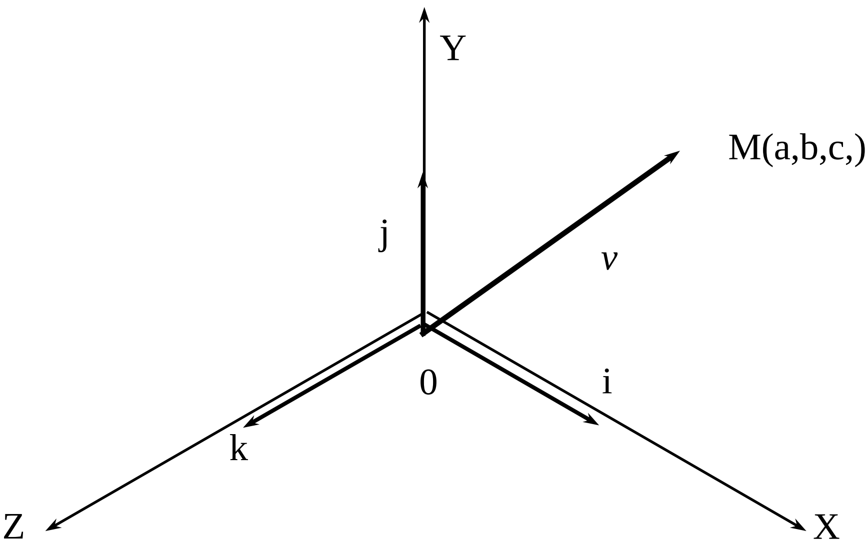


Рис. 3.1.3. Приклад розташування вектора v в тривимірному просторі

При описанні поворотів кватерніон представляють у вигляді:

$$q(v,\omega) = \cos\frac{\omega}{2} + v \cdot \sin\frac{\omega}{2}, \qquad (3.1.7)$$

де v – одиничний вектор, однонаправлений із віссю повороту; ω – кут повороту.

Кватерніон несе в собі інформацію про оберт на заданий кут навколо вектора, початок якого збігається з початком поточної системи координат (рис. 3.1.2). Якщо значення кута позитивне (+α), то оберт відбувається проти годинникової стрілки (якщо дивитись в напрямку, протилежному напрямку заданого вектора), в противному випадку (–α) – за годинниковою стрілкою.

Важлива особливість кватерніонів полягає в тому, що підмножиною кватерніонів є дійсні числа (s, 0, 0, 0); комплексні числа (s, a, 0, 0); вектори в тривимірному просторі (0, a, b, c) (рис. 3.1.3), а при виконанні дій множення кватерніонів не виконується закон комутативності, тобто $q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1$.

Крім того три уявні базисні одиниці i, j, k кватерніона можуть бути інтерпретовані як базисні вектори декартової системи координат у тривимірному просторі.

Важливими для розглядуваної проблеми є такі властивості кватерніонів як комутативність та асоціативність за додаванням, комутативність за множенням, асоціативність за множенням та дистрибутивність:

1) кватерніони комутативні та асоціативні за додаванням:

$$q_1 + q_2 = q_2 + q_1;$$
$$(q_1 + q_2) + q_3 = q_2 + (q_1 + q_3);$$

2)кватерніони не комутативні за множенням:

$$q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1;$$

3) кватерніони асоціативні за множенням:

$$(q_1 \cdot q_2) \cdot q_3 \neq q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3);$$

4) кватерніони дистрибутивні:

$$q_1 \cdot (q_2 + q_3) = q_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot q_3.$$

Сферична лінійна інтерполяція здійснюється за виразом:

$$SLI(Q_1, Q_2, t) = (Q_1 \cdot \sin((1-t) \cdot \omega) + Q_2 \cdot \frac{\sin(t \cdot \omega)}{\sin(\omega)}), \qquad (3.1.8)$$

де Q_1, Q_2 – вектори, що належать 4-D сфері, що перетинається площиною P, утвореною даними векторами та центром кола,

$P \in (Q_1, Q_2, O)$ (рис. 3.1.4, а). Очевидно, що шукані при інтерполяції точки будуть належати даній площині;

ω – кут між векторами Q_1 та Q_2;

t – локальний час.

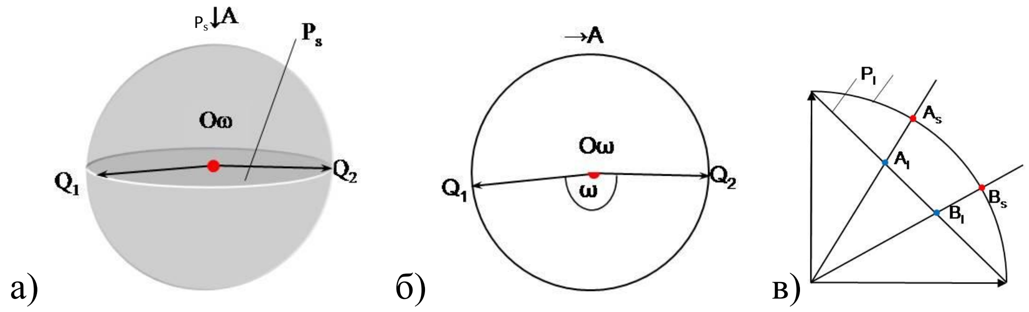


Рис. 3.1.4. Спрощена схема сферичної лінійної інтерполяції:
а) неспівпадіння точок при лінійній (LI) та сферичній лінійній інтерполяції (SLI);
б) 4-D сфера та площина, утворена векторами Q_1 та Q_2 і центром кола;
в) вид А на рис. 3.4, б

3.2. Особливості складання інформаційних моделей елементів ГВК

Подання інформації про структурні складові ГВК у виді відповідних інформаційних моделей (ІМ) характеризується реалізацією методично обумовлених кроків в такій *послідовності*:

– аналіз конструкції складової;
– складання її так званої схеми заміщення (СЗ, тобто складання ниткової моделі складової);
– заміна рухомих та / або нерухомих елементів СЗ складової її 3D-еквівалентами з використанням геометричних примітивів (ГП) – складання ІМ складової як такої з урахуванням її можливої рухомості або нерухомості.

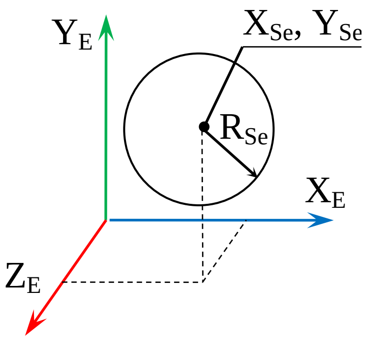
При складанні ІМ складових ГВК враховується той факт, що форма кожного із структурних елементів ГВК може бути описана з використанням кінцевої множини елементарних геометричних примітивів (ГП) Gp:

– сфера *SE*;
– циліндр *CR*;
– конус *CE*;
– паралелепіпед *PD*;
– трапеція TZ) та їх комбінацій.

Точка відліку при описі кожного з ГП формально описується так званою прив’язочною точкою з відповідними їй координатами при їх (ГП) подальшому (можливому) упорядкованому описі:

$$X_{Gp}, Y_{Gp}, Z_{Gp} \mid Gp \in \left(Pd,\ Cr,\ Se,\ Ce,\ Tz\right). \qquad (3.2.1)$$

Нижче представлені приклади описів геометричних примітивів.

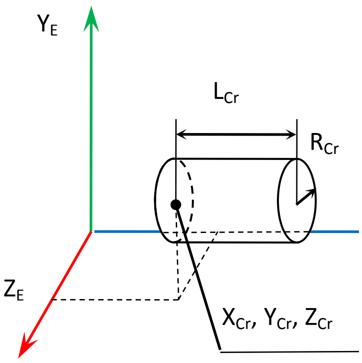


Опис ГП типу “сфера”:

Se: X_{Se}, Y_{Se}, Z_{Se}, R_{Se}

Рис. 3.2.1. Базове розташування ГП типу “сфера” в СК елемента ГВК

Тут:
Se - ідентифікатор примітиву Se (sphere) – “сфера”;
X_{Se} – розташування сфери вздовж осі X в СК елемента E, мм;
Y_{Se} – розташування сфери вздовж осі Y в СК елемента E, мм;
Z_{Se} – розташування сфери вздовж осі Z в СК елемента E, мм;
R_{Se} – радіус сфери, мм.

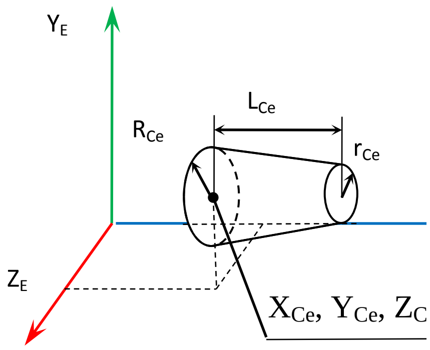


Опис ГП типу “циліндр”:

Cr: X_{Cr}, Y_{Cr}, Z_{Cr}, R_{Cr}, L_{Cr}

Рис. 4.2.2. Базове розташування ГП типу “циліндр” в СК елемента ГВК

Тут:
Cr – ідентифікатор примітиву Cr (cylinder) – “циліндр”;
X_{Cr} – розташування циліндра вздовж осі X в СК елемента E, мм;
Y_{Cr} – розташування циліндра вздовж осі Y в СК елемента E, мм;
Z_{Cr} – розташування циліндра вздовж осі Z в СК елемента E, мм;
R_{Cr} – радіус циліндра, мм;
L_{Cr} – довжина циліндра, мм.



Опис ГП типу "конус":

Ce: X_{Ce}, Y_{Ce}, Z_{Ce}, R_{C}

Рис. 3.2.3. Базове розташування ГП типу "конус"
в СК елемента ГВК

Тут:

Ce – ідентифікатор примітиву Ce (cone) – "конус";

X_{Ce} – розташування конуса вздовж осі X в СК елемента E, мм;

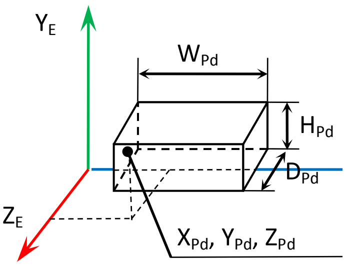
Y_{Ce} – розташування конуса вздовж осі Y в СК елемента E, мм;

Z_{Ce} – розташування конуса вздовж осі Z в СК елемента E, мм;

R_{Ce} – лівий радіус конуса, мм;

r_{Ce} – правий радіус конуса, мм;

L_{Ce} – довжина конуса, мм.



Опис ГП типу "паралелепіпед":

Pd: X_{Pd}, Y_{Pd}, Z_{Pd}, W_{Pd}, H_{Pd}, D_{Pd}

Рис. 3.2.4. Базове розташування ГП типу "паралелепіпед"
в СК елемента ГВК

Тут:

Pd – ідентифікатор примітиву Pd (parallelepiped) – "паралелепіпед";

X_{Pd} – розташування паралелепіпеда вздовж осі X в СК елемента E, мм;

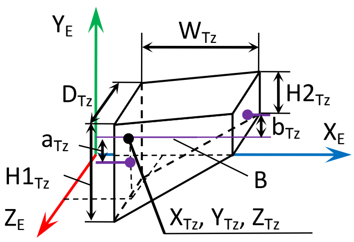
Y_{Pd} – розташування паралелепіпеда вздовж осі Y в СК елемента E, мм;

Z_{Pd} – розташування паралелепіпеда вздовж осі Z в СК елемента E, мм;

W_{Pd} – ширина паралелепіпеда, мм;

H_{Pd} – висота паралелепіпеда, мм;

D_{Pd} – глибина паралелепіпеда, мм.



Опис ГП типу “трапеція”:

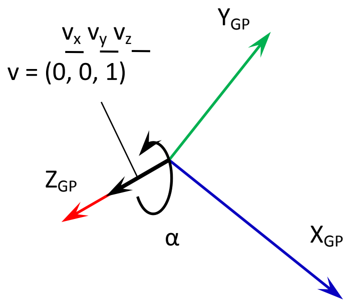
TZ: X_{Tz}, Y_{Tz}, Z_{Tz}, D_{Tz}, W_{Tz}, $H1_{Tz}$, $H2_{Tz}$, a_{Tz}, b_{Tz}

Рис. 3.2.5. Базове розташування ГП типу “трапеція” в СК елемента ГВК

Тут:
Tz – ідентифікатор примітиву Tz (Trapeze) – “трапеція”;
X_{Tz} – розташування трапеції вздовж осі X в СК елемента E, мм;
Y_{Tz} – розташування трапеції вздовж осі Y в СК елемента E, мм;
Z_{Tz} – розташування трапеції вздовж осі Z в СК елемента E, мм;
D_{Tz} – глибина трапеції, мм;
W_{Tz} – ширина трапеції, мм;
$H1_{Tz}$ – ліва висота трапеції, мм;
$H2_{Tz}$ – права висота трапеції, мм;
a_{Tz} –відстань між базовою віссю B та центром грані із висотою H1, мм;
b_{Tz} – відстань між базовою віссю B та центром грані із висотою H2, мм.

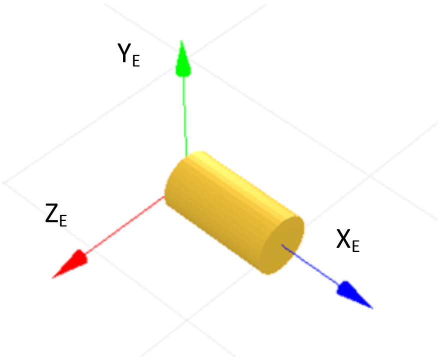
При потребі змінити орієнтацію ГП вказується кватерніон його орієнтації, що описується за рахунок 4-ох додаткових параметрів:

$$Q = [\, S_Q, X_Q, Y_Q, Z_Q \,]. \tag{3.2.2}$$



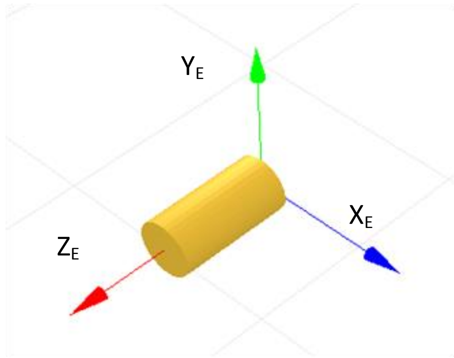
$$Q = (s, v) = (s, v_x, v_y, v_z) =$$
$$= \left(\cos\frac{\alpha}{2},\ v_x \cdot \sin\frac{\alpha}{2},\ v_y \cdot \sin\frac{\alpha}{2},\ v_z \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \right)$$

Приклад IM (MM) геометричного примітиву типу “циліндр” з осьовим розміром 200 мм до і після його орієнтації (обертання навколо осі Y на 90° за годинниковою стрілкою при погляді на вісь Y) представлено на рисунку 3.1.6.



CR: 0, 0, 0, 50, 200

а)



CR: 0, 0, 0, 50, 200 , 0.7, 0, 0.7, 0

б)

Рис. 4.2.6. Приклад опису та відповідної 3D-моделі ГП типу “циліндр”:
а) без кватерніона орієнтації;
б) із кватерніоном орієнтації