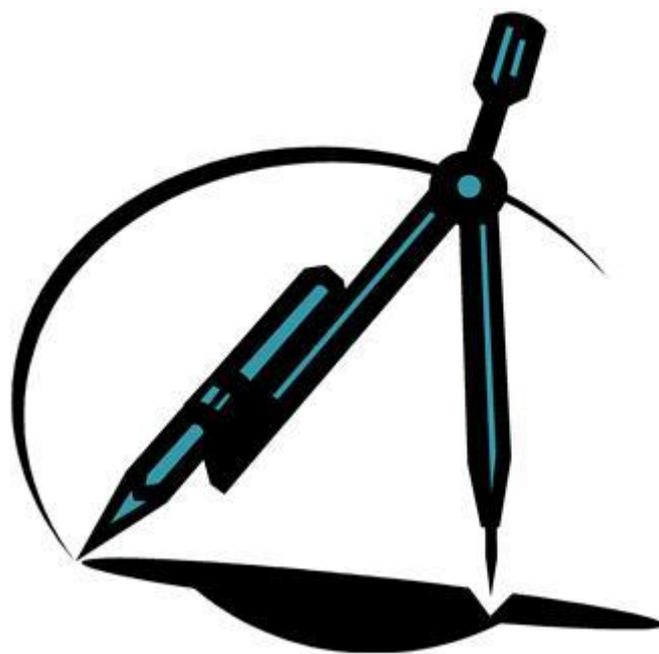


Г.О. РАЙКОВСЬКА

# НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ ПРАКТИКУМ



ЖИТОМИР – 2013

УДК 514.18:004(075.8)

ББК 30.11я73

P18

**Рецензенти:** *Л.В. Лось*, заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор Національного агроекологічного університету, м. Житомир;

*С.П. Семенець*, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики Житомирського державного університету імені Івана Франка;

*О.М. Джеджула*, доктор педагогічних наук, професор Вінницького національного аграрного університету.

**Райковська Г.О.**

P18 Нарисна геометрія. Практикум : навч. посібник / Г. О. Райковська. – Житомир : ЖДТУ, 2013. – 186 с.

ISBN 978-966-683-385-6

Навчальний посібник містить короткі теоретичні відомості з кожної теми курсу нарисної геометрії, вправи для самопідготовки і перевірки знань – тест-контроль, типові приклади та хід розв'язання задач, а також багатоваріантні завдання для комплексних графічних робіт з методичними порадами та прикладами виконання кожного з них.

Навчальний посібник призначено для студентів вищих технічних навчальних закладів.

УДК 514.18:004(075.8)

ББК 30.11я73

## ЗМІСТ

	Передмова .....	4
	Умовні позначення .....	5
<i>Розділ 1</i>	<i>Загальні правила оформлення кресленика</i> .....	6
	1.1. Формати. Основний напис .....	7
	1.2. Масштаби .....	10
	1.3. Лінії кресленика .....	11
	1.4. Креслярський шрифт .....	12
<i>Розділ 2</i>	<i>Основні поняття ортогонального проєкціювання</i> .....	15
	2.1. Геометричні об'єкти .....	15
	2.2. Методи проєкціювання .....	16
	2.2.1. Центральне проєкціювання .....	16
	2.2.2. Паралельне проєкціювання .....	18
	2.3. Особливості виконання креслеників методом ортогонального проєкціювання .....	19
	2.4. Точка .....	21
	2.5. Пряма .....	25
	2.6. Проекції площин та їх відсіків .....	31
	2.7. Прямі лінії і точки на площині .....	37
	2.8. Позичійні і метричні властивості прямокутних проєкцій геометричних фігур .....	39
	2.9. Способи перетворення проєкційного кресленика .....	48
	2.10. Криві лінії .....	55
	2.11. Поверхні. Їх утворення і задання на епюрі Монжа .....	60
	2.12. Перетин поверхні прямими лініями і площиною .....	67
	2.13. Розгортки поверхонь .....	73
	2.14. Взаємний перетин поверхонь .....	76
	2.15. Аксонометричні проєкції .....	80
<i>Розділ 3</i>	<i>Задачі для самопідготовки</i> .....	84
<i>Розділ 4</i>	<i>Індивідуальні завдання на розрахунково-графічні роботи</i> .....	111
	4.1. Загальні правила виконання розрахунково-графічних робіт .....	111
	4.2. Індивідуальні завдання на розрахунково-графічні роботи:	115
	Завдання 1. Задачі позиційні .....	115
	Завдання 2. Задачі метричні .....	120
	Завдання 3. Способи перетворення епюра .....	125
	Завдання 4. Переріз багатогранника площиною .....	127
	Завдання 5. Перетин поверхонь .....	136
<i>Розділ 5</i>	<i>Тест-контроль</i> .....	145
	Рекомендована література .....	182
	Показчик .....	183

## ПЕРЕДМОВА

Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка займає особливе місце в системі професійної підготовки інженерно-технічних фахівців у галузі машинобудування, оскільки вона є підґрунтям для опанування професійно орієнтованих і спеціальних дисциплін.

У той же час, вона є однією з перших інженерних дисциплін, що вивчаються студентами вищих навчальних закладів. Нарисна геометрія, інженерна і комп'ютерна графіка – це дисципліна, яка складається із трьох частин: нарисна геометрія, інженерна графіка і комп'ютерна графіка.

Курс інженерної графіки базується на теоретичних та практичних основах нарисної геометрії, яка розробляє методи побудови графічних моделей тривимірного простору на площині. Методи нарисної геометрії мають бути доповнені методами обчислювальної геометрії, які лежать в основі комп'ютерної графіки.

Комп'ютеризація різних галузей народного господарства, широке використання електронно-обчислювальної техніки, дисплеїв та графопобудовників створили можливості для виконання зображень за допомогою персональних комп'ютерів.

**Мета і завдання вивчення дисципліни** – полягає у розвитку просторового мислення та здібностей до аналізу геометричних об'єктів, засвоєнні основних положень стандартів, опануванні кресленням як засобом передачі графічної інформації.

### **Головні завдання дисципліни:**

- дати студентам необхідні теоретичні знання із закономірностей побудов просторових форм (сукупності точок, ліній та поверхонь) на площині;
- сформувати практичні навички щодо виконання зображень різноманітних сполучень геометричних форм на площині, а також уміти проводити дослідження та їх вимірювання, припускаючи перетворення зображень;
- розвинути у студентів просторове мислення, розв'язуючи математичні задачі в графічній інтерпретації;
- навчити студентів створювати проєкції об'єкта, який би відповідав наперед заданим геометричним та іншим вимогам;
- розкрити теоретичні основи побудови зображень на машинобудівних креслениках, які необхідні для їх виконання і читання на основі методів прямокутного проєкціонування;
- сформувати практичні навички оформлення технічної документації;
- дати студентам необхідні основи проєктування і конструювання машин та механізмів;
- навчити студентів працювати із стандартами СКД та довідниковою літературою;
- розвинути у студентів креативні здібності, уміння відображати власні ідеї за допомогою зображень, сформувати інтерес до науководослідницької роботи, а також самостійність та відповідальність у роботі.

У процесі вивчення дисципліни студент повинен сформувати у себе систему теоретичних знань у вигляді основних закономірностей, правил, понять, що розкривають зміст даної дисципліни.

Після опанування цієї дисципліни студент повинен **знати**:

- методи побудови зображень просторових об'єктів на площині;
- способи розв'язання задач, що пов'язанні із просторовими об'єктами;
- способи побудови зображень технічних деталей, виробів тощо;
- основні положення стандартів щодо оформлення та виконання креслеників, схем і текстових конструкторських документів;

**уміти**:

- аналізувати форми предметів;
- визначати положення та натуральні величини їх елементів, відстані між ними;

- виконувати і читати зображення предметів на основі методу прямокутного проєкціювання;
- виконувати кресленики деталей, що входять до складальної одиниці;
- виконувати і читати кресленики за спеціальністю.

Завданням вивчення нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки є також формування у студентів логіки наукового мислення, системного розуміння і сприйняття матеріалу у взаємозв'язку з іншими навчальними дисциплінами та виробничим досвідом, умінням аналізувати зображення на креслениках, аргументувати власні положення.

Таблиця 1

### УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

№ з/п	Назва	Умовне позначення
<i>В системі прямокутних проєкцій</i>		
1	Основні площини проєкцій: горизонтальна фронтальна профільна	$\Pi_1$ $\Pi_2$ $\Pi_3$
2	Додаткові площини проєкцій	$Q, T, \Phi, \dots$
3	Початок осей проєкцій	$O$
4	Осі проєкцій на кресленику	$X, Y, Z$
5	Осі проєкцій при заміні площин проєкцій	$X_1, X_2, \dots$
6	Точки в оригіналі	$A, B, S, \dots 1, 2, 3 \dots$
7	Проєкції точок на основних площинах проєкцій: горизонтальні фронтальні профільні	$A_1, B_1 \dots 1_1, 2_1$ $A_2, B_2 \dots 1_2, 2_2$ $A_3, B_3, \dots 1_3, 2_3$
8	Проєкції точок на додаткові площини проєкцій	$A_4, B_4, \dots$
9	Точки на розгортках	$A_0, B_0, \dots$
10	Прямі лінії окремого положення (в просторі і на кресленику): горизонтальні фронтальні профільні	$H(h_1, h_2)$ $F(f_1, f_2)$ $J(j_1, j_2)$
11	Поверхні, площини: у просторі на кресленику	$P, R, Q, \Sigma, \Psi, \Omega, \dots$ $P_1, P_2, P_3, \dots$
12	Бісекторна площина четвертої та другої чвертей простору	$K$
13	Плоскі кути	$\alpha, \beta, \gamma, \dots$
<i>Умовні позначки операцій (знаки)</i>		
14	Перпендикулярність	$\perp$
15	Паралельність	$\parallel$
16	Збігаються	$\equiv$
17	Безмежність	$\infty$
18	Перетин двох геометричних елементів	$\cap$
19	Об'єднання двох геометричних елементів	$\cup$
20	Плоский або двограний кут	$\sphericalangle$
21	Рівняння	$=$
22	Більше	$>$
23	Менше	$<$
24	Трикутник	$\Delta$
25	Належність	$\in$
26	Наслідок геометричної побудови	$=$
27	Подібність	$\sim$

# РОЗДІЛ 1

## ЗАГАЛЬНІ ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ КРЕСЛЕНИКА

Правила оформлення конкретної конструкторської документації визначаються його специфікою і положеннями відповідних стандартів.

Усі графічні документи будь-якого призначення слід виконувати відповідно до правил, регламентованих стандартами Єдиної системи конструкторської документації (ЄСКД).

Відповідно до Закону України «Про стандартизацію» від 17 травня 2001 р. №2408 (2408-14) затверджені національні стандарти України з наданням чинності з 1 липня 2006 р. (табл. 2).

Таблиця 2

### Показчик діючих стандартів України

ДСТУ 3321:2003	Система конструкторської документації. Терміни та визначення
ДСТУ ГОСТ 2.001:2006	Єдина система конструкторської документації. Загальні положення (ГОСТ 2.001-93, IDT)
ДСТУ ГОСТ 2.051:2006	Єдина система конструкторської документації. Електронні документи. Загальні положення (ГОСТ 2.051-2006, IDT)
ДСТУ ГОСТ 2.104:2006	Єдина система конструкторської документації. Основні написи (ГОСТ 2.104-2006, IDT)
ДСТУ ISO 3040:2006	Кресленики технічні. Конуси. Розміри та допуски (ISO 3040:1990, IDT)
ДСТУ ISO 3098-0:2006	Документація технічна на виробі. Шрифти. Частина 0. Загальні вимоги (ISO 3098-0:1997, IDT)
ДСТУ ISO 5455:2005	Кресленики технічні. Масштаби (ISO 5455:1979, IDT)
ДСТУ ISO 5456-1:2006	Кресленики технічні. Методи проєкціювання. Частина 1. Загальні положення (ISO 5456-1:1996, IDT)
ДСТУ ISO 5456-2:2005	Кресленики технічні. Методи проєкціювання. Частина 2. Ортогональні зображення (ISO 5456-2:1996, IDT)
ДСТУ ISO 5456-3:2006	Кресленики технічні. Методи проєкціювання. Частина 3. Аксонометричні зображення (ISO 5456-3:1996, IDT)
ДСТУ ISO 5456-4:2006	Кресленики технічні. Методи проєкціювання. Частина 4. Центральне проєкціювання (ISO 5456-4:1996, IDT)
ДСТУ ISO 6433:2006	Кресленики технічні. Позиції (ISO 6433:1981, IDT)
ДСТУ ISO 7573:2006	Кресленики технічні. Специфікація (ISO 7573:1983, IDT)
ДСТУ ISO 128-1:2005	Кресленики технічні. Загальні принципи оформлення. Частина 1. Передмова та показник понять стандартів ISO серії 128 (ISO 128-1:2003, IDT)
ДСТУ ISO 128-20:2003	Кресленики технічні. Загальні принципи подавання. Частина 20. Основні положення про лінії (ISO 128-20:1996, IDT)
ДСТУ ISO 128-21:2005	Кресленики технічні. Загальні принципи оформлення. Частина 21. Лінії, виконані автоматизованим проєктуванням (ISO 128-21:1997, IDT)
ДСТУ ISO 128-22:2005	Кресленики технічні. Загальні принципи оформлення. Частина 22. Основні положення та правила застосування ліній-виносок і полиць ліній-виносок (ISO 128-22:1999, IDT)
ДСТУ ISO 128-23:2005	Кресленики технічні. Загальні принципи оформлення. Частина 23. Лінії на будівельних кресленниках (ISO 128-23:1999, IDT)
ДСТУ ISO 128-24:2005	Кресленики технічні. Загальні принципи оформлення. Частина 24. Лінії на машинобудівних кресленниках (ISO 128-24:1999, IDT)
ДСТУ ISO 128-30:2005	Кресленики технічні. Загальні принципи оформлення. Частина 30. Основні положення про види (ISO 128-30:2001, IDT)
ДСТУ ISO 128-34:2005	Кресленики технічні. Загальні принципи оформлення. Частина 34. Види на машинобудівних кресленниках (ISO 128-34:2001, IDT)
ДСТУ ISO 128-40:2005	Кресленики технічні. Загальні принципи оформлення. Частина 40. Основні положення про розрізи та перерізи (ISO 128-40:2001, IDT)

ДСТУ ISO 128-44:2005	Кресленики технічні. Загальні принципи оформлення. Частина 44. Розрізи та перерізи на машинобудівних креслениках (ISO 128-44:2001, IDT)
ДСТУ ISO 128-50:2005	Кресленики технічні. Загальні принципи оформлення. Частина 50. Основні положення про зображення розрізів і перерізів (ISO 128-50:2001, IDT)

Вищевказані стандарти встановлюють загальні правила виконання креслеників: розміри аркушів форматів, масштаби зображень, лінії кресленика та їх основне призначення, креслярський шрифт, а також форми, розміри і порядок заповнення основних написів тощо.

## 1.1. ФОРМАТИ. ОСНОВНИЙ НАПИС

(ДСТУ ISO 5457:2006)

Основні терміни та визначення основних понять встановлені згідно з СКД ДСТУ 3321:2003.

### Означення

*Формат* – розміри зовнішньої рамки аркуша конструкторського документа, виконаної тонкою лінією.

Таким чином, формат визначається розмірами зовнішньої рамки, яку виконують тонкою суцільною лінією (рис. 1). Формати поділяються на *основні* (табл. 3) і *додаткові* (табл. 4).

*Основний формат* – формат конструкторського документа, якому віддають перевагу, розміри сторін становлять 1189 x 841мм (A0) або одержані послідовним діленням його на дві рівні частини паралельно до меншої сторони до формату 297x210мм (A4) разом з останнім (табл. 3).

*Додатковий формат* – формат конструкторського документа, який утворюють збільшенням меншої сторони будь-якого основного формату на величину, кратну до її розміру (табл. 4).

Таблиця 3

### Основні формати

Позначення формату	Розміри сторін формату, мм
A0	841 x 1189
A1	594 x 841
A2	420 x 594
A3	297 x 420
A4	210 x 297

Таблиця 4

### Додаткові формати

Позначення	Розміри сторін, мм	Позначення	Розміри сторін, мм
A0 x 2	1189 x 1682	A3 x 6	420 x 1783
A0 x 3	1189 x 2523	A3 x 7	420 x 2080
A1 x 3	841 x 1783	A4 x 3	297 x 630
A1 x 4	841 x 2378	A4 x 4	297 x 841
A2 x 3	591 x 2181	A4 x 5	297 x 1051
A2 x 4	591 x 1682	A4 x 6	297 x 1261
A2 x 5	591 x 2102	A4 x 7	297 x 1471
A3 x 3	420 x 891	A4 x 8	297 x 1682
A3 x 4	420 x 1189	A4 x 9	297 x 1892
A3 x 5	420 x 1486		

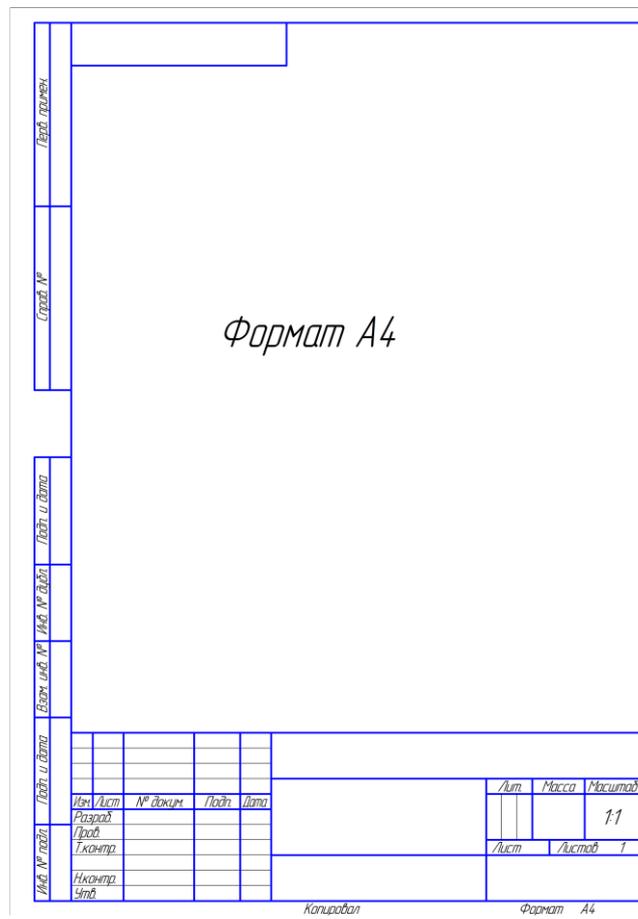
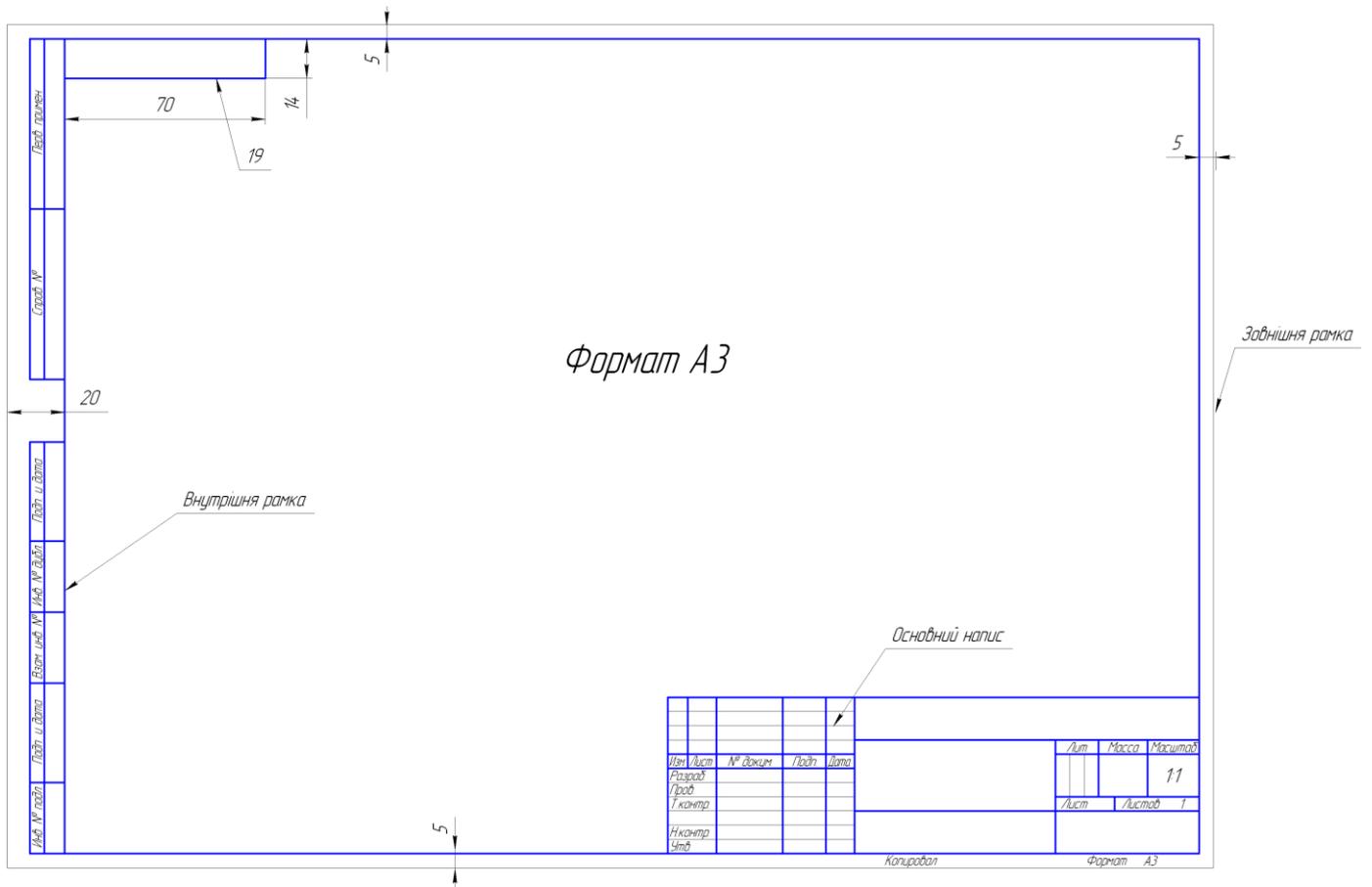


Рис. 1. Формати кресленника

Рамку кресленника виконують суцільною основною лінією на відстані 5 мм від верхньої, правої і нижньої меж формату. Між лівою межею і лінією рамки залишають поле завширшки 20 мм для підшивання і брошурування креслеників і документів (рис. 1).

Кожен кресленик і конструкторський документ повинен мати основний напис. Його розміщують у правому нижньому кутку формату і виконують за ГОСТ 2.104-68 (рис. 2).

## Означення

*Основний напис* – сукупність установлених характеристик виробу і виконаного на ньому конструкторського документа, які зазначають разом з установленими підписами та відомостями про зміну документа в спеціальному штампі, розташованому в правому куті над нижньою лінією рамки поля документа (ДСТУ 3321:2003).

Позначення додаткового формату складається з позначення основного формату і його кратності. Встановлені стандартом формати використовуються не тільки для виконання кресленника, а і для іншої конструкторської документації.

На рис. 2 зображено основний напис за *формою 1* (ГОСТ 2.104-68):

- графа 1 – назва виробу (у відповідності з вимогами), а також назва документа;
- графа 2 – позначення документа за ГОСТ 2.201-80 чи за прийнятою на кафедрі формою;

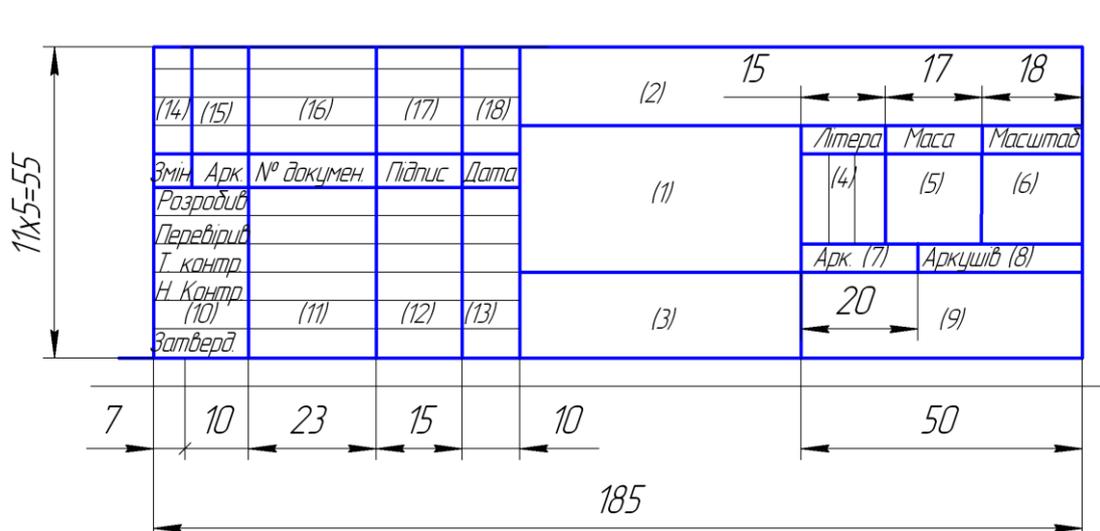


Рис. 2. Основний напис – Форма 1 (ГОСТ 2.104-68)

- графа 3 – позначення матеріалу деталі (графу заповнюється тільки на креслениках деталей);
- графа 5 – маса виробу;
- графа 6 – масштаб зображення;
- графа 7 – порядковий номер аркуша (на документах, які складаються з одного аркуша, графу не заповнюють);
- графа 8 – загальна кількість аркушів документа (графу заповнюють тільки на першому аркуші);
- графа 9 – назва чи індекс підприємства, що випускає документ. У навчальному закладі рекомендується вказувати його скорочену назву (аббревіатуру) та індекс групи;
- графа 10 – характер роботи особи, яка підписує документ;
- графа 11 – прізвища осіб, хто креслив і перевіряв кресленик;
- графа 12 – підписи осіб, що вказані в графі 11;

- графа 13 – дата підписання документа;
- графа 19 (рис. 1) – позначення кресленника, повернуте на 180° для формату А4, для форматів більше А4 при розташуванні основного напису поздовж довгого боку аркуша і на 90° для форматів більше А4 при розташуванні основного напису поздовж короткого боку аркуша.

Графи 4, 5, 14...18 заповнюються на документах, що випускаються підприємствами.

## 1.2. МАСШТАБИ (ДСТУ ISO 5455:2005)

Не завжди є можливість накреслити предмет у натуральну величину. Великі предмети доводиться зображати зменшеними в декілька разів, а дрібні – збільшеними.

Масштаби є *числові, лінійні і кутові*. Розглянемо тільки числові масштаби, які надалі називатимемо просто масштабами.

### Означення

*Масштабом* називається відношення розмірів об'єкта, виконаного без спотворення, до його номінальних значень (ДСТУ 3321:2003).

Масштаби зображень на кресленнику вибирають за ДСТУ ISO 5455:2005 (ГОСТ 2.302-68, табл. 5).

Таблиця 5

**Масштаби зображень на кресленниках**

Натуральна величина	1:1									
Масштаби зменшування	1:2	1:2,5	1:4	1:5	1:10	1:15	1:20	1:25	1:40	1:50
Масштаби збільшування	2:1	2,5:1	4:1	5:1	10:1		20:1		40:1	50:1

Перевагу слід віддавати зображенню предмета в натуральну величину.

*Позначення масштабу.* При позначенні масштабу в спеціальній графі основного напису букву *М* не ставлять, а пишуть тільки відношення, наприклад: *1:1*, *1:2* тощо. Якщо окреме зображення на кресленнику виконано в масштабі, що не відповідає зазначеному в основному написі, то масштаб позначається безпосередньо біля напису, що стосується цього зображення наприклад, *А(1:4)*, *Б-Б(1:5)*.

Незалежно від масштабу розміри на кресленнику завжди проставляються дійсні (рис. 3).

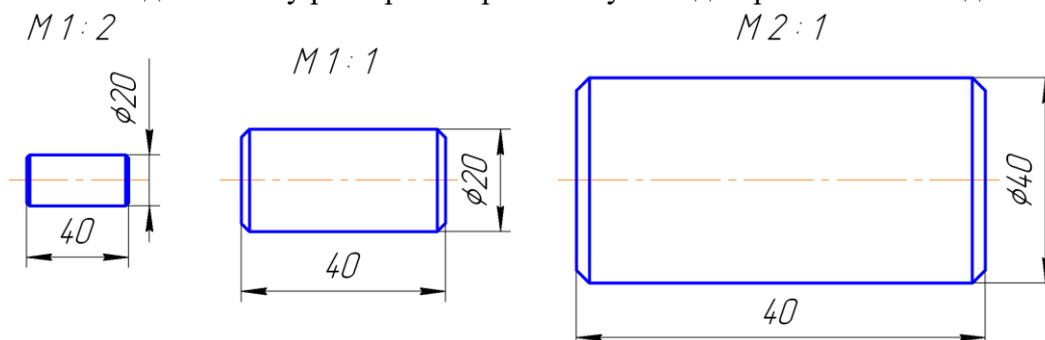


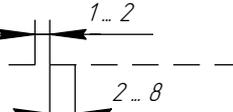
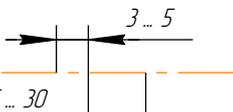
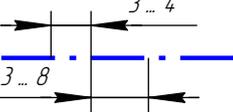
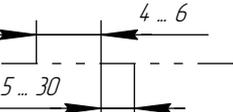
Рис. 3. Приклади застосування масштабу

### 1.3. ЛІНІЇ КРЕСЛЕНИКА (ДСТУ ISO 128-1:2005)

Під час виконання кресленника використовується сполучення ліній, їх призначення, проведення і співвідношення товщини установлені стандартом СКД ДСТУ 3321-96. Відповідно до цього стандарту в кресленні застосовують лінії трьох типів: суцільні, штрихові та штрихпунктирні (табл. 6).

Таблиця 6

Лінії кресленника

№ пор.	Назва лінії	Накреслення	Товщина лінії порівняно з товщиною основної лінії	Призначення
1	Суцільна основна		$S=0,5 \dots 1,4 \text{ мм}$	Лінії обрису на кресленнику предмета, його поверхонь, розтинів і перерізів
2	Суцільна тонка		Від $S/2$ до $s/3$	Виносні і розмірні лінії; лінії штрихування; лінії виноски та їх полочки; лінії для підкреслювання фізичних написів та позначення розміщених поруч деталей; лінії проєкційного зв'язку; лінії для позначення слідів площин; лінії побудови характерних точок у спеціальних побудовах.
3	Суцільна хвиляста		Від $S/2$ до $s/3$	Лінії обриву; лінії розмежування виду та розтинів
4	Штрихова		Від $S/2$ до $s/3$	Лінії невидимого контуру; невидимі лінії переходу
5	Штрихпунктирна тонка		Від $S/2$ до $s/3$	Осьові та центрові лінії; лінії для зображення розгортки суміщеної з видом
6	Штрихпунктирна потовщена		Від $S/2$ до $2/3 S$	Позначають поверхні, які потребують термообробки або наноситься покриття; для зображення елементів розміщених перед розтинною площиною ("накладена проєкція")
7	Розімкнута		Від $S$ до $1,5 S$	Позначення розтинів, перерізів
8	Суцільна тонка зі зламами		Від $S/2$ до $s/3$	Довгі лінії обриву
9	Штрихпунктирна з двома пунктирами		Від $S/2$ до $s/3$	Лінії згину на розгортках; лінії для зображення частини виробу в крайніх чи проміжних положеннях; лінії для зображення розгортки, суміщеної з видом

Правильне використання ліній під час виконання проєкцій і зображень дозволяє відобразити основну інформацію графічно про геометричний або технічний об'єкт.

Таким чином, виконання проєкцій та зображень є процесом кодування інформації за допомогою сукупності різноманітних ліній з дотриманням встановлених стандартів їх накреслення і основного призначення.

На кресленику товщина ліній має бути однаковою для всіх зображень, що виконані в одному й тому ж масштабі.

Найменша товщина ліній – складова частина  $S$ , а найменша відстань між суміжними лініями залежить від формату кресленика: для  $A1$  та форматів, більших за  $A1$ , найменша товщина ліній – 0,3 мм, а відстань між лініями, виконаними олівцем – 1 мм; для форматів, менших за  $A1$ , найменша товщина ліній, виконаних олівцем – 0,3 мм, а відстань між лініями – 0,8 мм.

Довжину штрихів у штрихпунктирних лініях вибирають залежно від розмірів зображення. На одному кресленику штрихи ліній мають бути однакової довжини. Відстань між штрихами кожної лінії повинна бути приблизно однаковою. Штрихпунктирні лінії мають закінчуватися штрихами.

Якщо діаметр кола менший за 12 мм, то штрихпунктирні лінії, що використовуються як центрові, треба замінювати суцільними тонкими лініями. Центр кола в усіх випадках має визначатися перетином штрихів.

#### 1.4. КРЕСЛЯРСЬКИЙ ШРИФТ (ДСТУ ISO 3098-0:2006)

Шрифт як графічна форма відображення природної мови, слугує для відображення на епюрах і креслениках інформації, яку неможливо чи важко відобразити іншим шляхом.

Літери, цифри і знаки шрифту повинні мати чітке накреслення, що забезпечує їх швидке, безпомилкове і однозначне сприйняття та розуміння відображеної інформації.

У креслярському шрифті використовують український (російський), латинський та грецький алфавіти, арабські та римські цифри, а також знаки. Форми літер українського (російського), латинського та грецького алфавітів наведено на рисунку 4, 5 (шрифт типу Б з нахилом), зразок виконання напису креслярським шрифтом – рис. 6.

В стандарті (ГОСТ 2.304-81) наведено основні відомості щодо конструкції літер і цифр, встановлено їх висоту, ширину, товщину накреслення, відстань між літерами, рядками та інші елементи (табл. 7).

Розмір шрифту визначає висоту великих літер  $h$  і відповідно висоту малих літер –  $c$ .

Стандарт встановлює два типи шрифтів «А» і «Б» без нахилу і з нахилом приблизно  $75^\circ$  з товщиною ліній  $d$ .

Таблиця 7

#### Параметри креслярського шрифту

Параметри	Співвідношення параметрів	Значення параметрів, мм							
<i>Шрифт типу А</i>									
Розмір шрифту – $h$ (висота великих літер)	14/14h; 14d	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	20,0	
Висота малих літер – $c$	10/14h; 10d	1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	
Відстань між літерами, цифрами та знаками – $a$	2/14h; 2d	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0	2,8	
Мінімальний крок рядків – $b$ (висота допоміжної сітки)	22/14h; 22d	4,0	5,5	8,0	11,0	16,0	22,0	31,0	
Мінімальна відстань між словами – $e$	6/14h; 6d	1,1	1,5	2,1	3,0	4,2	6,0	8,4	
Товщина ліній шрифту – $d$	1/14h	0,18	0,25	0,35	0,6	0,7	1,0	1,4	
<i>Шрифт типу Б</i>									
Розмір шрифту – $h$ (висота великих літер)	10/10h; 10d	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	20,0	
Висота малих літер – $c$	7/10h; 7d	1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	

Відстань між літерами, цифрами та знаками – a	2/10h; 2d	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0	2,8	4,0	
Мінімальний крок рядків – b (висота допоміжної сітки)	17/10h; 17d	4,3	6,0	8,5	12,0	17,0	24,0	34,0	
Мінімальна відстань між словами – e	6/10h; 6d	1,5	2,1	3,0	4,2	6,0	8,4	12,0	
Товщина ліній шрифту – d	1/10h	0,25	0,35	0,6	0,7	1,0	1,4	2,0	
<i>Ширина літер і цифр типу Б</i>									
Великі літери:									
	Ж, Ф, Ш, Щ	(8/10)h	2,0	2,8	4,0	5,6	8,0	11,0	16,0
	А, М, Х, Ю	(7/10)h	1,7	2,4	3,5	4,9	7,0	9,8	14,0
	Г, Е, З, С	(5/10)h	1,2	1,7	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0
	І	(1/10)h	0,25	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0
	Ї	(2/10)h	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0	2,8	4,0
	решта	(6/10)h	1,5	2,1	3,0	4,2	6,0	8,4	12,0
Малі літери:									
	ж, т, ф, ш, щ	(7/10)h	1,7	2,4	3,5	4,9	7,0	9,8	14,0
	м, ю	(6/10)h	1,5	2,1	3,0	4,2	6,0	8,4	12,0
	с, з, е	(4/10)h	1,0	1,4	2,0	2,8	4,0	5,6	8,0
	решта	(5/10)h	1,2	1,7	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0
Цифри:									
	1 (та літери – і, ї)	(3/10)h	0,7	1,0	1,5	2,1	3,0	4,2	6,0
	решта	(5/10)h	1,2	1,7	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0

**Примітка.**

Стандартом встановлено, що для типу Б використовується також шрифт розміром 1,8 мм.

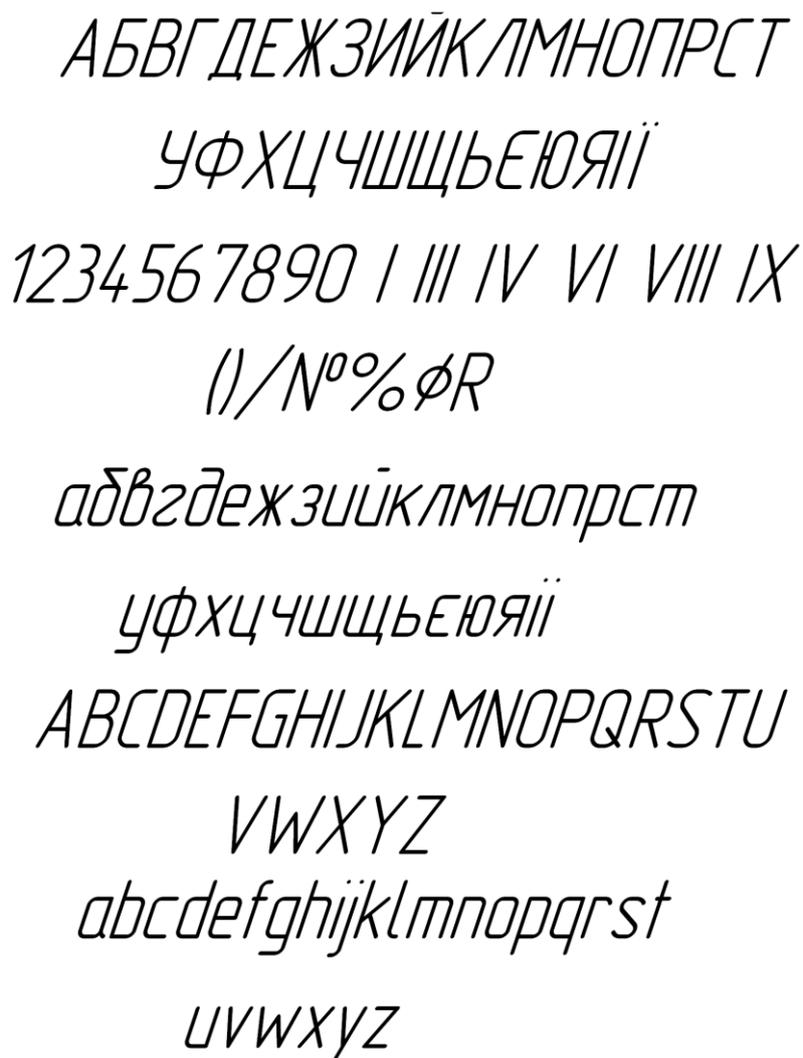


Рис. 4. Креслярський шрифт типу Б – ГОСТ 2. 304-81

$A\alpha$ - альфа	$N\nu$ - ню
$B\beta$ - бета	$\Xi\xi$ - ксі
$\Gamma\gamma$ - гамма	$Oo$ - омікрон
$\Delta\delta$ - дельта	$\Pi\pi$ - пі
$E\varepsilon$ - епсилон	$\rho\rho$ - ро
$Z\zeta$ - дзета	$\Sigma\sigma$ - сигма
$H\eta$ - ета	$\tau\tau$ - тау
$\theta\vartheta$ - тета	$\Upsilon\upsilon$ - іпсилон
$I\iota$ - йота	$\Phi\phi$ - фі
$K\kappa$ - каппа	$\chi\chi$ - хі
$\Lambda\lambda$ - ламбда	$\Psi\psi$ - пси
$M\mu$ - мю	$\Omega\omega$ - омега

Рис. 5. Грецький алфавіт

*«Нарисна геометрія – вчить нас правильно читати чужі та викладати власні думки, використовуючи в якості слів лінії і точки як елементи будь-якого зображення».*

*В. І. Курдюмов*

Рис. 6. Зразок виконання напису креслярським шрифтом

### **Запитання для перевірки знань**

1. Вкажіть позначення і розміри основних форматів?
2. Які масштаби зменшення і збільшення встановлено стандартом?
3. Як позначаються масштаби в графі основного напису і на полі кресленника?
4. Які типи ліній встановлено стандартом?
5. В яких межах вибирають товщину  $S$  суцільної основної лінії та від чого залежить її товщина?
6. Які типи шрифтів встановлено стандартом?
7. Яке співвідношення висоти великих і малих літер? Яке співвідношення ширини і висоти літер?
8. На якій відстані від краю аркуша проводять рамку кресленника?
9. Який зміст граф основного напису?

### 2.1. ГЕОМЕТРИЧНІ ОБ'ЄКТИ

Геометричний об'єкт є основною формою предметної області, окремі елементи якої мають як схожі, так і різні характерні ознаки, які дають інформацію про об'єкт.

Співставлення класифікаційних ознак і відповідно їх видів і кількості, надаючи інформацію про об'єкт, дозволяє розташувати геометричні об'єкти в ієрархічній послідовності. Цю класифікаційну послідовність від нижчого до більш високого рівня утворюють: *точка, лінія, відрізок* (частина лінії), *контур, поверхня, відсік* (частина) *поверхні, оболонка, геометричне тіло* (табл. 8).

Кожен з ієрархічних об'єктів утворюється з об'єктів попереднього рівня ієрархії. У разі переходу від нижчого до більш високого рівня ієрархії відбувається ускладнення об'єкта і нарощення кількості інформації.

Запропонована класифікація геометричних об'єктів і відповідна щодо них інформація забезпечує можливість використовувати способи і результати графічного відображення операцій з об'єктами нижчих рівнів як дані для відображення операцій з об'єктами більш високих рівнів ієрархії. У той же час, така класифікація є основою для опанування машинної графіки в якій об'єкт конструюють з базових графічних елементів (точка, лінія, відрізок, контур, поверхня, відсік поверхні, оболонка, геометричне тіло), які записуються користувачем і додаються один до одного, щоб отримати необхідний об'єкт.

Таблиця 8

#### Класифікація геометричних об'єктів

Геометричний об'єкт	Характеристика
Точка	Простий неподільний елемент геометричного простору, який немає форми і розмірів. Інформацією про точку є три координати її положення в системі координат.
Лінія	Суцільний слід руху точки в просторі. Траєкторія руху точки може бути закономірною і незакономірною. Інформація про лінію включає дані, які характеризують її тип, склад, структуру, форму і розміри форми, положення і орієнтацію лінії у просторі.
Відрізок лінії	Обмежена частина лінії з обох кінців точками, які входять до складу і структури лінії, утримують дані про координати положення кінцевих точок.
Контур	Замкнена послідовність відрізків, з'єднаних своїми кінцевими точками. Інформація про контур складається з наступних даних: тип, склад, структура, форма і розміри форми, положення, орієнтація, розміри положення і орієнтації.
Поверхня	Слід руху твірної лінії по напрямній. Обидві лінії можуть мати сталі чи змінні форми та розміри, а також відносну орієнтацію. Інформація про поверхню охоплює дані, що відносяться до типу, складу, структури, форми і її розмірів, положення та орієнтації та їх розмірів.
Відсік поверхні	Частина поверхні, яка обмежена контуром усі відрізки якого належать даним поверхні. Інформація про відсік поверхні об'єднує дані, які характеризують як частину поверхні, так і контур, що її обмежує.
Оболонка	Геометричний об'єкт до складу якого входить замкнена поверхня одного типу чи об'єднання декількох замкнених відсіків одного або декількох типів, які відділяють замкнений внутрішній простір оболонки від зовнішнього. Інформація стосовно оболонки містить дані, що характеризують усі відсіки поверхонь, які входять до її складу: форму; розміри; відносне розташування. А також дані, що визначають форму, розміри оболонки в цілому, її положення; орієнтацію у просторі.

Геометричне тіло	Об'єкт, що складається з оболонки, яка визначає його форму, умовний або конкретний матеріал, що заповнює його.
------------------	--

З усіх перерахованих об'єктів тільки геометричні тіла можуть бути реально матеріалізовані та виготовлені. Усі інші геометричні об'єкти від точки до оболонки можуть бути представлені тільки в уяві, а їх візуалізація і графічне відображення різним накресленням ліній і позначень, у тому числі і їх відносна видимість є умовним поняттям. Знання цих умовностей є необхідною умовою грамотного графічного відображення об'єктів, а також правильного сприйняття і розуміння повного обсягу інформації у процесі читання їх проєкцій і зображень, що характеризує цей об'єкт.

## 2.2. МЕТОДИ ПРОЕКЦІЮВАННЯ

В основі правил побудови зображень, що розглядає нарисна геометрія і, які використовуються у технічному кресленні лежить метод проєкціювання.

Отже, зображення просторового предмета на площині досягається відображенням його проєкціюванням. За цим методом кожній точці тривимірного простору відповідає певна точка двовимірного простору (площини).

Основними вимогами до зображення є правильність кресленика, його наочність, вимірність, простота у побудові, повнота і метрична визначеність.

У нарисній геометрії предмети відображаються способами *центрального* і *паралельного* проєкціювання. Отримані зображення, називаються *проєкційними*.

### Означення

*Проєкція* – це зображення предмета, «відкинуте» на площину за допомогою променів.

*Спроєкціювати предмет* – це означає зобразити його на площині.

За допомогою зображення можна вивчати не тільки зовнішні контури існуючого об'єкта, що припинив своє існування і уявного, але і такі його елементи, щоб розглянути їх довелось би повністю руйнувати даний об'єкт; порівнювати оригінали і т. ін.

Зображення, яке дозволяє визначити взаємозв'язок (взаємозалежність) елементів об'єкта, *називають повним*.

Зображення, за яким можна визначити розміри об'єкта, називають *метрично визначеним*.

### 2.2.1. ЦЕНТРАЛЬНЕ ПРОЕКЦІЮВАННЯ

Центральне проєкціювання є одним із загальних випадків проєкціювання геометричних об'єктів (геометричних образів) на площину, воно також може називатись *конічним*, *полярним* проєкціюванням або *перспективою*. Цей спосіб використовується при побудові наочних зображень в архітектурно-будівельній справі, малюванні.

При центральному проєкціюванні (побудова центральних проєкцій) задають площину проєкцій. На рис. 7 площина  $P$  – площина проєкцій, точка  $S$  – центр проєкцій.

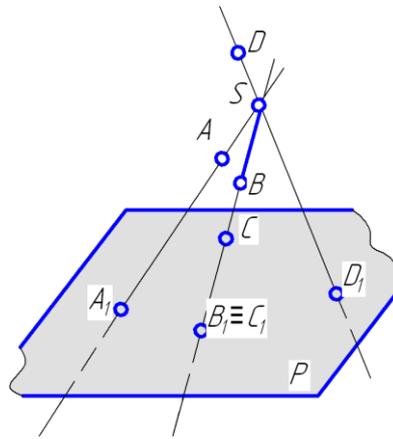


Рис. 7. Метод центрального проєкціювання

Щоб спроекціувати довільну точку необхідно через неї і центр проєкцій провести пряму. Точка перетину цієї прямої з площиною проєкцій і буде шуканою центральною проєкцією точки на вибраній площині проєкцій.

На рис. 7 центральною проєкцією точки  $A$  є точка  $A_1$  перетину прямої  $SA$  з площиною  $P$ . Також побудовані центральні проєкції  $B_1, C_1, D_1$  точок  $B, C, D$  на площині  $P$ .

Прямі, що проходять через центр проєкцій називаються *проєкціювальними прямими*. Центральні проєкції  $B_1$  і  $C_1$  різних точок у просторі, що розташовані на одній проєкціювальній прямій, співпадають. Множина точок простору, яка належить одній проєкціювальній прямій має один центр проєкціювання і одну центральну проєкцію на заданій площині проєкцій.

### Властивості центрального проєкціювання

1. За даними умовами проєкціювання (заданою площиною  $P$  і центром проєкціювання  $S$  – рис. 8) кожна точка простору (за винятком точки  $S$ ) має єдину свою проєкцію, так як через цю точку і центр проєкціювання можна провести тільки одну проєкціювальну пряму.

2. Проєкцією прямої у загальному випадку є пряма. В окремому випадку, коли пряма проходить через центр проєкцій, вона проєкціюється в точку, так як сама є проєкціювальною прямою.

3. Кожній точці, яка належить будь-якій лінії (прямій чи кривій), відповідає проєкція цієї точки, яка належить проєкції цієї лінії, інакше, якщо  $B \in AC$ , то  $B_1 \in A_1C_1$  (рис. 8).

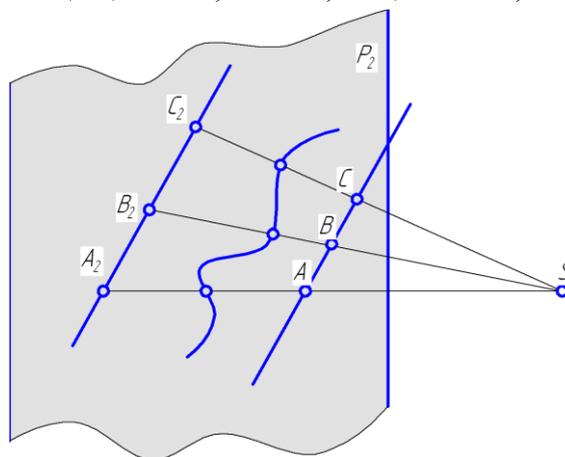


Рис. 8. Властивості центрального проєкціювання

З інших властивостей центрального проєкціювання можна виділити:

1. Крива лінія у загальному випадку проєкціюється у криву, а в окремому – в пряму (рис. 8);

2. Точка перетину ліній проєкціюється в точку перетину проєкцій цих ліній.

Зокрема, зображення, отримані методом центрального проєкціювання близькі до зорового сприйняття людським оком. Отже, вони мають велику ступінь наочності.

### 2.2.2. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЄКЦІЮВАННЯ

Паралельне проєкціювання є окремим випадком центрального, якщо центр проєкціювання віддалити у безмежність (рис. 9). У цьому випадку проєкціювальні промені будуть паралельними між собою. Таке проєкціювання називається *паралельним*. Зображення, яке отримуємо за цим методом проєкціювання, буде паралельною проєкцією. Отже, паралельне проєкціювання повністю визначається напрямом проєкціювання і площиною проєкцій.

Паралельне проєкціювання має такі самі властивості, що і центральне. Разом з тим, йому належать додаткові властивості:

1. Проєкції паралельних прямих паралельні. Так, площини  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  (рис. 10, а), які проведено у просторі через паралельні прямі, будуть між собою паралельними. Такі площини перетинаються третьою (у прикладі площиною  $P$ ) по лініям, які паралельні між собою;

2. Відношення відрізків прямої дорівнює відношенню їх проєкцій (рис. 10, б) –  
$$\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1}$$
 на основі властивостей пропорційності відрізків, які відсікаються паралельними прямими на прямих, що перетинаються;

3. Якщо в цій пропорції поміняти місцями крайні члени, тоді  $\frac{C_1B_1}{CB} = \frac{A_1C_1}{AC} = const = k$ .

Це означає, що відношення довжини проєкцій відрізка до дійсних розмірів самого відрізка є величиною сталою. Ця величина називається *коефіцієнтом* (чи показником) *спотворення*. Його широко використовують при побудові аксонометричних проєкцій;

4. Відношення відрізків двох паралельних прямих дорівнює відношенню їх проєкцій;

5. Плоска фігура, яка паралельна площині проєкцій, проєкціюється на цю площину в натуральну величину.

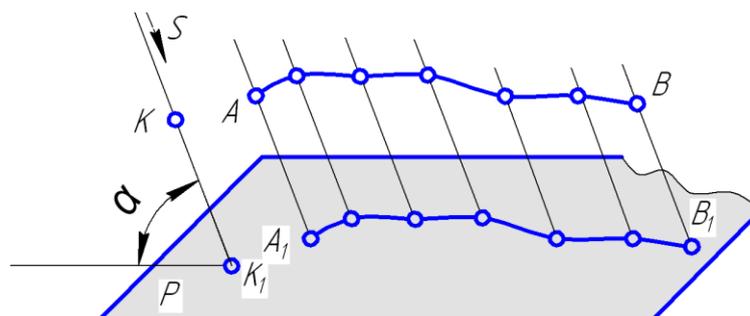


Рис. 9. Паралельне проєкціювання

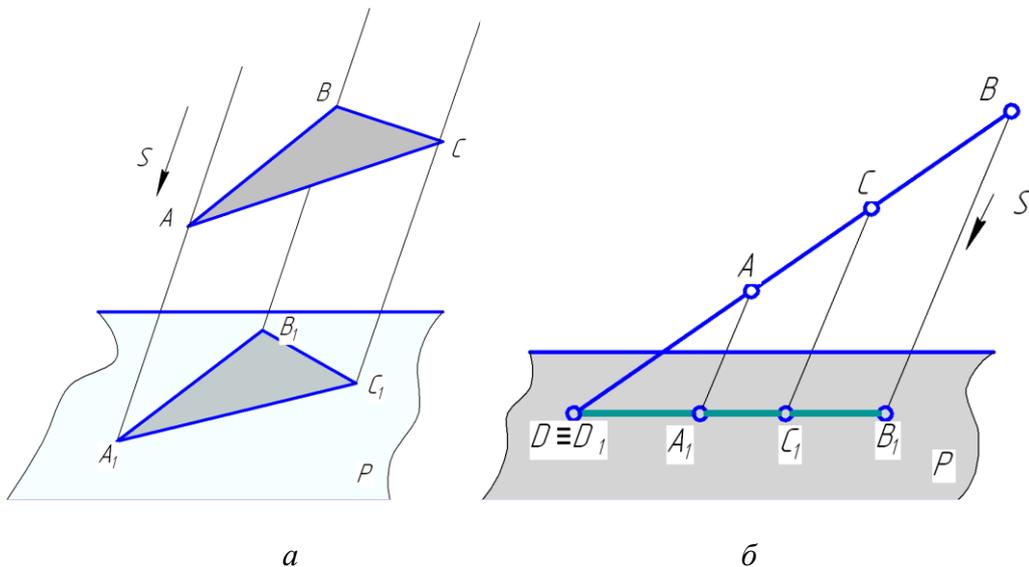


Рис. 10. Властивості паралельного проєкціювання

### Висновок

Якщо відрізок (чи плоска фігура) переміщуються у просторі паралельно сам-собі, то його паралельна проєкція не змінює своєї величини. Також не змінюється його проєкція і при паралельному переміщенні площини проєкцій.

У свою чергу паралельне проєкціювання поділяється на *косокутне* (проєкціювальні промені не перпендикулярні до площини проєкцій) і *прямокутне* (проєкціювальні промені перпендикулярні до площини проєкцій). Прямокутне проєкціювання ще має назву *ортогонального*, а проєкції *ортогональні*.

Залежно від положення площини проєкцій та центрів проєкціювання можна дістати різні проєкційні системи. Найпоширенішою системою, що застосовується в машинобудуванні, архітектурі, будівництві є система прямокутних (ортогональних) проєкцій, чи *метод Монжа* – метод паралельного проєкціювання (при цьому беруться прямокутні проєкції на дві взаємоперпендикулярні площини проєкцій). За цим методом забезпечується наочність, точність і зручність зображення предметів на площині.

### Означення

Зображення просторової фігури двома її ортогональними проєкціями на дві взаємоперпендикулярні площини називається *методом Монжа*.

## 2.3. ОСОБЛИВОСТІ ВИКОНАННЯ КРЕСЛЕНИКІВ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЄКЦІЮВАННЯ

З розвитком виробництва, техніки першочергове значення у зображенні об'єктів набуло питання про застосування методу, який би забезпечував точність і зручність зображення, тобто здатність точно встановлювати місце кожної точки зображення відносно інших точок. Побудова зображення просторових об'єктів за методом паралельного проєкціювання на площину досить проста і тому широко застосовується у практиці. З часом метод паралельного проєкціювання удосконалився.

Процес розробки креслеників називається інженерною графікою, а теоретичною основою процесу створення креслеників виробів є нарисна геометрія. *Кресленик* – це основний тип конструкторського документа, який повинен відповідати ряду вимог. До загальних вимог слід віднести:

- 1) у ході виконання креслеників необхідно дотримуватись метода прямокутного проєкціювання;
- 2) кресленик повинен бути простим і зрозумілим, щоб не виникнуло подвійного сприйняття;
- 3) кресленик завжди повинен бути наочним і давати чітке уявлення про предмет, що зображається незалежно від того чи це точка, чи виріб;
- 4) кресленик має виконуватись у строгій відповідності з правилами проєкціювання і встановленими вимогами та умовами;
- 5) кресленик завжди повинен бути виконаний в масштабі, за винятком ескізів;
- 6) поле кресленика завжди повинно бути рівномірно заповненим (75%);
- 7) лінії кресленика повинні відповідати стандарту ГОСТ 2.303-68 (ДСТУ ISO 128-20:2003).

Прямокутне (ортогональне) проєкціювання є основним і найчастіше використовується в нарисній геометрії для відображення на площині об'єктів будь-якого рівня складності, що розташовані у просторі. Також за допомогою даного методу відображається інформація про сам об'єкт, яка характеризує його склад, структуру, форму, розміри форми, положення і орієнтацію об'єкта в просторі, а також операції, що здійснюються з ним.

Побудова геометричних об'єктів тісно пов'язана з просторовим уявленням контуру об'єкта, попереднім вибором його орієнтації, яка відносно площин проєкцій забезпечує оптимальне відображення найбільшої кількості інформації про об'єкт.

Правильний підхід до задачі – запорука успіху її розв'язання. Таким чином, перед тим як приступити до розв'язування задач необхідно опрацювати теоретичний матеріал із даної теми за підручником, навчальним посібником, конспектом лекцій, ознайомитись з методами і після цього можна приступати до графічного розв'язку задачі. Розв'язок будь-якої задачі зводиться до наступного:

- докладний аналіз умови задачі;
- складення алгоритму розв'язку задачі на епюрі й просторі;
- графічний розв'язок задачі.

Окремі задачі потребують вимірювання та елементарних обчислень. Усе це слід виконувати у робочому зошиті. Навички з графічної діяльності, як в традиційному навчанні так, і в графічному редакторі КОМПАС, можна отримати тільки при неодноразовому викреслюванні різних об'єктів, деталей, і чим більше тим краще.

Безумовно, всі вимоги до кресленика не перерахувати. Вони пізнаються у процесі навчання, розробок креслеників, але основна вимога – це дотримання комплексу стандартів ЄСКД, які ми будемо розглядати послідовно.

### **Запитання для перевірки знань**

1. Як класифікуються геометричні об'єкти?
2. Які Вам відомі основні методи проєкціювання геометричних об'єктів на площини?
3. Сформулюйте і доведіть основні властивості паралельного проєкціювання.

4. Сформулюйте і покажіть на креслениках особливості ортогонального проєкціювання.

5. Що таке коефіцієнт спотворення проєкціювання і як він змінюється при проєкціюванні?

## 2.4. ТОЧКА

В інженерній практиці для відображення форми тривимірних об'єктів використовують два або три взаємоперпендикулярних напрямлення проєкціювання (рис. 11, а) на відповідні їм три площини проєкцій: горизонтальну –  $\Pi_1$ , фронтальну –  $\Pi_2$  і профільну –  $\Pi_3$ . Площини  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  і  $\Pi_3$  приймаємо за основні площини проєкцій.

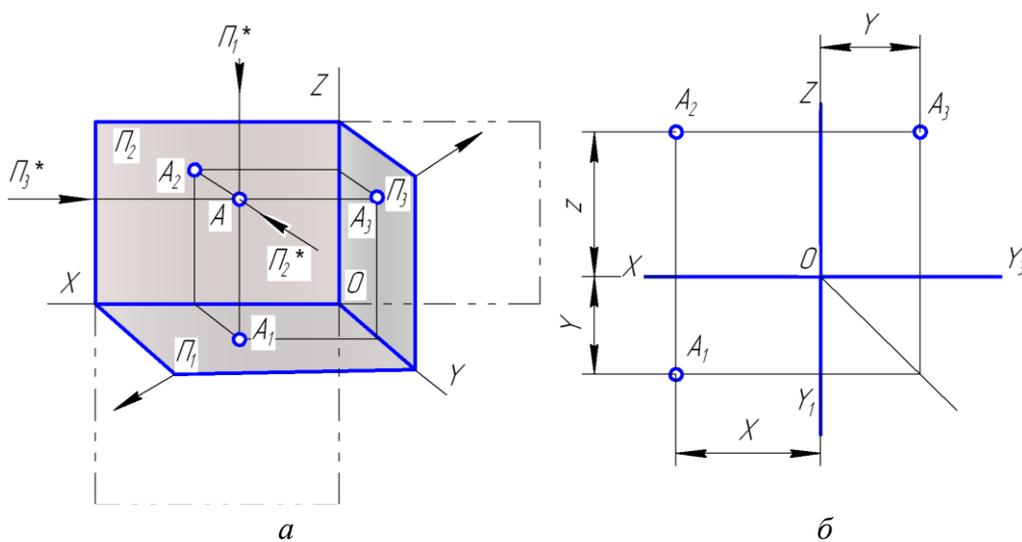


Рис. 11. Розташування площин проєкцій разом з проєкціями точки

При виконанні проєкцій об'єктів на епюрах і креслениках напрямлення проєкціювання за умовчанням не показують. Сам об'єкт попередньо подумки орієнтують відносно площин проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  і  $\Pi_3$  так, щоб його проєкції точно відображували найбільшу кількість частин об'єкта, мали прості форми, які б відповідали формі об'єкта в натурі та були максимально інформаційними, інакше відображували найбільшу кількість інформації про об'єкт, його склад, структуру форми та його розміри.

Перетинаючись між собою, площини  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  ділять простір на чотири частини, які називають чвертями (I, II, III, IV) чи квадрантами. Їх нумерують у послідовності, вказаній на рис. 12, а. Першою чвертю вважають ту частину простору, в якій обидві площини проєкцій повернуто до спостерігача видимими сторонами.

В практиці у процесі створення креслеників і при розв'язуванні задач зустрічаються випадки, коли корисно мати не дві, а три проєкції фігури на три взаємоперпендикулярні площини. При перетині ці площини утворюють 8 октант (рис. 12, б).

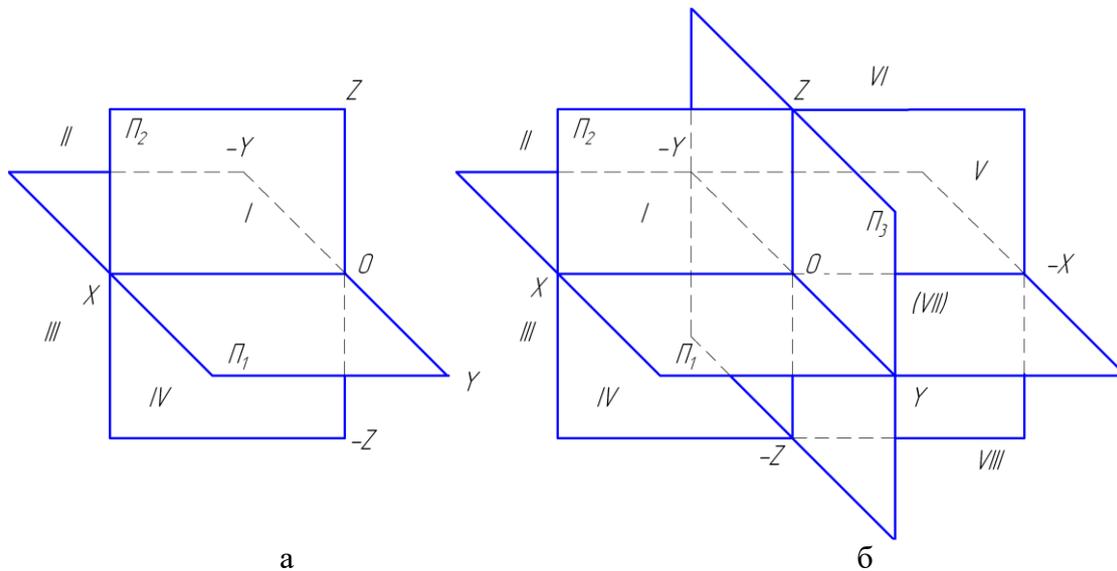


Рис. 12. Утворення октант

Кожній октанті відповідає своя система знаків напрямлення проекційних осей (табл. 9).

Таблиця 9

### Напрям осей проекцій в октантах

Осі проекцій	Октанти							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
<b>OX</b>	+	+	+	+	-	-	-	-
<b>OY</b>	+	-	-	+	+	-	-	+
<b>OZ</b>	+	+	-	-	+	+	-	-

Просторову систему площин проекцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  і  $\Pi_3$  перетворюють у плоску, розвертаючи площину  $\Pi_1$  навколо осі  $X$ , а площину  $\Pi_3$  – навколо осі  $-Z$  до суміщення з площиною  $\Pi_2$  (рис. 11, а, б).

Графічною інформацією точки є її положення (координати) відносно площин проекцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ .

На рис. 11 представлено наочне зображення (косокутна фронтальна диметрія) точки  $A$ , розташованої у просторі між площинами проекцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  і  $\Pi_3$ . Проекціювальні промені проходять через точку  $A$  в напрямленні векторів  $\Pi_1^*$ ,  $\Pi_2^*$ ,  $\Pi_3^*$ , які перпендикулярні до площин проекцій і в точці зустрічі з площинами проекцій утворюють відповідні проекції точки  $\Pi_1(A_1)$ ,  $\Pi_2(A_2)$ ,  $\Pi_3(A_3)$ , які розташовані в проекційному зв'язку.

Лінії зв'язку з'єднують проекції точок і вони перпендикулярні до осей проекцій, що утворюються в перетині суміжних площин проекцій.

Після перетворення наочного зображення у плоске вся інформація про просторове положення точки, відображується на одній площині, поділеної на частини  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ . Умовні границі площин проекцій на епюрі дозволяється не показувати. Читаючи такий епюр необхідно зрозуміти весь об'єм інформації про точку і подумки уявити повну картину її положення в системі площин проекцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  і  $\Pi_3$ . При виконанні проекцій геометричного об'єкта будь-якого ієрархічного рівня, побудови починаються з проєкціювання точки, що входить до його структури.

Точка, яка належить трьом площинам проекцій є початком координат.

На кресленнику зазвичай осі проекцій не показують. Тому, при побудові профільної проекції використовують наступні способи побудов (рис. 13, а, б, в):

- проєкціювальний (рис. 13, а);
- координатний (рис. 13, б)
- з використанням постійної прямої (рис. 13, в), яку проводять під кутом  $45^\circ$  до вертикальної (чи горизонтальної) лінії зв'язку. В нарисній геометрії таку пряму називають постійною прямою комплексного кресленика.

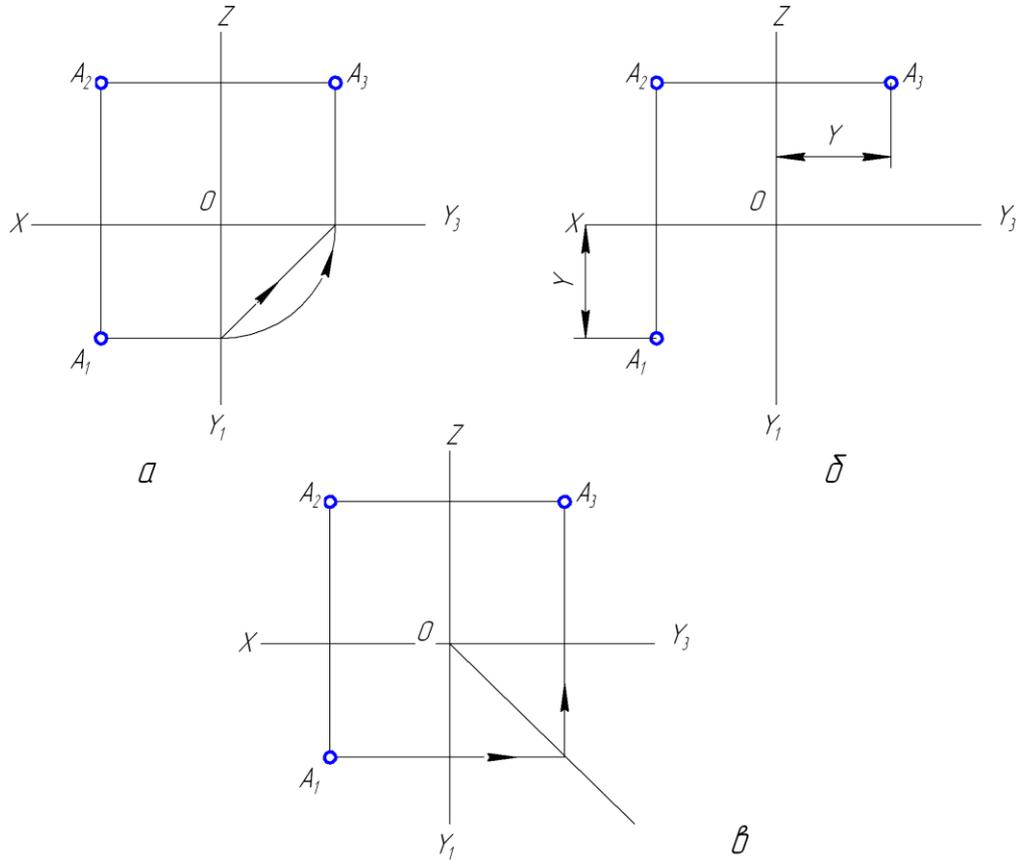


Рис. 13. Способи побудови проєкцій точки на епюрі

Положення точки у просторі може бути задане за допомогою трьох її вимірів (координат) широтою (абсцисою –  $X$ ), глибиною (ординатою –  $Y$ ), висотою (аплікатою –  $Z$ ), інакше трьома числами. Запис координат точки здійснюється у такому вигляді:  $A(x, y, z)$ .

Стосовно площин проєкцій точка може займати як загальне, так і окреме положення (рис. 14, а):

- 1) точка розташована у просторі – всі її проєкції лежать на площинах проєкцій (точка А);
- 2) точка належить одній з площин проєкцій – одна її проєкція збігається з точкою, а інші лежать на осях (точка В);
- 3) точка одночасно належить двом площинам проєкцій (вона лежить на одній з осей проєкцій) – дві її проєкції співпадають, а третя співпадає з початком осей проєкцій (точка С).

Залежно від положення точки в тій чи іншій чверті буде визначатися розташування її проєкцій на епюрі (рис. 14, б):

- а) якщо точка розташована в першій чверті, то горизонтальна проєкція точки знаходиться під віссю проєкцій, а фронтальна – над віссю проєкцій (точка М)
- б) якщо точка розташована в другій чверті, то обидві проєкції точки – горизонтальна і фронтальна знаходяться над віссю проєкцій (точка F);

в) якщо точка розташована в третій чверті, то горизонтальна проекція точки лежить над віссю проєкцій, а її фронтальна проекція – під віссю (точка E);

г) якщо точка розташована в четвертій чверті, то її горизонтальна і фронтальна проєкції розташовані під віссю проєкцій (точка D).

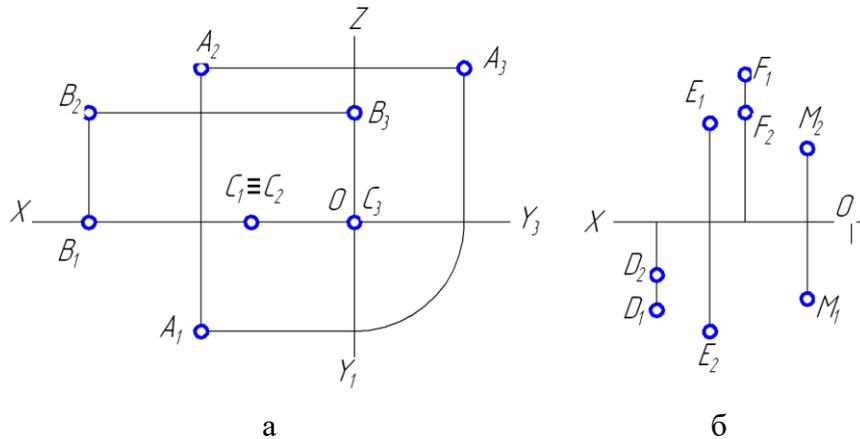


Рис. 14. Положення точки стосовно площин проєкцій

### Твердження

Якщо площини проєкцій знаходяться у положенні  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ , то кожній точці простору буде відповідати упорядкована пара точок на полях площин проєкцій.

Справедливим є і протилежне твердження – упорядкованій парі точок, що лежать на полях площин проєкцій відповідає єдина точка простору. Ця властивість є фундаментальною складовою, яка утворює основу побудови проєкційного кресленика.

Відстань  $Y$  – від горизонтальної проєкції точки до осі проєкцій дорівнює відстані від самої точки до вертикальної площини проєкцій.

Відстань  $Z$  – від вертикальної проєкції точки до осі проєкцій дорівнює відстані від самої точки до горизонтальної площини проєкцій.

Координата  $Z$  – додатна для точок, що розташовані над горизонтальною площиною проєкцій і від’ємна для точок, розташованих під горизонтальною площиною проєкцій.

Координата  $Y$  – додатна для точок, що розташовані перед вертикальною площиною проєкцій і від’ємна для точок, розташованих за вертикальною площиною проєкцій.

### Запитання для перевірки знань

1. Що називають координатами точки простору?
2. Що слугує межами між вказаними чвертями простору: між першою і другою, між третьою і четвертою, між першою і четвертою, між другою і третьою?
3. Перерахуйте чверті простору, що розташовані над горизонтальною площиною проєкцій, під горизонтальною площиною проєкцій, перед вертикальною (фронтальною) площиною проєкцій, за вертикальною площиною проєкцій?
4. Які координати вказують на положення горизонтальної, фронтальної і профільної проєкції точки?

5. Де, стосовно осей проєкцій  $x$ ,  $y$ ,  $z$  розташовані проєкції точок, що знаходяться в першій, другій, ... , сьомій, восьмій октантах?
6. Де знаходиться горизонтальна проєкція точки, яка належить фронтальній площині проєкцій?
7. Де знаходиться фронтальна проєкція точки, яка належить горизонтальній площині проєкцій?
8. Які октанти мають від'ємне значення осі  $y$ ?
9. В якому октанті всі координати мають від'ємне значення?
10. Укажіть октанти в яких дві координати мають від'ємне значення?
11. Яка пряма на епюрі Монжа називається постійною прямою?

## 2.5. ПРЯМА

*Інформацією про пряму є дані щодо її форми, положення і орієнтації стосовно площин проєкцій. Пряма уявляє собою безперервну однопараметричну безмежність точок.*

*Інформацією про відрізок є дані, що відносяться до складу, структури, форми, положення, орієнтації і розмірів. Структуру відрізка утворює частина прямої, яка розташована між двома кінцевими точками.*

*Форма прямої характеризується тим, що у будь-якій її точці радіус кривизни дорівнює безмежності.*

*Розміри форми відрізка прямої характеризуються частиною прямої і відстанню між її кінцевими точками (довжина відрізка).*

Для побудови ортогональної проєкції прямої необхідно визначити проєкції множини точок, що утворюють пряму. Зрозуміло, що ортогональними проєкціями прямої завжди будуть прямі, крім того випадку, коли пряма в просторі перпендикулярна до однієї з площин проєкцій і для її побудови достатньо тільки двох точок, які належать даній прямій і через побудовані проєкції точок провести пряму. Стосовно площин проєкцій пряма займає довільне і особливе (часткове) положення. Особливе (часткове) положення: прямі рівня і проєкціювальні прямі.

### Означення

Довільним вважається таке положення, коли пряма розташована похило до всіх трьох площин проєкцій, тобто пряма не паралельна і не перпендикулярна до жодної з площин проєкцій. Вона має назву *прямої загального положення* (рис. 15).

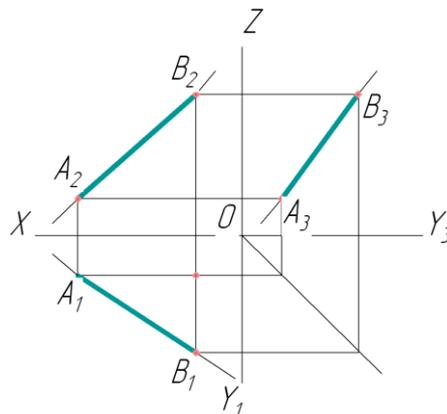


Рис. 15. Пряма загального положення

## Означення

Пряма, паралельна до однієї з площин проєкцій – називається *прямою рівня* (рис. 16).

Пряма, перпендикулярна до однієї з площин проєкцій – називається *проєкціювальною прямою* (рис. 17).

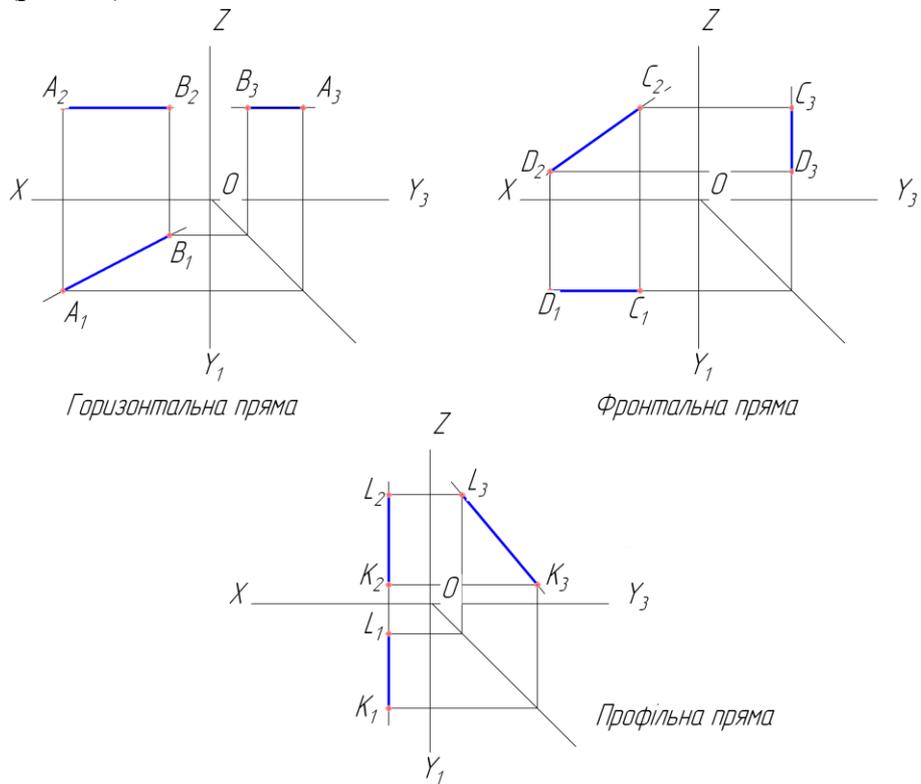


Рис. 16. Прямі рівня

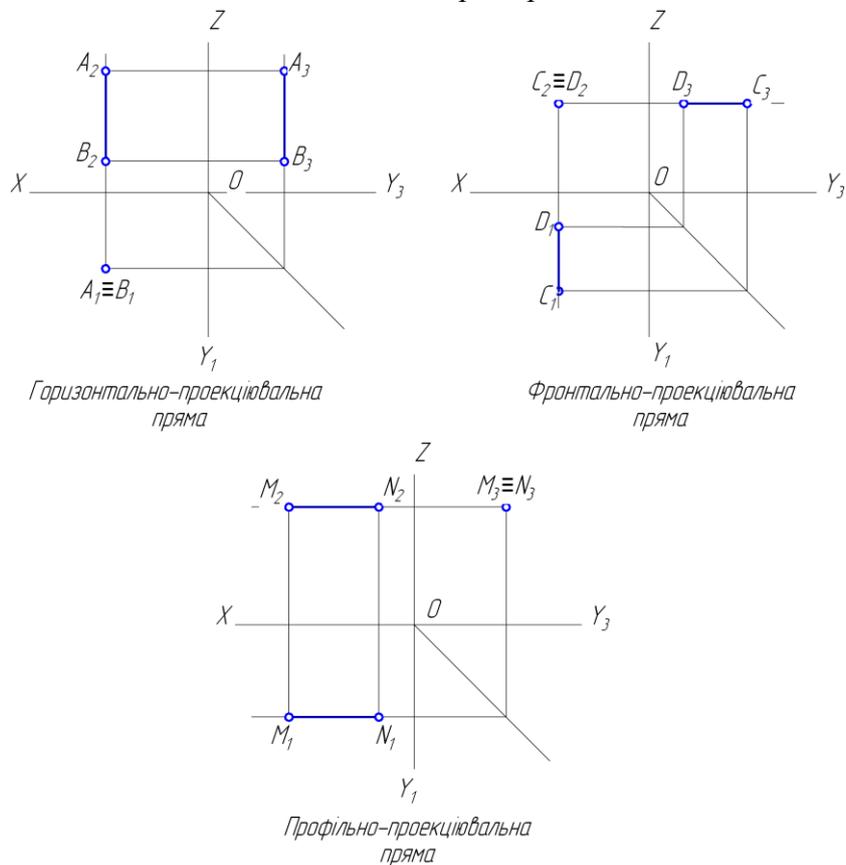


Рис. 17. Проєкціювальні прямі

Проекції прямої і відрізка прямої на паралельні до них площини проекцій відбивають точно кути між ними і двома іншими площинами проекцій. Форма проекцій прямої і відрізка прямої співпадає з їх формою. Проекції відрізка коротші за довжину самого відрізка.

### Твердження

Оскільки всі точки горизонтальної прямої рівновіддалені від площини  $\Pi_1$ , то фронтальна проекція горизонталі паралельна осі  $OX$ , профільна проекція паралельна осі  $OY$ , а горизонтальна проекція відрізка горизонталі дорівнює натуральному відрізку прямої, що проєкціюється.

Усі точки фронталі однаково віддалені від площини  $\Pi_2$ , тому горизонтальна проекція фронталі паралельна осі  $OX$ , профільна проекція паралельна осі  $OZ$ , а фронтальна проекція відрізка фронталі дорівнює натуральному відрізку прямої, що проєкціюється.

Оскільки всі точки профільної прямої однаково віддалені від площини  $\Pi_3$ , то горизонтальна проекція і фронтальна проекція перпендикулярні до осі  $OX$ , а профільна проекція дорівнює натуральному відрізку прямої, що проєкціюється.

Якщо пряма паралельна двом площинам проекцій, то вона перпендикулярна до третьої і проєкціюється на неї в точку, а на дві інші площини проекцій відрізок такої прямої проєкціюється в натуральну величину.

### Означення

Слід прямої – це точка перетину прямої з площинами проекцій (рис. 18).

Слід прямої у площині  $\Pi_1$  називається *горизонтальним*, у площині  $\Pi_2$  – *фронтальним*, у площині  $\Pi_3$  – *профільним*.

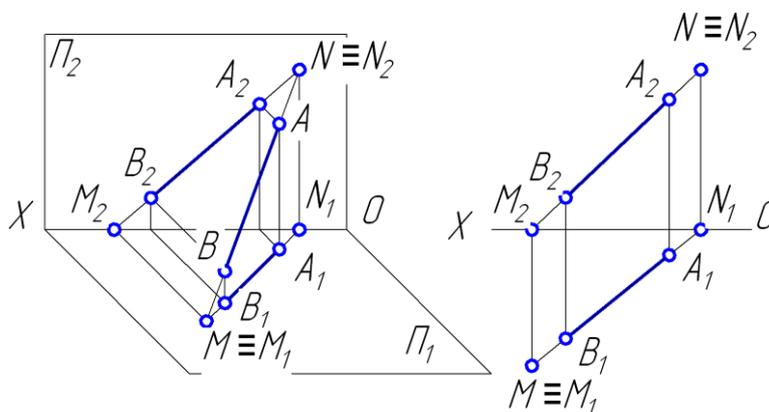


Рис. 18. Слід прямої

### Правило

Для знаходження горизонтального сліду прямої необхідно продовжити фронтальну проекцію прямої до перетину з віссю  $OX$ ; з цієї точки провести перпендикуляр до осі  $OX$  і продовжити його до перетину з горизонтальною проекцією заданої прямої, ця точка і буде шуканою.

Для знаходження фронтального сліду прямої необхідно продовжити горизонтальну проекцію прямої до перетину з віссю  $OX$ ; з цієї точки провести перпендикуляр до осі  $OX$  і продовжити його до перетину з фронтальною проекцією заданої прямої, ця точка і буде шуканою.

Сліди  $M$  і  $N$  прямої ділять її на частини, що розміщені в різних октантах і на які простір розбивають площини  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ . Тому за проєкціями прямої або її слідами можна визначити положення прямої в просторі відносно площин проєкцій, встановити, через які октанти вона проходить.

### Положення точки і прямої

Інцидентність точки і прямої паралельним проєкціюванням не порушується. На основі цієї властивості можна сформулювати умову належності точки прямій у просторі (рис. 19).

#### Твердження

Якщо в просторі точка лежить на прямій, то на епюрі проєкції точки лежать на однойменних проєкціях цієї прямої.

Якщо в просторі пряма проходить через точку, то на епюрі проєкції прямої проходять через однойменні проєкції цієї точки.

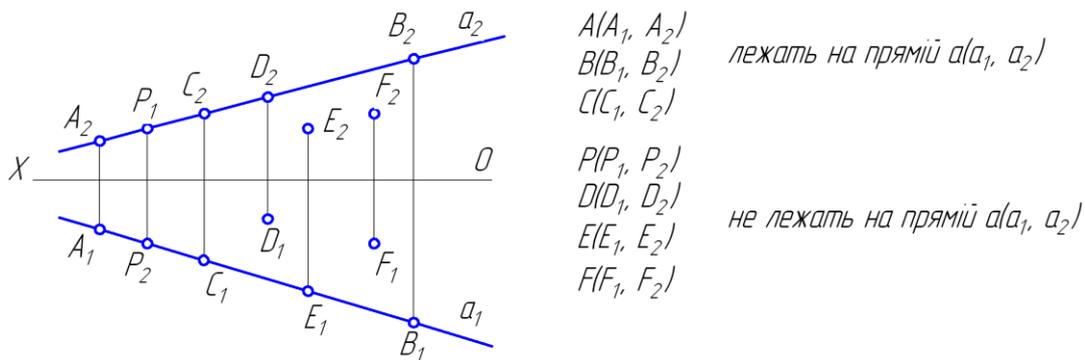


Рис. 19. Положення точки і прямої

#### Висновок

Якщо хоч одна із проєкцій точки не лежить на відповідній проєкції прямої, то точка не лежить на прямій.

### Взаємне положення двох прямих

Прямі лінії у просторі, що проходять через два відрізки, що їх визначають і в залежності від відносного розташування відрізків можуть бути *паралельними, перетинатися або мимобіжними*.

#### Твердження

Якщо дві прямі у просторі паралельні, то їх однойменні проєкції також паралельні (рис. 20, а).

Для прямих загального положення справедливе й *обернене твердження*: якщо дві однойменні проєкції прямих попарно паралельні, то прямі у просторі паралельні.

Якщо дві прямі у просторі перетинаються, то їх однойменні проєкції перетинаються між собою в точках, які є проєкціями точки перетину даних прямих, при цьому ці точки-проєкції повинні лежати на одному й тому ж перпендикулярі до відповідної осі проєкцій (рис. 20, б).

Якщо дві прямі не паралельні і не перетинаються, то вони мимобіжні (рис. 20, в).

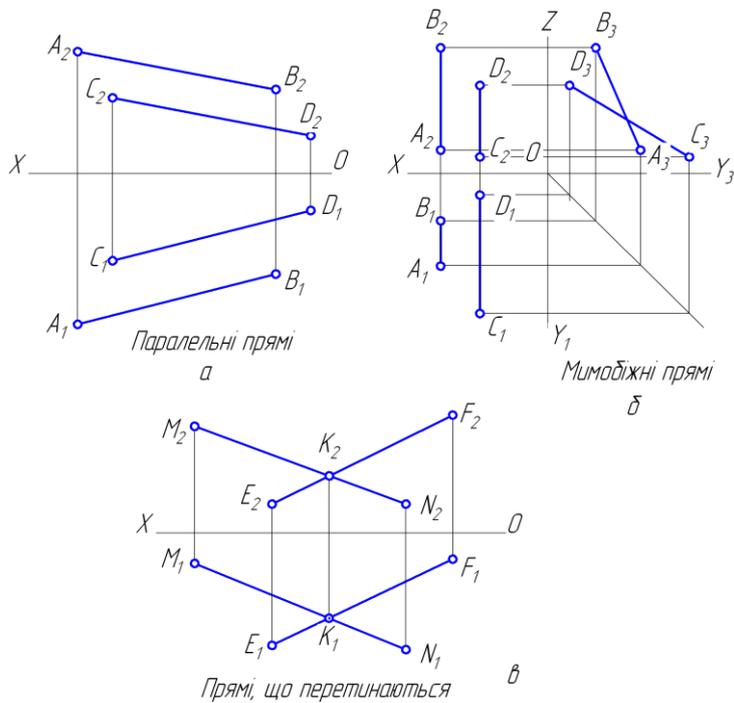


Рис. 20. Взаємне положення двох прямих

### Ділення відрізка прямої в заданому відношенні

Відрізок прямої лінії можна поділити точкою у будь-якому заданому відношенні. Точка може бути розташованою як на самому відрізку, так і за межами, тобто на продовженні його.

### Твердження

Якщо точка належить відрізку прямої, то вона ділить відрізок у будь-якому заданому відношенні. Таке ділення називається *внутрішнім* (рис. 21, а).

Якщо точка належить прямій даного відрізка, але лежить не на відрізку, а на його продовженні, то вона також ділить відрізок у будь-якому заданому відношенні. Таке ділення називається *зовнішнім* (рис. 21, б).

### Правило

Щоб поділити відрізок прямої у заданому відношенні, необхідно спочатку з будь-якої точки кінця відрізка довільно провести допоміжну пряму, яку поділимо у заданому відношенні, наприклад 2:3, на рівні частини будь-якої довжини (на рис. 21 – відкладено п'ять однакових відрізків). Крайню точку з'єднуємо з іншим кінцем відрізка і через точку, що ділить відрізок у заданому відношенні проводимо промінь паралельно до побудованого відрізка.

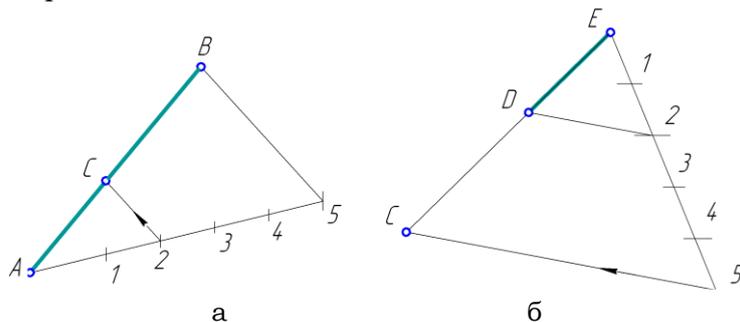


Рис. 21. Ділення відрізка прямої у заданому відношенні

## Визначення довжини відрізка прямої і кутів нахилу його до площин проекцій

Пряма лінія, що займає у просторі довільне положення, нахилена до площин проекцій під довільними кутами. Кут між прямою і площиною визначається кутом, який складається з прямої та її ортогональної проекції. Цей же кут можна визначити як додатковий до гострого кута між прямою і направленням площини, утворюючи кут  $90^\circ$ .

Довжину відрізка прямої і кут його нахилу до площин проекцій можна визначити, використовуючи побудову прямокутного трикутника.

Схема розв'язку задачі і приклад наведено на рисунку 22 а, б.

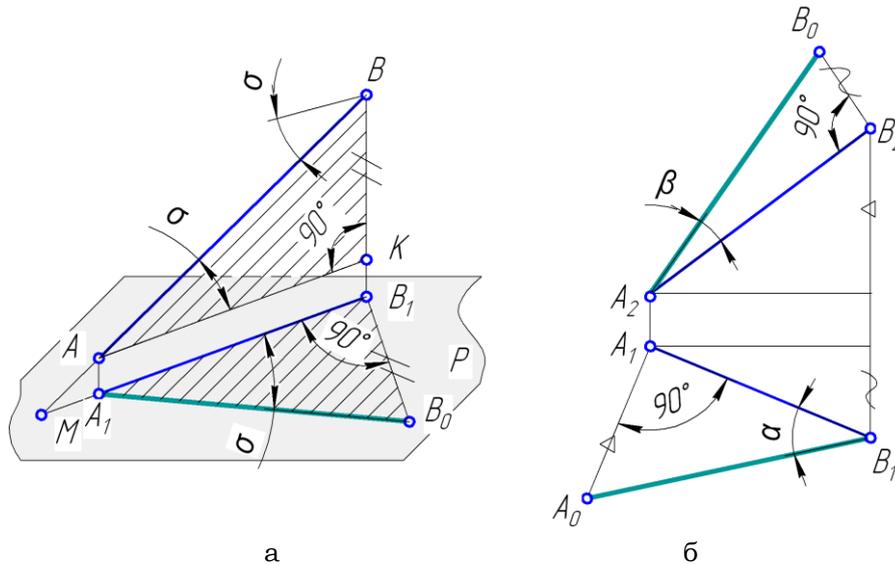


Рис. 22. Визначення довжини відрізка та кутів нахилу його до площин проекцій

У прямокутному трикутнику АВК (рис. 22, а) один з катетів дорівнює проекції відрізка на площину Р, а другий – різниці віддалей точок А і В кінців даного відрізка від площини Р ( $BK=BB_1-AA_1$ ). Гіпотенуза АВ прямокутного трикутника нахилена до катета АК під кутом  $\sigma$ , який дорівнює куту нахилу відрізка АВ до площини Р.

Побудований в площині Р прямокутний трикутник  $A_1B_1B_0$  визначає дійсну величину прямої лінії, а кут  $\sigma$  – кут нахилу прямої до площини проекцій.

### Твердження

Довжину відрізка прямої за його проекціями можна визначити як гіпотенузу прямокутного трикутника, одним з катетів якого є одна з проекцій даного відрізка, а другим катетом – абсолютна величина алгебраїчної різниці відстаней від кінців другої проекції відрізка до осі проекцій.

Якщо відрізок паралельний до горизонтальної площини проекцій, то кут між горизонтальною проекцією даного відрізка і віссю проекцій дорівнює куту нахилу самого відрізка до вертикальної площини проекцій.

Якщо відрізок паралельний до вертикальної площини проекцій, то кут між вертикальною площиною даного відрізка і віссю проекцій дорівнює куту нахилу самого відрізка до горизонтальної площини проекцій.

Кут у трикутнику між катетом – горизонтальною проекцією відрізка і гіпотенузою, його дійсною величиною, дорівнює куту нахилу самого відрізка до горизонтальної площини проекцій (рис.22, б – кут  $\alpha$ ).

Кут у трикутнику між катетом – вертикальною проекцією відрізка і гіпотенузою, його дійсною величиною, дорівнює куту нахилу самого відрізка до вертикальної площини проекцій (рис. 22, б – кут  $\beta$ ).

### Випадки проекціювання плоских кутів

#### Твердження

Прямий кут проекціюється у вигляді прямого кута, тоді коли одна з його сторін паралельна до однієї з площин проекцій, а друга не перпендикулярна до цієї ж площини.

Якщо обидві сторони будь-якого кута паралельні до однієї з площин проекцій, то на цю площину проекцій він проекціюється в дійсну величину.

#### Теорема

Якщо у просторі задано дві взаємно перпендикулярні прямі, що перетинаються, і одна з них розташована паралельно площині проекцій, то їх проекції на цій ж площині проекції також будуть взаємоперпендикулярні.

#### Запитання для перевірки знань

1. Як можуть бути розташовані прямі лінії і відрізки прямих стосовно площин проекцій?
2. Чи можуть співпадати горизонтальна і фронтальна проекції прямої? Фронтальна і профільна?
3. Чи може бути проекція відрізка прямої бути довшою за самого відрізка?
4. Які прямі називаються прямими рівня і як вони проекціюються на площини проекцій?
5. Які прямі називаються проекціювальними прямими і як вони проекціюються на площини проекцій?
6. Як визначити кути нахилу прямої загального положення до площин проекцій?
7. Яке взаємне положення можуть займати дві прямі у просторі?
8. Як поділити відрізок у заданому відношенні?
9. Коли прямий кут проекціюється в дійсну величину?

## 2.6. ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИН ТА ЇХ ВІДСІКІВ

Площина в усіх напрямленнях безмежна, не має кривизни і структурних складових. Інформація стосовно площини включає дані про її форму, положення, орієнтацію і розміри її орієнтації.

Форма площини характерна тим, що до неї можна прикласти пряму, яка може мати будь-яке направлення. У будь-якому місці й в усіх варіантах положення прямої всі її точки співпадають з площиною.

Площина у просторі повністю визначається наступними геометричними елементами (рис. 23):

- 1) трьома точками  $A, B, C$ , які не лежать на одній прямій;
- 2) прямою  $N$  і точкою  $C$ , яка не лежить на цій прямій;
- 3) двома прямими, що перетинаються –  $N$  і  $F$ ;
- 4) двома паралельними прямими –  $N$  і  $M$ ;
- 5) будь-яким відрізком, наприклад, трикутником  $ABC$ .

Положення і орієнтацію площини також можна задати однією точкою і напрямленням нормалі до площини. При цьому від одного виду задання площини можна легко перейти до іншого.

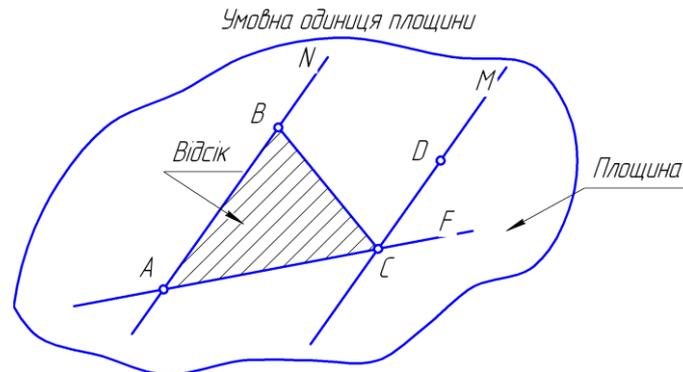


Рис. 23. Способи задання площини

Площина не може приймати участь в утворенні форми деталі, так як вона безмежна. Проекції всіх точок площини співпадають з усіма точками площини проєкцій. Тому в техніці прийнято задавати площину її відріzkами. На практиці найчастіше площину задають прямокутником або колом. Один відрізок задає одну площину, але одна площина не може мати будь-яку кількість відрізків.

#### Спосіб слідів

При розв'язуванні практичних задач часто застосовують зображення площини на епюрі за допомогою прямих ліній, по яких вона перетинає площини проєкцій  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ .

#### Означення

Слідом площини називається пряма, по якій ця площина перетинається з площиною проєкцій (рис. 24).

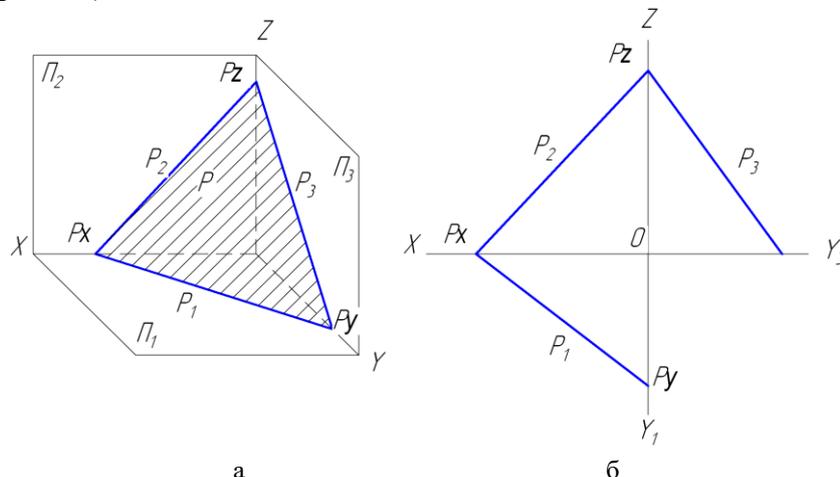


Рис. 24. Сліди площини

На рис. 24 дано наочне зображення і епюр площини  $P$ , заданої її слідами  $P_1, P_2$  і  $P_3, P_x, P_y, P_z$  – точки сходження слідів.

Положення площини в просторі повністю визначається заданням двох її слідів. Кожна пара слідів площини перетинається на відповідній осі проекцій, ця точка перетину називається *точкою сходження слідів*. Площина загального положення має слід у кожній площині проекцій, ці сліди утворюють *трикутник слідів* (рис. 24, б).

### Означення

Пряма перетину даної площини  $P$  з горизонтальною площиною проекцій називається *горизонтальним слідом площини* ( $P_1$ ), з фронтальною площиною проекцій – *фронтальним слідом* ( $P_2$ ), з профільною площиною проекцій – *профільним слідом* ( $P_3$ ).

Слід площини на площині проекцій збігається зі своєю проекцією на цій площині, а друга проекція цього ж сліду лежить на відповідній осі проекцій.

Сліди площини у площинах проекцій завжди можна знайти, якщо вони існують, при будь-якому заданні площини.

### Відсік площини

Інформацією про відсік площини є: тип, склад, структура, форма і розміри форми, положення і розміри положення, орієнтація і розміри орієнтації.

Перерахована інформація про відсік перекриває інформацію про площину. Це підтверджує можливість і однозначність задання площини її відсіком.

Відсік площини є одним з носіїв форми об'єкта їх поділяють на: *відсік* («наповнений»), *відсік порожній* і *відсік складний*. Прикладом наповненого відсіку є відсік, який утворює контур трикутника  $ABC$  (рис. 23) і частина площини, що розташована в середині його. Усі точки контуру співпадають із площиною.

*Структура відсіку* – відносне розташування контуру і частини площини, що лежить у середині їх. Частина площини, що входить до структури і складу відсіку, умовно заштрихована (рис. 23).

Форму пустих відсіків утворюють форми їх контурів. Форми відсіків можуть бути симетричними відносно центру, осі (осей) і площини симетрії.

*Розмірами відсіку* є:

- розміри форми контуру;
- розміри положення і орієнтації контуру.

Розміри форми відсіку проставляють за допомогою внутрішньої системи координат, пов'язаної з контуром відсіку.

*Положення і орієнтацію відсіку* вказують три точки, що належать контуру. Координати цих точок задають по зовнішній системі координат.

До складу складного відсіку входять: основний відсік та порожністі відсіки.

*Структуру складного відсіку* утворюють:

- контур відсіку (зовнішнього);
- контури порожнистих відсіків (внутрішні);
- частина площини, яка розташована всередині зовнішніх контурів відсіку та внутрішніх контурів порожнистих відсіків.

*Форму складного відсіку* утворюють:

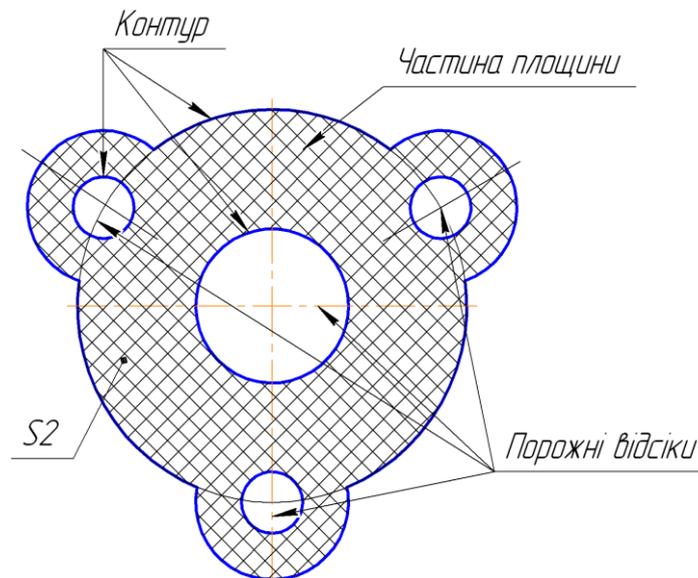
- форма контура відсіку;

- форми контурів порожнистих відсіків, їх положення і орієнтація відносно одне одного і зовнішнього контуру.

*Розмірами складних відсіків є:*

- розміри форми порожнистих відсіків;
- розміри відносного положення і орієнтації порожнистих відсіків;
- розміри положення і орієнтації зовнішніх контурів.

Основною особливістю проєкцій відсіків є відсутність за умовчанням зображення площини або її частини, що входять до її складу. Прикладом форми такого відсіку є форма плоскої деталі (рис. 25), яка зображується однією проєкцією.



*Рис. 25. Розміри, форма і орієнтація складного відсіку*

Усі плоскі геометричні фігури відносяться до різноманітного типу плоских відсіків. Проєкція відсіку завжди повинна надавати інформацію про: склад, структуру, форму і розміри контуру, положення і орієнтацію їх розмірів.

Плоскі відсіки необхідно орієнтувати так, щоб вони були паралельними до будь-якої площини проєкцій. Така проєкція точно відобразить форму і розміри відсіку.

Інформація, яка не вказується за умовчанням на проєкціях (чи креслениках) відсіків – це:

- частина площини, яка входить до структури відсіку;
- відсіки вважаються плоскими, якщо на їх проєкціях відсутні додаткові відомості;
- на креслениках відсіків не проставляють кути – 0, 90, 180° між відрізками контурів і таке інше;
- не зазначають довжину однакових відрізків контур (сторони правильних геометричних фігур – трикутника, квадрата і т. ін.).

Стосовно площин проєкцій відсік і площина займають довільне положення (загальне положення, рис. 26) і *особливе* (часткове, рис. 27, 28). Площини особливого положення – це площини рівня і проєкціювальні. Далі на креслениках площини будемо задавати відсіками.

Площина загального положення як і будь-який її відсік, похила до всіх трьох площин проєкцій. Головною інформацією про площину загального положення є дані про її орієнтацію, інакше про величину двограних кутів, які вона утворює з кожною площиною проєкцій. На рисунку 26 площина загального положення задана відсіком ABC – трикутником, сторонами якого є відрізки – AB, BC і CA.

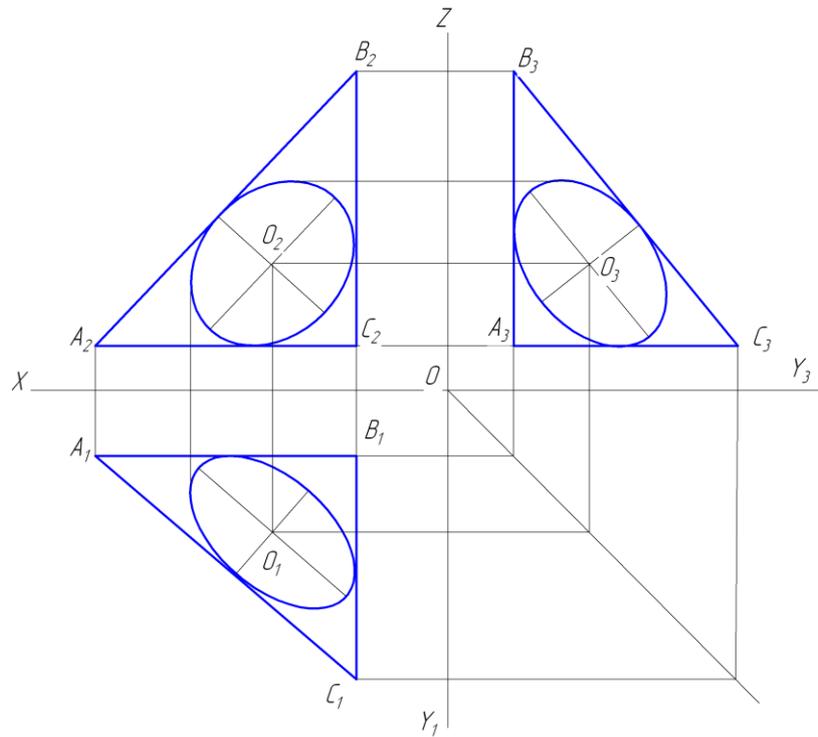
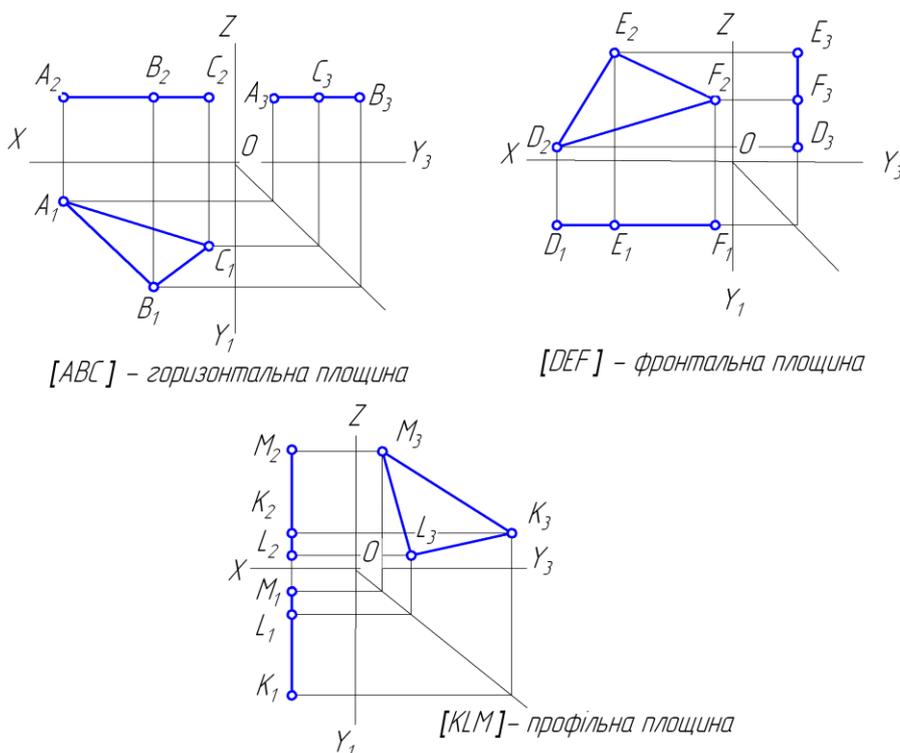


Рис. 26. Площина і відсік загального положення

У контури відсіку вписано коло. Його проєкції мають форму еліпсів. Великі вісі еліпсів дорівнюють довжині діаметра кола і їх проєкції паралельні: на площині  $\Pi_1$  – горизонталі, на площині  $\Pi_2$  – фронталі, на площині  $\Pi_3$  – профільній прямій. Довжина малих осей залежить від кутів нахилу відсіку до площин проєкцій, якщо ці кути різні по величині, то і їх довжини також будуть різними і відповідно форма проєкцій відсіків відрізняється від дійсної форми відсіку по-різному (рис. 26).



[ABC] – горизонтальна площина

[DEF] – фронтальна площина

[KLM] – профільна площина

Рис. 27. Площини рівня

## Означення

Площина, яка не паралельна і не перпендикулярна до жодної з площин проєкцій, називається площиною *загального положення* (рис. 26).

Площина, яка паралельна до однієї з площин проєкцій називається *площиною рівня* (рис. 27).

Площина, яка перпендикулярна до однієї з площин проєкцій називається *проєкціювальною площиною* (рис. 28).

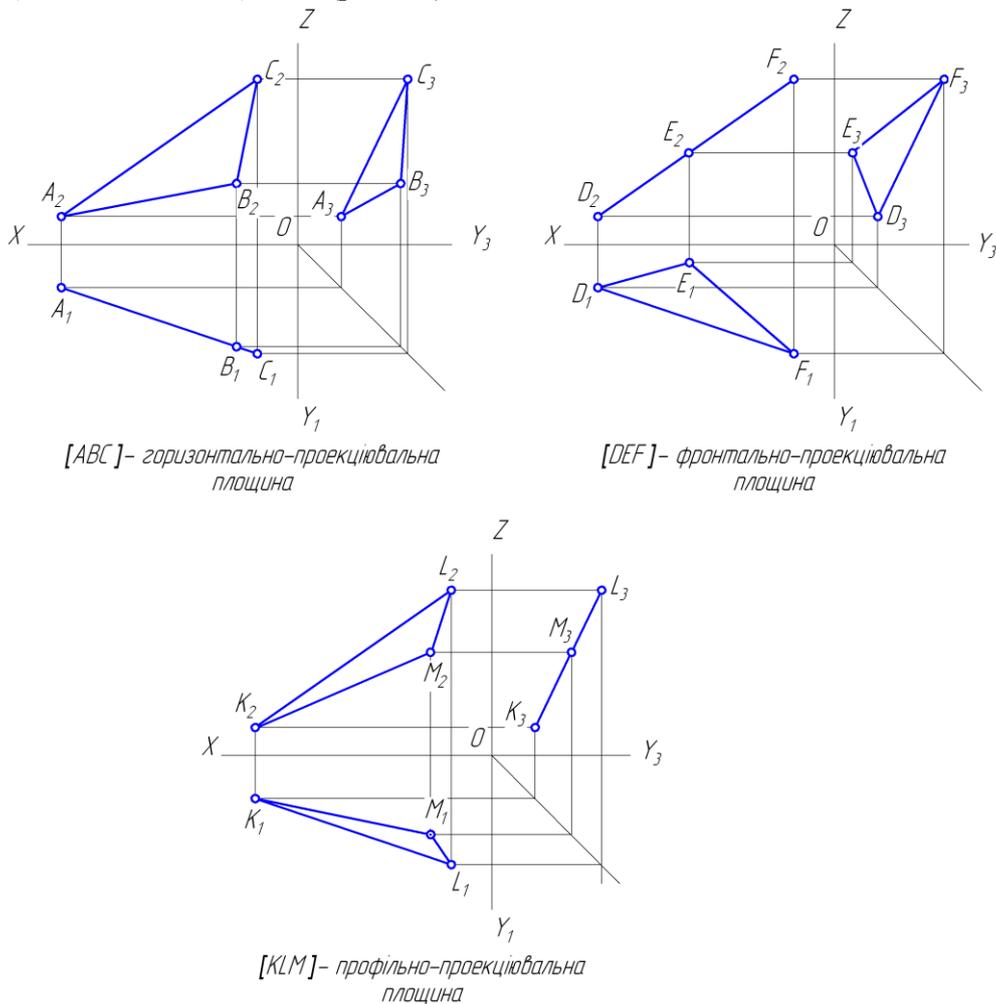


Рис. 28. Проєкціювальні площини

## Запитання для перевірки знань

1. Які є способи задання площини на кресленику?
2. Яке положення займає площина стосовно площин проєкцій?
3. Що таке слід площини та які його властивості?
4. Які дві прямі є слідами:
  - площини загального положення;
  - горизонтально-проєкціювальної;
  - фронтально-проєкціювальної;
  - профільно-проєкціювальної.

5. Що таке відсік площини?
6. Які є види відсіків і які вони мають відмінності?
7. Чим відрізняються площини рівня від проєкціювальних площин?

## 2.7. ПРЯМІ ЛІНІЇ І ТОЧКИ НА ПЛОЩИНІ

Для побудови зображення прямої лінії, яка лежить в даній площині, використовують відомі з елементарної геометрії **твердження**:

пряма належить площині, якщо вона проходить через дві точки, що лежать на цій площині;

пряма належить площині, якщо вона проходить через точку, що лежить у цій площині, і паралельна прямій, що також лежить в цій площині;

прямі у площині можуть займати різні положення відносно площин проєкцій.

У площині, крім прямих довільного (загального) положення можна намітити і лінії, що займають особливе положення відносно площин проєкцій – *головні лінії площини*. До таких ліній відносяться (рис. 29):

- 1) прямі лінії, які паралельні до площин проєкцій – *горизонталь* (h), *фронталь* (f) і *профільна пряма*;
- 2) *лінії найбільшого нахилу площини* до площин проєкцій (BL, VM).

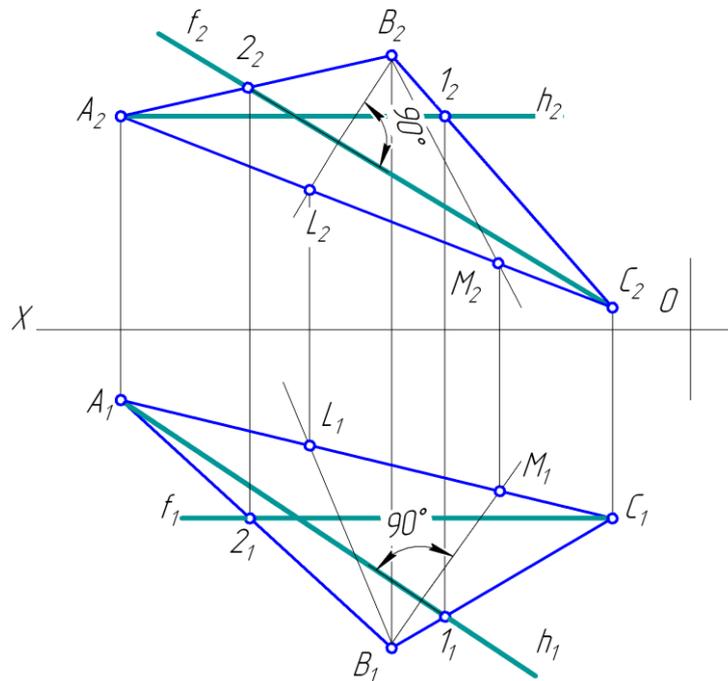


Рис. 29. Головні лінії площини

### Означення

Пряма h, яка лежить у даній площині  $[\Delta ABC]$  і паралельна горизонтальній площині проєкцій  $\Pi_1$ , називається *горизонталлю площини*  $[\Delta ABC]$ .

Пряма f, яка лежить у даній площині  $[\Delta ABC]$  і паралельна фронтальній площині проєкцій  $\Pi_2$ , називається *фронталлю площини*  $[\Delta ABC]$ .

Пряма, яка лежить у даній площині  $[\Delta ABC]$  і паралельна профільній площині проєкцій  $\Pi_3$ , називається *профільною прямою*.

*Лінією найбільшого нахилу площини* до площин проєкцій  $\Pi_1$  або  $\Pi_2$  називають прямі (BL, BM), що лежать в даній площині і перпендикулярні відповідно до горизонталі або фронталі цієї площини.

*Лінією найбільшого скату площини* називається пряма (BM), яка лежить в цій площині й перпендикулярна до горизонтальної проєкції горизонталі даної площини.

На основі властивості паралельного проєкціювання про взаємну перпендикулярність прямих ліній встановлено, що прямий кут, утворений горизонталлю і лінією найбільшого нахилу, проєціюється на цю площину без спотворення.

В окремому випадку прямі, що визначають площину, можуть лежати на самих площинах проєкцій. Тоді ці прямі називаються *слідами площини*, тому що по цих прямих площина (яка визначається) перетинається з площинами проєкцій.

Побудова точки, яка належить даній площині, передбачає побудову в цій площині прямої, що проходить через дану точку.

### **Твердження**

Точка, взята на будь-якій з прямих, що визначають площину, належить даній площині.

Пряма належить площині, якщо вона має з площиною дві спільні точки.

Довільна точка належить площині, якщо вона належить прямій, яка лежить у цій площині.

Будь-яка точка, що лежить на горизонтальному чи фронтальному слідів площини, належить цій площині.

Пряма лежить у площині, якщо її сліди лежать на однойменних слідах площини.

Пряма належить площині, якщо одна її проєкція паралельна одному з слідів цієї площини, а друга проєкція має з іншим слідом площини спільну точку (наприклад, горизонталь і фронталь площини).

Горизонталь площини і горизонтальний слід площини між собою паралельні. *Звідси* – проєкції горизонталі паралельні однойменним проєкціям горизонтального сліду площини.

Фронталь площини і фронтальний слід площини між собою паралельні. *Звідси* – проєкції фронталі паралельні однойменним проєкціям фронтального сліду площини.

Лінія найбільшого скату площини і горизонтальний слід площини між собою перпендикулярні. *Звідси* – горизонтальна проєкція лінії найбільшого скату площини перпендикулярна горизонтальному сліду площини (точніше, горизонтальній проєкції горизонтального сліду площини).

### **Запитання для перевірки знань**

1. Покажіть особливості побудови горизонталі, фронталі і лінії найбільшого нахилу площини загального положення.

2. Сформулюйте умови належності точки площині?
3. Що на епюрі характерно для точок і ліній, які лежать:
  - у горизонтально-проекціювальній площині;
  - у фронтально-проекціювальній площині;
  - у профільно-проекціювальній площині.
4. Сформулюйте твердження коли пряма належить площині?
5. Як будуються точки і прямі в площині?
6. Як на епюрі розташовані проекції горизонталі площини загального положення, заданої слідами?
7. Як на епюрі розташовані проекції фронталі площини загального положення, заданої слідами?
8. Які лінії є лініями найбільшого нахилу площини загального положення?
9. Яка лінія називається лінією скату площини?

## **2.8. ПОЗИЦІЙНІ І МЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ПРОЕКЦІЙ ПАР ЕЛЕМЕНТАРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР**

Геометричні фігури у просторі займають різні взаємні положення. Вони можуть належати одна одній, бути конгурентні – збігатися, а лінії, площини і поверхні – перетинатися по власних або невластних елементах.

Аналітично окреме взаємне положення описується залежностями між параметрами фігур, а кількість залежностей дорівнює кількості витрачених параметрів.

Характер взаємного положення двох геометричних елементів можна визначити за проекціями. Його ознаки визначаються позиційними властивостями проекцій пар геометричних елементів. Такі властивості є основою розв'язування позиційних задач нарисної геометрії, які передбачають геометричні побудови, пов'язані із взаємним положенням геометричних елементів. Прикладами позиційних задач можуть бути: побудова точки перетину прямої з площиною, побудова лінії перетину двох площин, або двох поверхонь, тощо.

### **Означення**

*Позиційними* називаються задачі, у ході розв'язування яких можна одержати відповідь про належність елемента (точки) чи підмножини (прямої) безмежності (поверхні).

До позиційних задач відносяться задачі на визначення спільних елементів, що належать різним геометричним об'єктам. *Першу групу задач* можна об'єднати як задачі на належність. До них відносяться задачі:

- а) належність точки прямій ( $A \in L$ );
- б) належність точки поверхні ( $A \in \Omega$ );
- в) належність прямої поверхні ( $L \in \Omega$ ).

До *другої групи* відносяться задачі:

- а) перетин двох прямих ( $M \cap N$ );
- б) перетин поверхні з поверхнею ( $\Sigma \cap \Omega$ );
- в) перетин прямої з поверхнею ( $L \cap \Omega$ ).

Під метричними розуміють задачі на визначення відстаней, кутів і площі в практиці інженерної діяльності. Метричні задачі «у чистому вигляді» трапляються рідко, значно частіше розв'язування метричних задач переплітається з розв'язуванням позиційних задач.

## **Означення**

*Метричними* називаються задачі, розв'язок яких пов'язаний із знаходженням характеристик геометричних елементів, які визначаються вимірюванням лінійних або кутових величин, встановлення справжньої форми фігур.

Різновидів метричних задач багато, проте кожна з них складається з двох основних:

1. Визначення відстані між двома елементами.
2. Знаходження величини кута між двома прямими, що перетинаються.

Інколи доводиться розв'язувати протилежну задачу: побудувати відрізок прямої або кут між двома прямими за заданими лінійними і кутовими величинами. Для розв'язання таких задач, крім повноти зображення, потрібно щоб це зображення було метрично визначеним.

Важливу роль при розв'язуванні метричних задач відіграє також побудова перпендикуляра до площини. На основі цих задач можна розв'язати будь-яку метричну задачу.

### Перетин площин, що задані слідами

Дві площини перетинаються по прямій лінії. Пряма лінія у просторі визначена, якщо відома одна точка цієї прямої і її направлення або дві точки цієї прямої.

Звідси витікає, що для того, щоб визначити пряму перетину двох площин необхідно знайти дві спільні точки площин, які визначають шукану пряму їх перетину, або одну таку точку і направлення лінії перетину.

В окремому випадку точками можуть бути сліди цієї прямої.

## **Твердження**

Оскільки дві площини перетинаються по прямій лінії, то для її побудови досить визначити:

- дві точки, які одночасно належать обом площинам;
- одну спільну точку і напрям лінії перетину.

Якщо площини задані своїми слідами, лінія перетину визначається точками перетину однойменних слідів площин.

Якщо хоча б одна пара однойменних слідів перетинається, то площини перетинаються.

Залежно від розташування площин у просторі, що перетинаються лінія їх перетину може мати в системі  $\Pi_1, \Pi_2$  два сліди (горизонтальний і фронтальний), один (горизонтальний чи фронтальний) або не мати жодного. Якщо пряма перетину має два сліди, то це – пряма довільного положення чи профільна пряма, чи пряма, яка перетинає вісь проєкцій. Якщо пряма перетину має один горизонтальний слід, то ця пряма паралельна фронтальній площині проєкцій (фронталь). Якщо пряма перетину має один фронтальний слід, то вона паралельна горизонтальній площині проєкцій (горизонталь). Якщо пряма перетину має один слід, то ця пряма паралельна осі проєкцій.

На рисунку 30 наведено приклад побудови лінії перетину площин заданих слідами. Лінія перетину двох площин, заданих слідами, будується по будь-яким точкам перетину в межах кресленика.

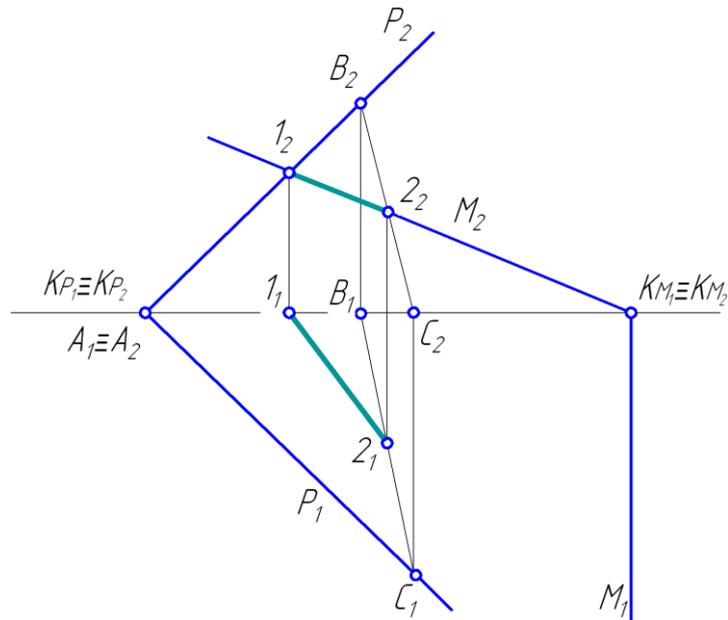


Рис. 30. Перетин площин, заданих слідами

На прикладі пряма  $AB(A_1B_1, A_2B_2)$  площини загального положення (фронтальний слід –  $P_2$ ) перетинається в точці  $1_{12}$  з проекціювальною площиною. Пряма  $AC(A_1C_1, A_2C_2)$  площини загального положення (горизонтальний слід –  $P_1$ ) не перетинається в межах кресленика з проекціювальною площиною. У цьому випадку в площині  $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$  намічаємо додаткову пряму, наприклад  $BC(B_1C_1, B_2C_2)$ . Вона перетинає проекціювальну площину в точці  $2$  ( $2_1, 2_2$ ). Пряма  $12$  ( $1_1, 1_2$ ) і буде шуканою прямою перетину заданих площин.

### Правило

- 1) для побудови лінії перетину площин використовують площину-посередник, у тому випадку, якщо одна пара однойменних слідів не перетинається в межах кресленика;
- 2) якщо ж обидві пари однойменних слідів не перетинаються в межах кресленика, то використовують дві площини-посередники;
- 3) за допомогою таких площин (площин-посередників) визначається напрям лінії перетину.

### Перетин прямої з площиною загального положення

Схема розв'язання задачі на побудову перетину прямої лінії з площиною є важливою серед інших позиційних задач курсу нарисної геометрії. Ця схема використовується і для розв'язування задач на побудову точок перетину прямих з поверхнею, на перетин поверхні площиною, побудову лінії перетину лінійчатиими поверхнями і т. ін. Для розв'язування багатьох задач у нарисній геометрії дуже часто використовуються проекціювальні площини як допоміжні (рис. 31).

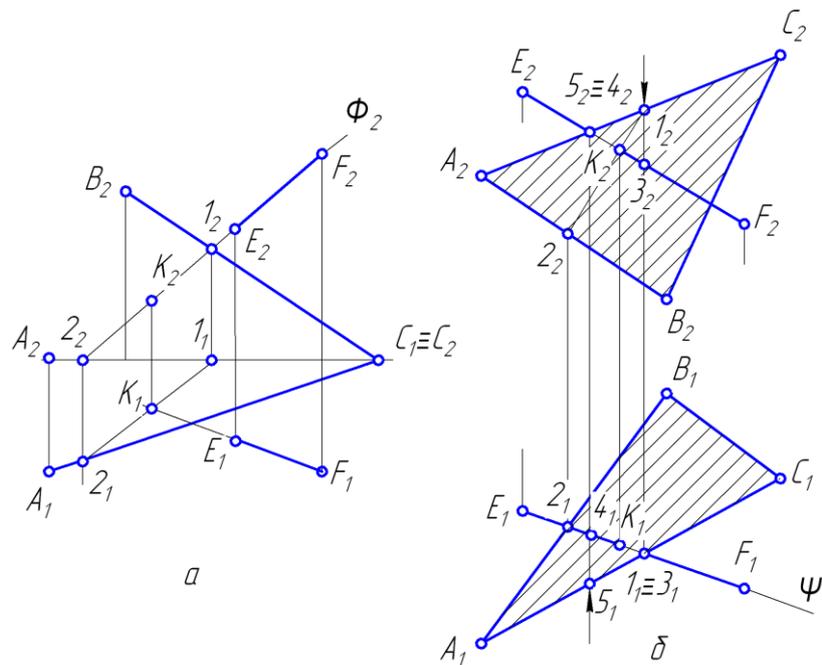


Рис. 31. Побудова точки перетину прямої з площиною

На рис. 31, а показано розв'язок задачі, де площина загального положення задана слідами; на рис. 31, б – площина задана трикутником АВС. Для визначення точки перетину  $K(K_1, K_2)$  використано допоміжні проєкціювальні площини: в першому випадку – фронтально-проєкціювальну  $\Phi_2$ ; у другому – горизонтально-проєкціювальну  $\Psi_1$ .

Видимість прямої стосовно площин проєкцій визначається за допомогою *конкуруючих точок* (на прикладі точки – 4, 5, рис. 31, б).

### Означення

*Конкуруючими* називаються точки, які лежать на одному проєкціювальному промені.

Якщо дивитись за направленням проєкціювального промінню, то можна побачити ту конкуруючу точку, яка найбільше віддалена від площини проєкцій (або теж саме, найближче розташована до нас).

### Правило

Для побудови точки перетину прямої з площиною загального положення необхідно:

- через задану пряму провести будь-яку допоміжну площину;
- побудувати пряму перетину заданої площини із допоміжною;
- визначити положення точки перетину прямих заданої і побудованої.

При побудові точки перетину прямої з площиною особливого положення побудова спрощується, оскільки одна з проєкцій точки перетину вже є на прямій, у вигляді якої площина проєкціюється на ту чи іншу площину проєкцій.

### Увага!

Якщо один з елементів перетину – або площина, чи пряма – проєкціювальні, то використовувати дане правило не рекомендується, так як у більшості таких випадках визначення точки перетину значно спрощується (рис. 32).

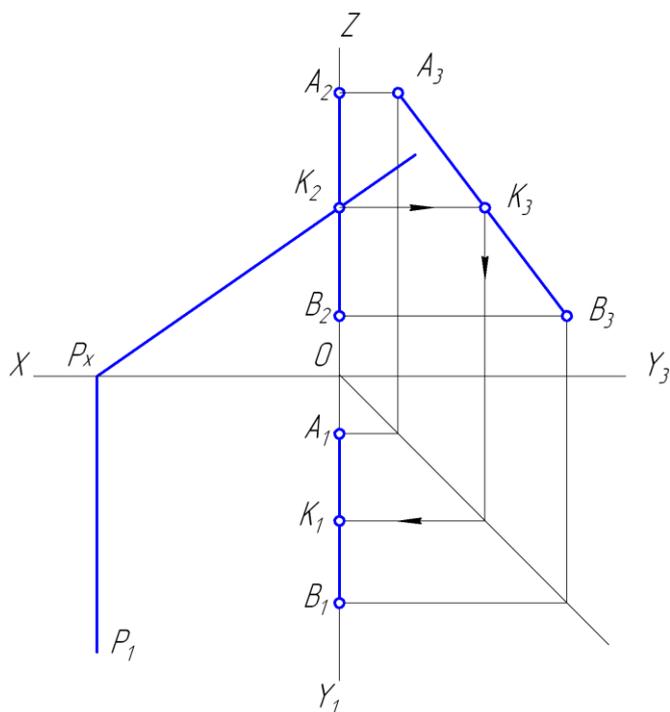


Рис. 32. Перетин прямої з проєкціувальною площиною

### Перетин двох площин довільного положення

Дві площини перетинаються по прямій лінії (рис. 33).

Задачу на перетин двох площин довільного положення можна розв'язати двома способами:

- 1) побудувати точки перетину двох прямих однієї площини з іншою площиною, інакше двічі використати алгоритм пошуку точки перетину прямої з площиною;
- 2) використавши дві допоміжні розгинальні площини особливого положення.

Отже, для побудови лінії перетину площин необхідно визначити дві спільні, для них точки.

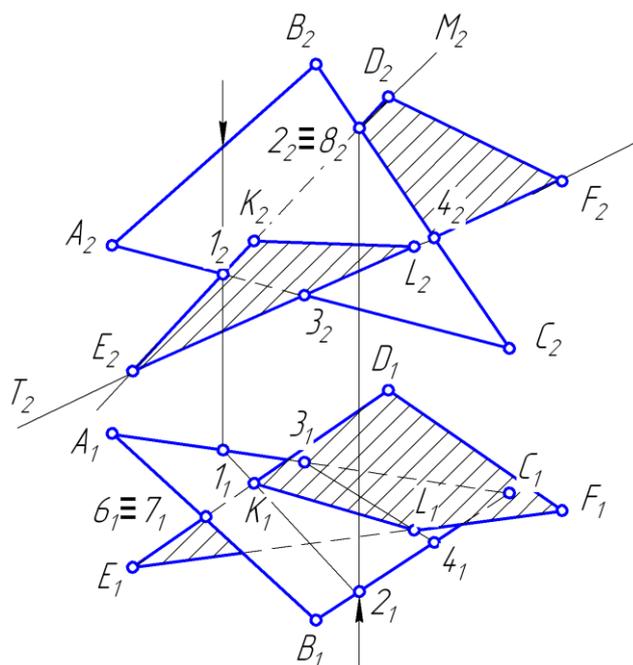


Рис. 33. Побудова лінії перетину площин довільного положення

## Паралельність прямої і площини Паралельність площин

### Твердження

Пряма і площина паралельні, якщо в площині можна провести пряму, яка паралельна заданій прямій. Через кожну точку простору можна провести безмежність прямих, які паралельні заданій прямій (рис. 34, а).

Дві площини, що задані слідами, паралельні, якщо їх однойменні сліди між собою паралельні. Протилежна теорема не завжди справедлива в системі площин проєкцій  $\Pi_1, \Pi_2$ . Наприклад, дві профільно-проєкціювальні площини паралельні тільки тоді, коли їх профільні сліди між собою паралельні.

Якщо дві прямі, що перетинаються однієї площини відповідно паралельні двом прямим іншої площини, то ці площини паралельні (рис. 34, б).

Головні лінії (горизонталь і фронталь) двох паралельних площин між собою паралельні. Ця особливість використовується для визначення паралельності двох площин, коли одна з площин чи обидві задані не слідами.

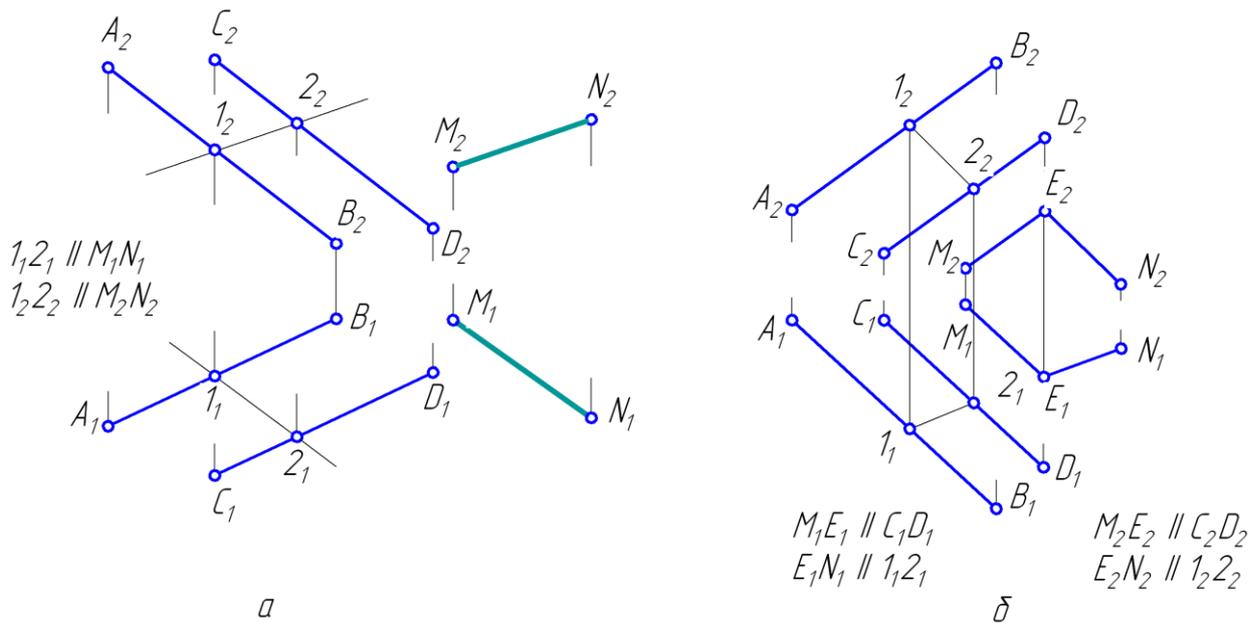


Рис. 34. Паралельність прямої і площини, площин

На рис. 34, б площина задана паралельними прямими  $AB$  і  $CD$ . Паралельність площин також можна встановити і за допомогою довільних прямих.

### Перпендикулярність прямої і площини. Перпендикулярність площин

На рис. 35 показано, що пряма  $EF$  перпендикулярна до площини  $Q$ , так як вона одночасно перпендикулярна до двох прямих  $AB$  і  $AC$  цієї площини.

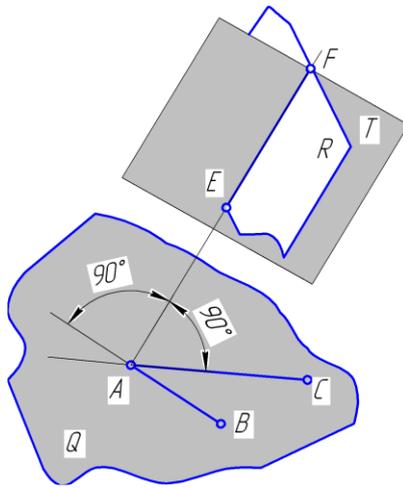


Рис. 35. Умова перпендикулярності прямої до площини

### Твердження

Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-яких двох прямих, що перетинаються цієї площини.

Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих площини, що перетинаються, то вона перпендикулярна до будь-якої множини прямих цієї площини.

Через кожну точку простору можна провести тільки одну пряму, яка перпендикулярна до даної площини. Таку пряму, як відомо, можна визначити напрямленням площини.

### Теорема

Пряма лінія перпендикулярна до площини, якщо її проекції перпендикулярні до однойменних проекцій напрямлення горизонталі і фронталі площини.

Таким чином, якщо є напрямлення горизонталі і фронталі площини, то можна визначити проекції прямої лінії, яка перпендикулярна до заданої площини (рис. 36).

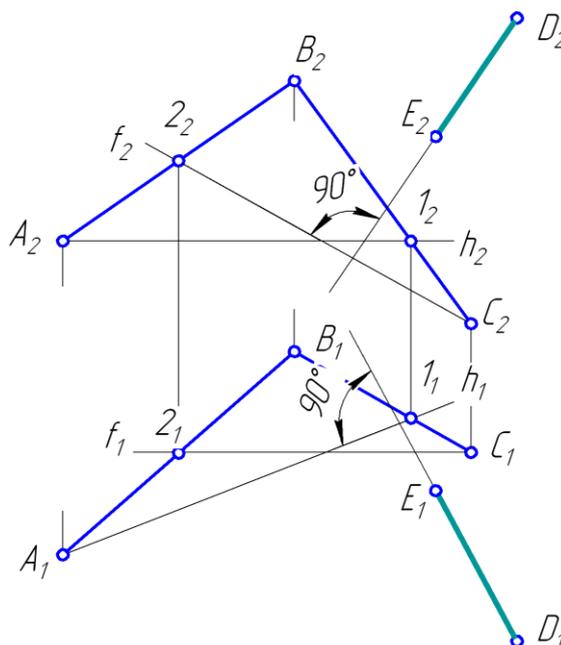


Рис. 36. Перпендикулярність прямої до площини

Горизонтальна проекція перпендикуляру утворює прямий кут з горизонтальною проекцією горизонталі площини. Фронтальна проекція перпендикуляру утворює прямий кут з фронтальною проекцією фронталі площини. На основі цієї теореми можна визначити і побудувати напрямлення заданих площин і площини зі заданим їхнім напрямленням. Пряма лінія  $ED$  ( $E_1D_1$ ,  $E_2D_2$ ) перпендикулярна до площини  $[\Delta ABC]$  і є напрямленням цієї площини (рис. 36).

Якщо площини проєкціювальні, то напрямлення цих площин будуть визначати прямі, які паралельні до площин проєкцій.

Таким чином, горизонтальна пряма є напрямленням горизонтально-проєкціювальної площини, фронтальна пряма – фронтально-проєкціювальної площини.

### Твердження

Якщо пряма перпендикулярна до площини, заданої слідами, то проєкції цієї прямої перпендикулярні відповідним слідам площини. Одночасно горизонтальна проєкція прямої перпендикулярна також до горизонтальної проєкції горизонталі, а вертикальна проєкція прямої перпендикулярна до вертикальної проєкції фронталі.

Дві прямі взаємоперпендикулярні, якщо одна з них лежить у площині яка перпендикулярна до другої прямої.

Дві площини взаємоперпендикулярні, якщо одна з площин утримує пряму, перпендикулярну до іншої площини.

Щоб одна з площин була перпендикулярна до іншої, достатньо, щоб одна з них проходила через перпендикуляр до іншої (рис. 37).

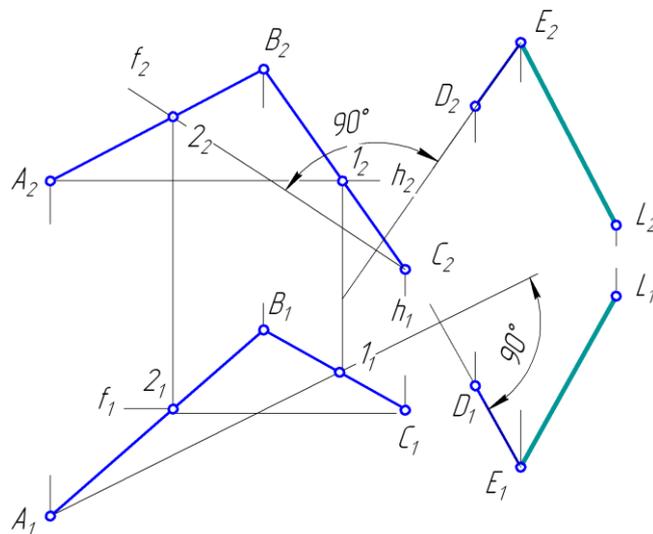


Рис. 37. Перпендикулярність площин

Якщо горизонтальні сліди двох горизонтально-проєкціювальних площин взаємоперпендикулярні, то й площини взаємоперпендикулярні.

Перпендикулярність горизонтальних слідів площини довільного положення і горизонтально-проєкціювальної площини відповідає взаємній перпендикулярності цих площин. Перпендикулярність фронтальних слідів площини довільного положення і фронтально-проєкціювальної площини відповідає взаємній перпендикулярності цих площин.

Якщо однойменні сліди двох площин, довільного положення, взаємоперпендикулярні, то ці площини не перпендикулярні між собою.

Кут між прямою і площиною і між двома площинами

### Твердження

Кутом між прямою і площиною є кут між прямою та її проекцією на даній площині.

Кут між двома прямими, що перетинаються можна визначити:

- 1) замкненням кута в трикутник – треба перетнути сторони кута довільною прямою і визначити дійсну величину трикутника, звідси визначаємо величину заданого кута;
- 2) обертанням (чи переміщенням) – треба поставити площину кута в положення, паралельне будь-якій площині проєкцій;
- 3) суміщенням – треба визначити один із слідів площини кута (горизонтальний чи вертикальний) і обертанням навколо сліду сумістити кут з відповідною площиною проєкцій;
- 4) обертанням навколо горизонталі чи фронталі – необхідно сумістити заданий кут з площиною, яка паралельна до горизонтальної (чи фронтальної) площини проєкцій та, яка проходить через довільну горизонталь (чи фронталь) площини кута;
- 5) заміною площин проєкцій – треба замінити площини проєкцій так, щоб одна з них стала паралельною площині заданого кута.

Примітка:

1. З усіх перерахованих способів розв'язування задачі найбільш простий і швидше приводить до мети четвертий.
2. Для прямих, які не лежать в одній площині, мірою кута між ними є кут між двома прямими, що перетинаються та, які паралельні даним.

### Означення

Кутом між прямою і площиною є гострий кут, який утворюється між цією прямою і її проекцією на дану площину.

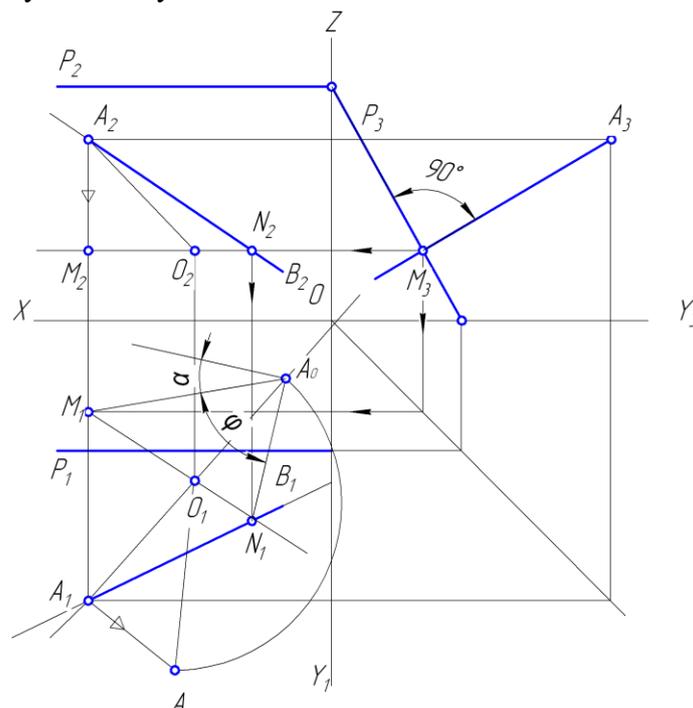


Рис. 38. Визначення кута між прямою і площиною

Прямий шлях із визначення цього кута вимагає ряд додаткових побудов і тому досить довгий. Його можна значно скоротити, визначаючи не шуканий кут  $\alpha$ , а його доповнення до  $90^\circ$ , інакше гострий кут  $\varphi$ , який утворюється між заданою прямою і перпендикуляром, опущеним із її довільної точки на площину.

У випадку, коли знайдений кут  $\varphi$  тупий, то необхідно для визначення шуканого кута  $\alpha$  від знайденого кута  $\varphi$  відрахувати кут, який дорівнює  $-90^\circ$  (рис. 38).

### Визначення відстаней

Відстань між двома точками, вимірюється довжиною відрізка, який з'єднує ці точки і її можна визначити наступним шляхом:

- 1) побудовою прямокутного трикутника;
- 2) обертанням або переміщенням – необхідно перевести відрізок у положення, паралельне одній з площин проєкцій;
- 3) суміщенням – необхідно заключити відрізок у будь-яку площину (найкраще – у горизонтально- або фронтально-проєкціювальну) і сумістити цю площину з будь-якою іншою;
- 4) заміною площин проєкцій – необхідно замінити одну з площин проєкцій на нову, яка повинна бути паралельною до даного відрізка.

### Запитання для перевірки знань

1. Показати на прикладі як визначити точки перетину проєкціювальних площин прямими лініями; лінію перетину проєкціювальної площини з площиною загального положення.

2. Укажіть послідовність розв'язування задачі на побудову точки перетину прямої з площиною загального положення.

3. Як визначити видимість елементів геометричних образів відносно площин проєкцій?

4. Укажіть послідовність побудови лінії перетину площин загального положення.

5. Наведіть приклади побудови лінії, яка б була паралельною до площини загального положення.

6. Сформулюйте умову паралельності та умову перпендикулярності двох площин.

7. Як визначити на кресленіку відстань від точки до проєкціювальної площини; площини загального положення?

8. Як визначити на кресленіку відстань від точки до прямої окремого і загального положення?

9. Як визначити кут між прямими; прямою і площиною?

## 2.9. СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОЄКЦІЙНОГО КРЕСЛЕНИКА

Дві ортогональні проєкції геометричного образу визначають його положення в просторі. Але довільне положення такого геометричного образу відносно площин проєкцій не завжди зручне для розв'язування ряду позиційних і метричних задач. Відбувається

спотворення в проєкціях форм об'єктів, що проєкціюються, відсутня необхідна наочність як об'єкта у цілому, так і окремих його елементів.

Таким чином, трудомісткість графічного розв'язування задач часто залежить не від складності, а від того, яке положення стосовно площин проєкцій займають геометричні елементи, що входять до вхідних даних. І не тільки метричні, а й одні й ті ж позиційні задачі можуть бути розв'язані дуже просто або потребують великої кількості допоміжних побудов, щоб їх розв'язати.

Нарисна геометрія має досить значну кількість способів перетворення ортогональних проєкцій, забезпечуючи більш зручний розв'язок задач. Найбільш поширеними є способи, основу яких становить змінення взаємного розташування площин проєкцій і геометричних елементів, що проєкціюються за рахунок переведення їх в окреме положення (особливе). Таке перетворення може бути здійснене двома шляхами:

1. Переходом від заданої системи площин проєкцій до нової, відносно якої геометричні елементи, не змінюють свого положення у просторі. У новій системі площин проєкцій вони займають окреме положення (особливе).
2. Переміщенням у просторі заданої геометричної фігури в окреме положення (особливе), перетворені площини проєкцій залишаються без змін.

Перший шлях лежить в основі способу заміни площин проєкцій, другий становить теоретичну базу способу паралельного переміщення.

Додаткові проєкції дозволяють отримати або вироджені проєкції окремих елементів, або їх натуральні величини.

## **Означення**

Побудова нових, додаткових проєкцій називається *перетворенням кресленника*.

### Спосіб заміни площин проєкцій

Ортогональні проєкції на дві взаємоперпендикулярні основні (горизонтальну і фронтальну) площини проєкцій дозволяють бачити предмет зверху і спереду. Але в деяких випадках предмет необхідно бачити і з інших сторін.

Отже, при розв'язанні геометричних задач заданий кресленник не завжди може бути зручним. Інколи необхідно будувати додаткові кресленники, які можуть бути результатом поставленої задачі або її спрощенням. Такі кресленники об'єкта можуть бути побудовані способом заміни площин проєкцій. При цьому об'єкт у просторі залишається без змін.

Отримати нові, більш зручні проєкції, можна шляхом переходу від заданих площин проєкцій до нових. Положення нових площин проєкцій треба вибирати так, щоб відносно них геометричний елемент чи фігура, яка проєкціюється, зайняла окреме положення (особливе).

На рис. 39, а наведено приклад проєкціювання точки А на додаткову площину проєкцій  $\Pi_4$ . Додаткову систему площин проєкцій утворюють дві взаємоперпендикулярні площини проєкцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_4$ . Перехід від однієї системи площин проєкцій до іншої на ортогональному кресленнику показано на рис. 39, б.

*Заміною однієї площини проєкцій можна:*

– пряму довільного положення перетворити на лінію рівня, якщо нову площину проєкцій вибрати паралельно заданій прямій. Тоді на епюрі вісь нової системи буде паралельна відповідній проєкції прямої;

- лінію рівня перетворити на проєкціювальну пряму, якщо нову площину проєкцій вибрати перпендикулярно до неї. На епюрі вісь нової системи площин проєкцій буде проходити під прямим кутом до тієї проєкції лінії рівня, яка є її справжньою величиною;
- площину загального положення можна перетворити на проєкціювальну, якщо нову площину проєкцій вибрати перпендикулярно до лінії рівня заданої площини;
- проєкціювальну площину можна перетворити на площину рівня, якщо нову площину проєкцій вибрати паралельно проєкціювальній площині. На епюрі вісь нової системи паралельна сліду проєкцій заданої площини.

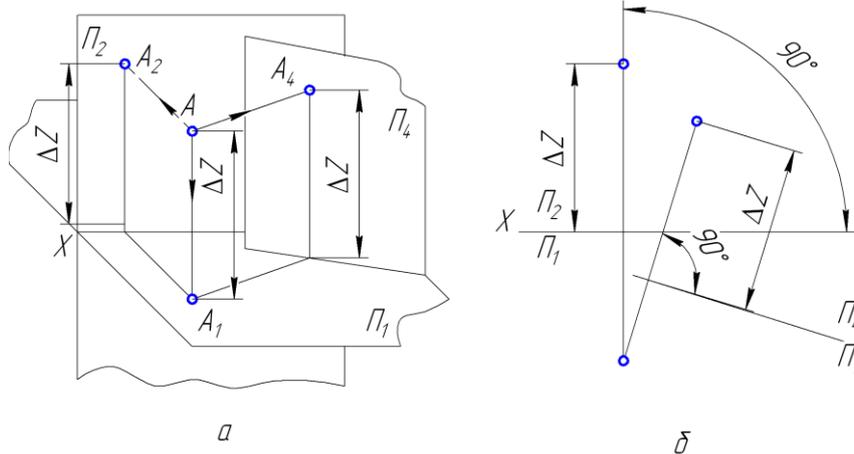


Рис. 39. Сутність способу заміни площин проєкцій

Послідовною заміною двох площин проєкцій можна:

- пряму довільного положення перетворити на проєкціювальну. Першою заміною вона перетворюється на лінію рівня, а другою – на проєкціювальну;
- площину довільного положення перетворити на площину рівня. Першою заміною вона перетворюється на проєкціювальну, а наступною – на площину рівня.

### Правило

Щоб площину загального положення перетворити в проєкціювальне положення необхідно за направлення площин проєкцій прийняти направлення горизонталі чи фронталі даної площини (рис. 40).

### Перетворення проєкційного креслення способом паралельного переміщення

Для одного й того ж геометричного образу способом заміни площин проєкцій можна побудувати множину креслеників, вибираючи для них відповідну систему площин проєкцій. Геометрично обидва способи ідентичні, але вони виконуються на креслениках по-різному.

У способі паралельного переміщення, на відміну від способу заміни площин проєкцій, переміщується геометричний об'єкт, площини проєкцій при цьому залишаються без змін. Переведення об'єкта із загального положення в окреме здійснюється шляхом його руху.

Сутність закону переміщення у тому, що всі точки об'єкта рухаються по траєкторіях, розташованих в паралельних площинах (звідси і назва способу).

В окремих випадках траєкторіями переміщення можуть бути кола, центри яких належать одній прямій – осі обертання. Цей окремий випадок називається *способом обертання*.

Спосіб обертання використовується не тільки для перетворення проєкцій. Він широко використовується в техніці під час розгляду і дослідження різноманітних обертальних форм конструкцій механізмів.

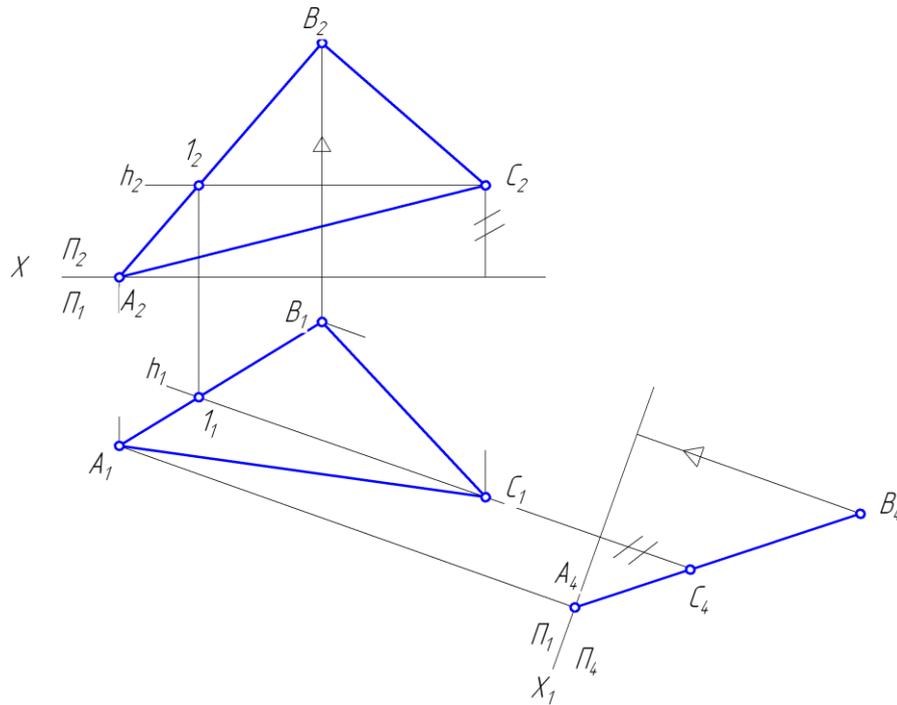


Рис. 40. Перетворення площини загального положення в проєкціювальне положення

Спосіб обертання навколо проєкціювальних прямих ліній дає можливість будувати множину креслеників в одній системі площин проєкцій. При цьому площини проєкцій залишаються без змін. Шляхом обертання навколо осей, перпендикулярних до площин проєкцій, предмет переміщується у нове положення. У цьому новому положенні будують його ортогональні проєкції, інакше будується кресленик об'єкта.

Суть способу обертання полягає в тому, що геометричним фігурам, які проєкціюються, обертанням навколо відповідних осей обертання надають відповідне положення відносно даної системи площин проєкцій, яка не змінюється (рис. 41).

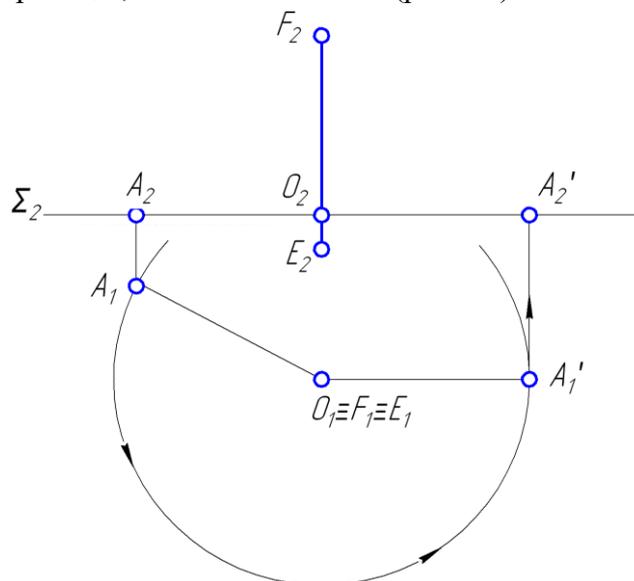


Рис. 41. Обертання точки навколо проєкціювальної осі

На рис. 41 вісь обертання  $EF(E_1F_1, E_2F_2)$  перпендикулярна до горизонтальної площини проєкцій  $\Pi_1$ . Шляхом точки буде коло – площина  $\Sigma_2$  називається *площиною переміщення точки*. Площина руху точки  $A_1A_2$  горизонтального положення і вона перпендикулярна до осі обертання.

Центром обертання точки  $A_1A_2$  є точка  $O_1O_2$ , перетину площини  $\Sigma_2$  руху осі обертання. Радіус обертання точки  $A_1A_2$  визначається відрізком  $A_1A_1', A_2A_2'$ , який дорівнює відстані від цієї точки до осі обертання.

Отже, залежно від розташування осі обертання відносно площини проєкцій поділяють:

- а) обертання навколо осі, яка перпендикулярна до площини проєкцій (рис. 41, 42);
- б) обертання навколо осі, яка паралельна площині проєкцій – обертання навколо сліду площини (рис. 43).

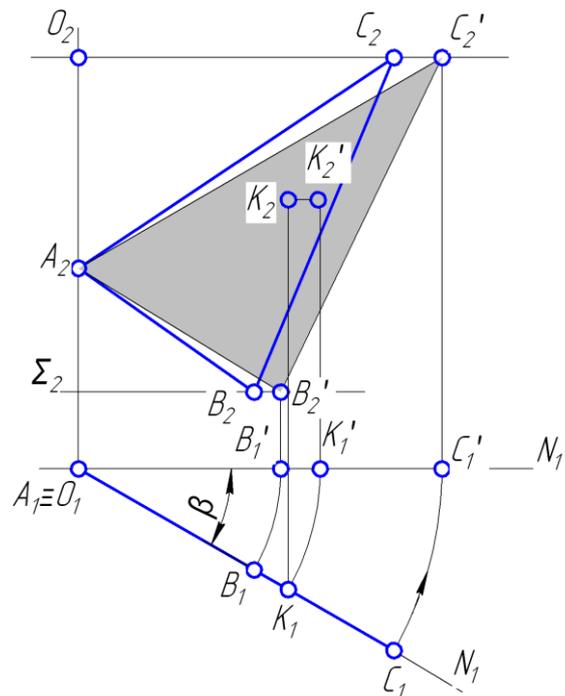


Рис. 42. Визначення дійсної величини трикутника методом обертання навколо проєкціювальної осі

На рисунку 42 методом обертання визначено дійсну величину трикутника  $[\Delta ABC]$ , який належить горизонтально-проєкціювальній площині  $N_1$ . На прикладі вісь обертання горизонтально-проєкціювальна, яка проходить через вершину  $A_1A_2$  трикутника. Обертанням навколо осі на кут  $\beta$  доводимо горизонтальну проєкцію площини  $[\Delta ABC]$  до положення, паралельного фронтальній площині проєкцій  $\Pi_2$ .

Усі вершини трикутника переміщуються по дугам кола, якими визначаються горизонтальні площини руху цих точок. Слід  $N_1'$  може бути зміщеним слідом площини  $N_1$  (в якій здійснюється обертання точок заданої площини  $[\Delta ABC]$ ).

Кожному з указаних варіантів способу паралельного переміщення відповідають конкретні геометричні побудови.

При суміщенні за вісь обертання приймається слід площини. Площину обертають до суміщення з площиною проєкцій, якій належить слід, прийнятий за вісь обертання.

### Правило

Оскільки вісь обертання належить площині проєкцій, то для знаходження суміщеного положення площини достатньо визначити суміщене положення тільки однієї точки, яка

належить площині та яка не лежить на осі обертання. За таку точку доцільно брати точку, що належить іншому сліду площини.

### Твердження

Для того щоб площину загального положення перевести у фронтально-проекціювальне, за вісь обертання необхідно прийняти пряму, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проєкцій.

Для того, щоб площину загального положення перевести у горизонтально-проекціювальне, за вісь обертання необхідно прийняти пряму, яка перпендикулярна до фронтальної площини проєкцій.

Натуральну величину плоского геометричного об'єкта можна визначити обертанням навколо осі, яка паралельна площині проєкцій. У цьому випадку геометричний об'єкт одним обертом навколо осі можна привести в положення, паралельне площині проєкцій (рис. 43).

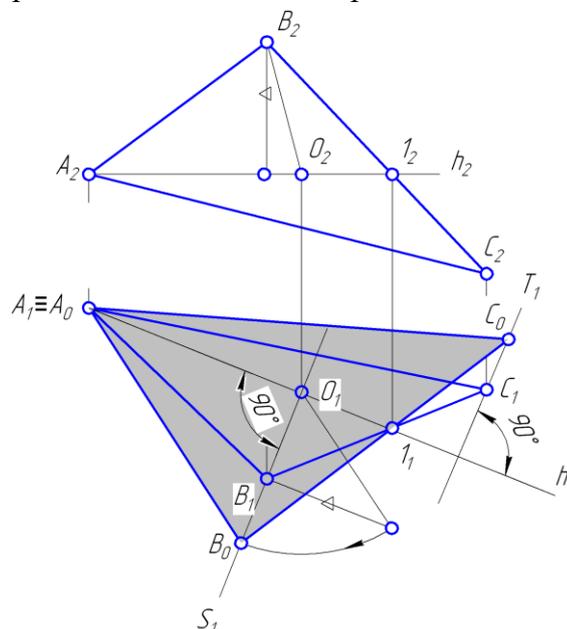


Рис. 43. Обертання навколо осі, яка паралельна площині проєкцій

На рис. 43 показано визначення натуральної величини трикутника  $[\Delta ABC]$  обертанням навколо горизонтальної прямої цієї площини – горизонталі. При цьому всі точки об'єкта обертаються навколо осі по колу в площинах, перпендикулярних до осей.

### Плоскопаралельне переміщення

Плоскопаралельне переміщення можна розглядати як обертання навколо невизначених проєкціювальних прямих. Тут усі точки геометричного об'єкта переміщуються у взаємоперпендикулярних площинах

### Теорема

При плоскопаралельному переміщенні геометричного об'єкта одна з його проєкцій, переміщуючись у площині проєкцій залишається без змін сама собі; інші проєкції точок геометричного об'єкта переміщуються по прямим, що паралельні напрямленню осі проєкцій.

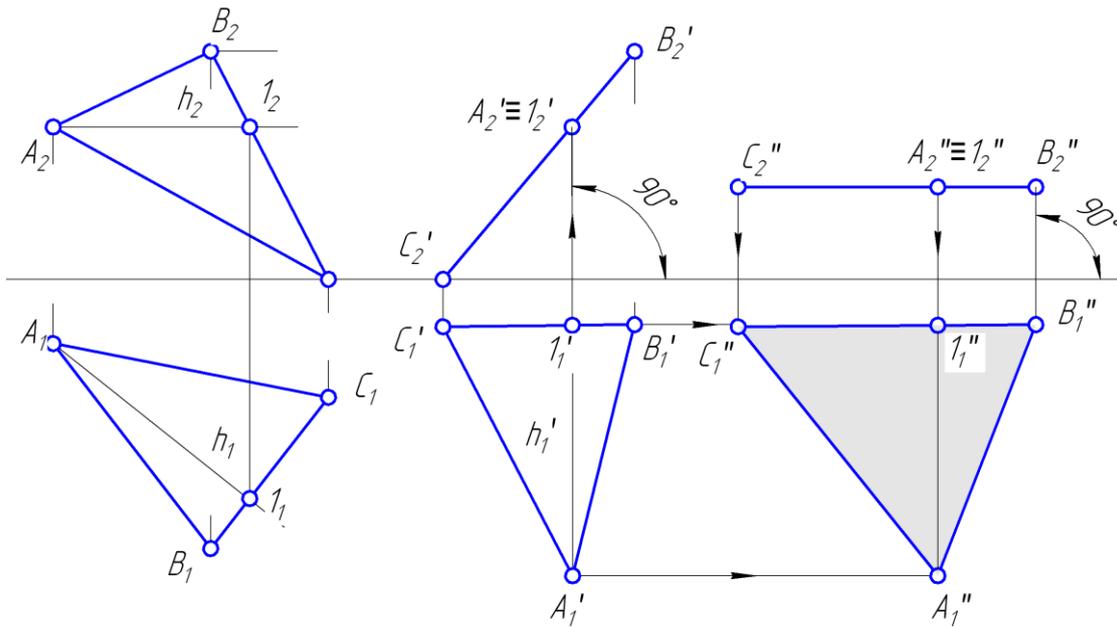


Рис. 44. Визначення дійсної величини відсіку площини методом плоскопаралельного переміщення

### Запитання для перевірки знань

1. У чому полягає сутність перетворення кресленика способом заміни площин проекцій?
2. Що визначає направлення нової площини проекцій при переведенні площини загального положення в проекціювальне положення?
3. Укажіть схему розв'язання задачі на визначення кутів нахилу площини до площин проекцій способом заміни площин проекцій.
4. Укажіть схему розв'язання задачі на визначення натуральної величини відсіку довільно розташованої площини способом заміни площин проекцій.
5. У чому полягає сутність перетворення кресленика способом обертання навколо проекціювальних прямих?
6. Яку пряму необхідно прийняти за вісь обертання при переведенні відсіку площини зі загального положення у горизонтально-проекціювальне?
7. Яку пряму необхідно прийняти за вісь обертання при переведенні відсіку площини зі загального положення у фронтально-проекціювальне?
8. Поясніть чи можна вважати плоскопаралельне переміщення обертанням навколо невиявлених осей (проекціювальних прямих) і чому?
9. Укажіть послідовність прийомів визначення натуральної величини відсіку площини способом плоскопаралельного переміщення.
10. Укажіть послідовність прийомів визначення натуральної величини відсіку площини способом обертання навколо прямих, паралельних площині проекцій.

## 2.10. КРИВІ ЛІНІЇ

Криві лінії використовуються у багатьох різноманітних галузях техніки і науки. Вони знаходять широке використання в практиці моделювання, розмітці; при побудові однотипних багатокомпонентних систем та інше.

Криві лінії – це контури багатьох інженерних конструкцій і споруд, деталей машин і механізмів, шлях об'єктів, що рухаються.

Розвиток технологій виготовлення поверхонь багатьох технічних форм вимагає в наш час докладного розвитку питання конструювання – геометричне моделювання.

Криву лінію можна представити як слід точки, що рухається.

Криві лінії також розглядають як межі поверхонь або як результат взаємного перетину поверхонь.

Способи утворення кривих ліній можуть бути різними. Одні криві лінії утворюються за визначеним законом (закономірні криві); утворення інших носить емпіричний (дослідницький) характер (незакономірні криві лінії).

Закономірні криві лінії можуть бути задані графічно і аналітично, інакше рівнянням. Незакономірні криві лінії задаються на кресленику тільки графічно.

### Означення

*Рівнянням кривої лінії* називають таке рівняння між перемінними, якому задовільняють координати будь-якої точки, що належить цій лінії.

*Порядком алгебраїчної кривої лінії* називають ступінь її рівняння.

Криві лінії, всі точки яких належать площині, *називаються плоскими*.

Крива, яка плавна в усіх її точках, *називається плавною кривою лінією*.

*Дотична* – пряма, що з'єднує дві найближчі точки кривої.

Закономірні криві лінії поділяються на *алгебраїчні*, ті що визначаються в декартових координатах алгебраїчними рівняннями і *трансцендентними* – визначаються неалгебраїчним рівнянням.

Проекції кривих у загальному випадку є кривими того ж або більшого порядку. Кожна з кривих ліній має більшу або меншу ступінь кривини. Ця кривина характеризується деякими числами і називається *кривиною лінії*.

У процесі побудови кривої лінії треба знати властивості, що зберігаються при ортогональному проєкціюванні:

- 1) дотичні до кривої проєкціюються у дотичні до її проєкцій;
- 2) невластим точкам кривої відповідають невластні точки її проєкцій.

### Твердження

Дотична до кривої проєкціюється в дотичну до проєкції кривої.

В окремому випадку, коли площина кривої паралельна площині проєкцій, крива та її проєкція конгруентні.

На рисунку 45 крива лінія АВ – плоска, вона побудована в площині Р. На кривій АВ візьмемо точку С і проведемо через неї розтинальну СЕ і СF. У процесі наближення точки Е до точки С розтинальна СЕ повертається навколо точки С. Коли точка Е співпаде з точкою С,

розгинальна СЕ досягне свого граничного положення. У цьому положенні розгинальна називається *напівдотичною* до кривої АВ у точці С. При наближенні точки Е до точки С розгинальна займає положення напівдотичної Т. У точці С<sub>1</sub> крива має злом і називається *точкою злому* або *точкою виходу*.

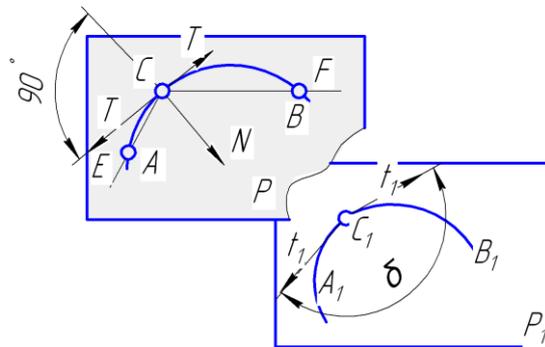


Рис. 45. Плоска крива лінія

При проєкціюванні плоских кривих, додатково до попередніх тверджень можна ще віднести:

- 1) порядок проєкції алгебраїчної кривої дорівнює порядку самої кривої;
- 2) кількість точок самоперетину проєкцій кривої дорівнює кількості точок самоперетину самої кривої.

Криві лінії на кресленнику задають проєкціями їх точок. Довжина відрізка кривої (плоскої або просторової) визначається в загальному випадку приблизно, заміною кривої лінії вписаною ламаною лінією з максимально великою кількістю її сторін, які достатньо точно передають форму кривої (рис. 46). Для визначення її довжини намічають ряд точок  $A_1A_2, 1_11_2, 2_12_2, \dots$ , так, щоб дуги кривої були максимально наближеними до відрізків прямої.

### Означення

Криві лінії, всі точки яких не належать одній площині, називаються *просторовими* або *лініями подвійної кривизни*.

Алгебраїчна крива лінія, яка описується в системі декартових координат рівнянням другого ступеня відносно поточних координат, називається *кривою лінією другого порядку*.

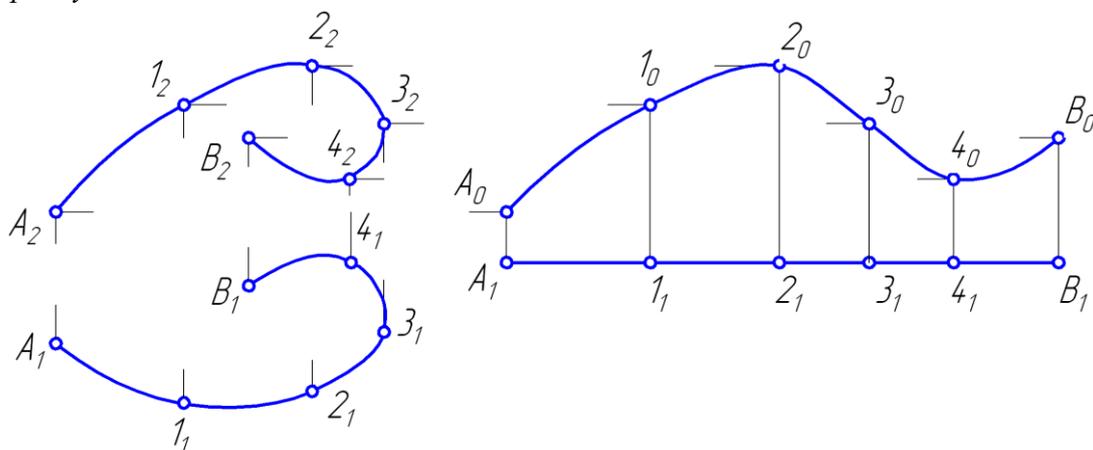


Рис. 46. Визначення довжини просторової кривої лінії

Вивчення кривих ліній другого порядку має значний інтерес у зв'язку з широким використанням їх у фізиці, астрономії, механіці, архітектурі тощо.

До кривих другого порядку належать:

1) **Еліпс** – геометричне місце точок, сума відстаней від кожної з яких до двох даних точок  $F_1$  і  $F_2$  (фокусів) є величина стала (рис. 47):

$$EF_1 + EF_2 = 2a$$

Рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

де

$$b^2 = a^2 - c^2;$$

AB – велика вісь еліпса;

CD – мала вісь еліпса.

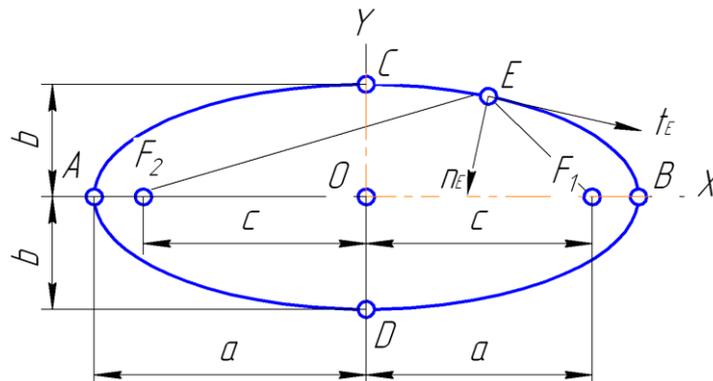


Рис. 47. Еліпс

### Теорема

Ортогональною проекцією кола, площина якого не перпендикулярна до площини проєкцій, буде еліпс.

Велика вісь еліпса паралельна діаметру кола до якого паралельна площина проєкцій.

Мала вісь еліпса паралельна до проєкції напрямлення площини кола, яка є лінією найбільшого скату площини цього ж кола.

2) **Гіпербола** – геометричне місце точок, різниця відстаней від яких до двох даних точок  $F_1$  і  $F_2$  (фокусів) є величина стала (рис. 48). Будь-яка точка  $M$  площини належить гіперболі, якщо витримується умова:

$$MF_2 - MF_1 = 2a.$$

Рівняння гіперболи :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

де

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Рівняння гіперболи відрізняється від рівняння еліпса тільки знаком при другому члені лівої частини. Отже, багато з тверджень, що відносяться до еліпса, справедливі – для гіперболи. Вісі координат є *осями симетрії*. Точка перетину координатних осей – *центр симетрії*. *Вершинами гіперболи* є точки перетину її віссю симетрії.

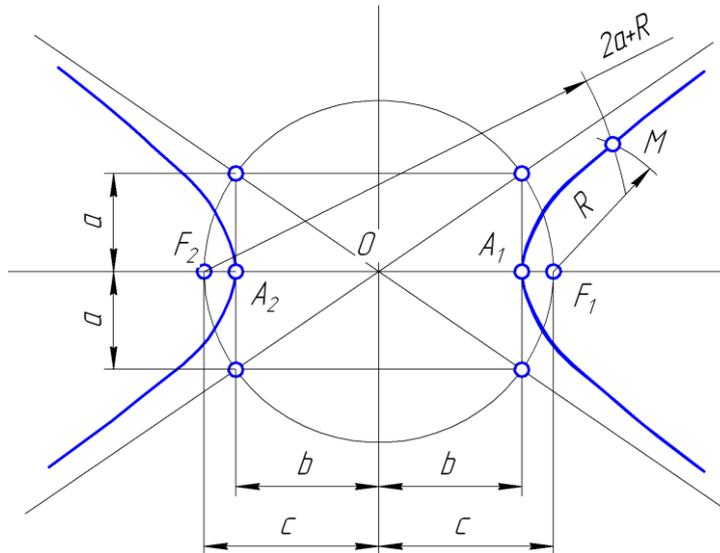


Рис. 48. Гіпербола

3) **Парабола** – геометричне місце точок, однаково віддалених від заданої точки F (фокуса) і прямої (рис. 49). Параболу можна побудувати, якщо задано фокус і пряму – директрису (AB).

Рівняння параболі:

$$y^2 = 2px,$$

де

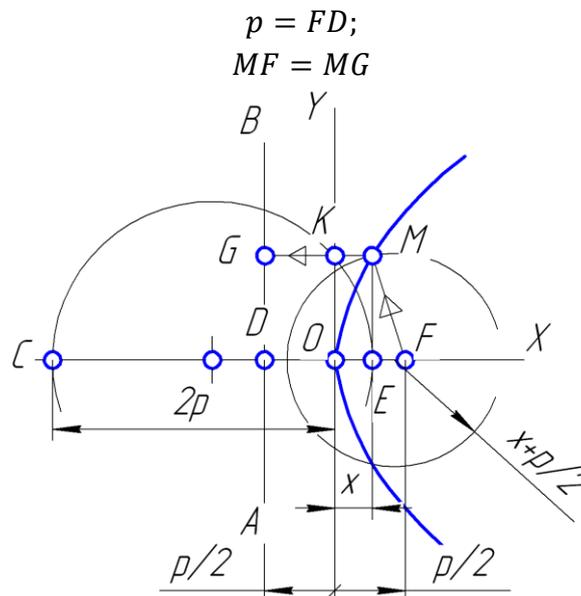


Рис. 49. Парабола

### Означення

Відстань FD від фокуса F до директриси AB називається *параметром параболі*.

Пряма FD є віссю симетрії параболі, яка називається *віссю параболі*.

Точка O – точка перетину параболі віссю – називається *вершиною*, яка ділить навпіл відстань між фокусом і директрисою.

## Гвинтові лінії

З просторових кривих ліній в техніці широко використовуються циліндричні і конічні гвинтові лінії, особливо – циліндричні гвинтові лінії однакового нахилу – *геліси*. Вони використовуються в механізмах машин і приладів для перетворення обертального руху в поступальний. Нарізь на валах у вигляді геліса (ліва і права нарізь) використовуються у поворотних механізмах. Моделлю гвинтової лінії може бути пружина.

Циліндричну гвинтову лінію – гелісу ми розглядаємо як траєкторію руху точки, яка рівномірно обертається навколо осі і одночасно рівномірно переміщується в напрямленні цієї осі (рис. 50).

### Означення

Величина  $S$  переміщення точки в напрямленні осі, яка відповідає одному повному оберту навколо осі, називається *кроком гвинтової лінії*.

$\varphi$  – кут підйому гвинтової лінії.

Траєкторія точки, що рухається по твірній і одночасно обертається навколо своєї осі прямого кругового конуса, називається *конічною гвинтовою лінією* (рис. 51).

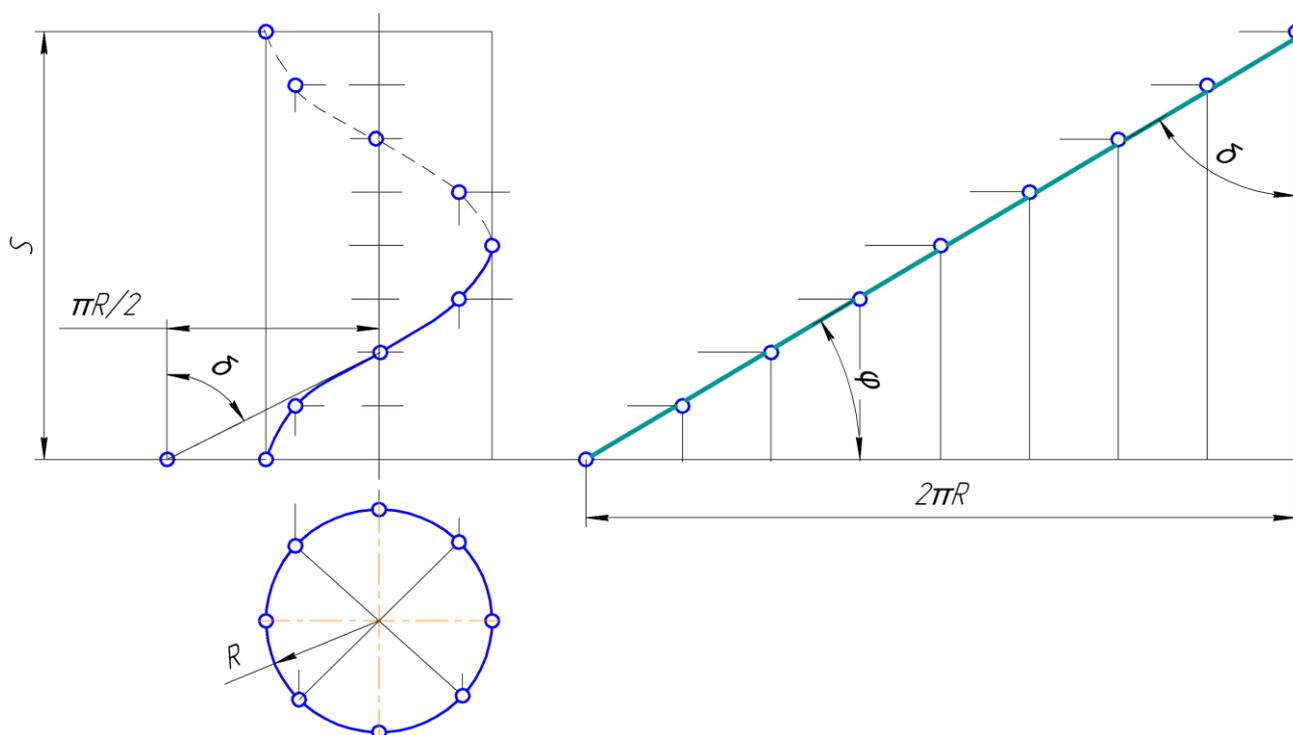


Рис. 50. Циліндрична гвинтова лінія

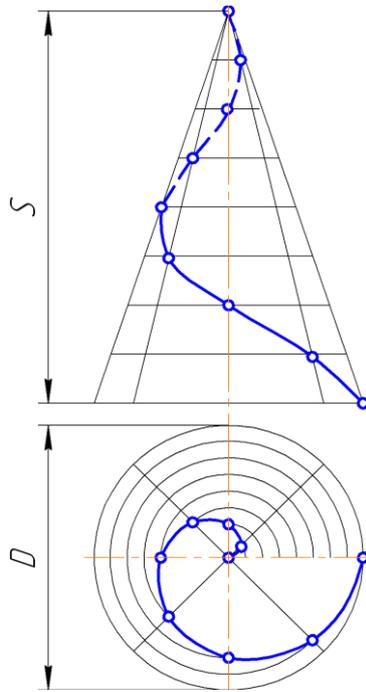


Рис. 51. Конічна гвинтова лінія

### Увага!

Конічна гвинтова лінія з постійним кроком проєкціюється на площину, перпендикулярну до осі конуса, у вигляді *спіралі Архімеда*, полюсом якої є проєкція вершини конуса.

Проєкція конічної гвинтової лінії на площину, паралельну осі конуса, – *синусоїда*, висота хвилі, якої зменшується (згасаюча синусоїда).

### Запитання для перевірки знань

1. Які криві лінії називаються алгебраїчними, а які трансцендентними?
2. Які криві називаються кривими лініями другого порядку, наведіть приклади?
3. Дайте визначення плоскій і просторовій кривій?
4. Дайте визначення, що таке рівняння кривої лінії?
5. Як визначити на кресленику напрямлення (хід) циліндричної гвинтової лінії?
6. Дайте визначення конічним гвинтовим лініям.
7. Як визначити довжину кривої лінії?

## 2.11. ПОВЕРХНІ. ЇХ УТВОРЕННЯ І ЗАДАННЯ НА ЕПЮРІ МОНЖА

### Означення

*Кривою поверхнею* називається сукупність усіх послідовних положень будь-якої лінії, яка рухається у просторі за певним законом.

Поверхні, твірні яких пряма лінія, називаються *лінійчаті*.

Криву поверхню можна отримати декількома способами:

- аналітичним;
- кінематичним;
- заданням поверхні каркасом.

Нелінійчаті, або криві поверхні, утворюються за допомогою криволінійних твірних.

### Аналітичний спосіб задання поверхні

Поверхні (алгебраїчні або трансцендентні) можна розглядати як геометричне місце точок або ліній. Координати точок цього геометричного місця задовольняють заданому рівнянню вигляду  $F(x, y, z)=0$ .

### Означення

Поверхня називається *трансцендентною*, якщо її рівняння – трансцендентна функція\* відносно  $x, y, z$ .

*Алгебраїчною* поверхнею  $n$ -го порядку називають поверхню, рівняння якої – алгебраїчне рівняння степені  $n$ .

Площина, як відомо, виражається рівнянням першого ступеня. Її називають поверхнею першого ступеня. Будь-яка довільна площина перетинає поверхню  $n$ -го порядку по кривій лінії того ж самого порядку (інколи вона розпадається або мнима). Будь-яка довільна пряма перетинає поверхню  $n$ -го порядку в  $n$  точках (дійсних або мнимих).

Аналітичний спосіб задання поверхні знайшов широке використання в практиці, особливо коли необхідно дослідити властивості поверхні, що інваріантна відносно свого згину – внутрішні властивості поверхні.

### Каркасний спосіб задання поверхні

Поверхні до яких неможливо використати математичні закономірності, зазвичай задають достатньо щільною сіткою ліній, які належать цим поверхням. Сукупність таких ліній називають *дискретною\*\* сіткою*, або *дискретним каркасом* поверхні.

Одним із розповсюджених у промисловості методів конструювання поверхонь є метод конструювання поверхонь за допомогою безперервного каркасу. Каркас поверхні може складатись із просторових кривих ліній. Проте частіше за все поверхні задають каркасом їх плоских перерізів.

Каркаси поверхонь можуть складатись із однієї, двох і трьох родин плоских перерізів. У всіх випадках будь-який плоский переріз даного роду може бути вихідним; інші родини перерізу будуються як додаткові на основі першого.

Каркаси поверхонь поділяють на *точкові* і *лекальні*.

### Означення

*Точковим каркасом* називається сукупність точок на поверхні, вибраних таким чином, що, орієнтуючись по ним, можна достатньо повно уявити вигляд, форму поверхні в усіх її частинах. Точки можна вибрати, так щоб вони були ізольованими одна від одної, або поєднати їх між собою прямими лініями.

---

\* Найпростішими прикладами трансцендентної функції є: показна, тригонометрична, логарифмічна функції.

\*\* Дискретний – означає, який складається з окремих елементів.

## Кінематичний спосіб задання поверхні

У нарисній геометрії поверхні можна розглядати як *кінематичні*, інакше утворені безперервним переміщенням у просторі будь-якої лінії або поверхні (рис. 52). Ці лінії і поверхні називаються *утворювальними* (твірними) кінематичної поверхні. Поверхня, яка утворена переміщенням лінії, уявляє собою геометричне місце будь-яких положень твірної лінії.

Поверхня, яка утворена безперервним переміщенням утворювальної поверхні, розглядається як така, що огинає різноманітні положення утворювальної поверхні. Утворена таким чином кінематична поверхня дотикається до утворювальної поверхні в різноманітних її положеннях, інакше має деякі спільні лінії. Ці лінії називаються *характеристиками* поверхні.

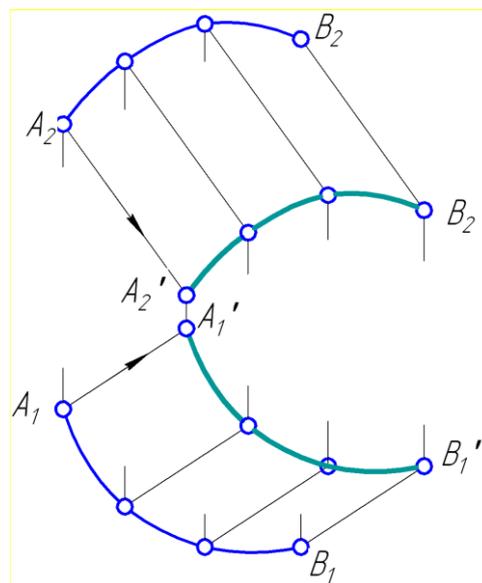


Рис. 52. Кінематична поверхня

Твірна кінематичної поверхні переміщується у просторі за визначеним законом. Вона може у процесі руху зберігати свою форму (мати незмінний вигляд), а також у процесі руху безперервно змінювати свою форму. Від вигляду твірної і закону її переміщення залежить форма (вигляд) кінематичної поверхні. Переміщення у просторі твірної зручно задавати нерухомими кривими, які називаються *напрямними лініями* кінематичної поверхні.

На будь-якій кінематичній поверхні можна виділити дві родини кривих ліній – твірні та напрямні. З цих родин можна скласти каркас кінематичної поверхні.

Сукупність основних параметрів поверхні, що визначають її способи задання називають *визначниками поверхні*. Наприклад, визначником конуса обертання може бути вісь і твірна або вершина і напрямна лінія. Визначником циліндра обертання може бути вісь і твірна (пряма чи крива) або вісь і напрямна (коло). Коло може бути напрямною лінією циліндра та його твірною.

### Означення

Поверхні, в яких безмежно малі поступальні переміщення твірної лінії одного напрямлення, називаються *поверхнями перенесення прямолінійного напрямлення*.

Поверхні, в яких безмежно малі обертальні переміщення твірної лінії із загальною нерухомою віссю, називаються *поверхнями обертання*.

Поверхні, в яких безмежно малі гвинтові переміщення твірної лінії одного параметра і, які мають спільну гвинтову вісь, називаються *гвинтовими поверхнями*.

Найважливіші *властивості кінематичних поверхонь основних видів*:

- 1) будь-яку криву лінію поверхні, яка перетинає вхід усіх точок твірної лінії, можна розглянути як утворювальну лінію поверхні;
- 2) дві поверхні, що мають спільний закон утворення і відрізняються одна від одної твірними лініями, можуть перетинатись між собою тільки по спільним ходам точок твірних ліній;
- 3) будова кінематичної поверхні основного виду не змінюється у точках даного ходу;
- 4) кожна кінематична поверхня основного виду може без деформації зміщуватися позовж самої себе.

### Поверхні перенесення прямолінійного напрямлення

*Поверхня перенесення прямолінійного напрямлення* утворюється безперервним поступальним переміщенням твірної – кривої лінії ABC (рис. 53).

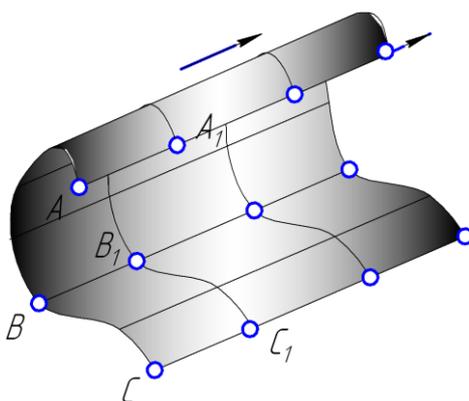


Рис. 53. Поверхня перенесення прямолінійного напрямлення

Поверхню перенесення прямолінійного напрямлення можна також розглянути і як поверхню, що утворюється рухом прямої лінії, яка весь час паралельна даному напрямленню і ковзає по кривій лінії ABC. Тут крива ABC – напрямна лінія, а пряма (направлення перенесення) – твірна лінія поверхні.

### Поверхні обертання

Поверхня обертання утворюється обертальним переміщенням твірної лінії навколо нерухомої осі (рис. 54). Під час вивчення таких поверхонь зазвичай за вісь обертання приймається вертикальна пряма.

Ходом кожної точки твірної лінії є коло, яке називається *паралеллю* поверхні обертання. Площини паралелей перпендикулярні до осі поверхні. Паралелі без спотворення проєкціюються на площину, яка перпендикулярна до осі – кола із спільним центром. Найбільшу з паралелей (коло) поверхні обертання називають *екватором* поверхні, а найменшу – *шийкою* (горлом).

Площини, що проходять через вісь поверхні обертання, називаються *меридіальними*, а лінії по яких вони перетинають поверхню – *меридіанами*.

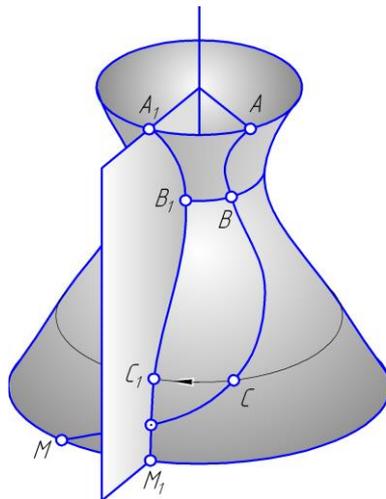


Рис. 54. Поверхня обертання

### Означення

Поверхня обертання називається закритою, якщо меридіальний переріз поверхні є замкнутою кривою лінією, яка перетинає вісь поверхні в двох точках.

*Властивості поверхні обертання:*

- 1) поверхня обертання має властивість зрушуватись, інакше обертаючись навколо осі, поверхня може рухатись без деформації поздовж самої себе;
- 2) якщо меридіан поверхні обертання проходить через дві точки поверхні, то він є найкоротшою лінією між цими точками і всі меридіани однакові між собою;
- 3) кожна з паралелей поверхні обертання перетинає меридіан під прямим кутом, інакше паралелі та меридіани утворюють прямокутну сітку на поверхні обертання;
- 4) поверхню обертання можна задати будь-якою кривою, якщо ця крива перетинає всі ходи точок твірної лінії;
- 5) кожна з нормалей до поверхні обертання перетинає вісь поверхні.

Це означає, що для кожної поверхні обертання можна будувати вписані або описані сфери.

Від виду кривої лінії другого порядку у головному меридіальному перерізі поверхні обертання мають назви:

- *сфера* (куля), якщо твірна крива лінія є колом, а вісь співпадає з її діаметром;
- *тор\**, якщо твірна – коло, яке обертається навколо осі, що лежить в площині кола і не проходить через його центр. Якщо вісь обертання перетинає твірне коло чи дотикається до нього, то утворюється *закритий тор*. Якщо вісь обертання не перетинає твірне коло і не дотикається до нього, то утворюється *відкритий тор* (кільце);
- *еліпсоїд* обертання утворюється обертанням еліпса навколо його осі. Якщо за вісь обертання прийнято його велику вісь, то буде *витягнутий еліпсоїд* обертання, якщо малу – *стиснутий еліпсоїд* обертання;

\* Тор є поверхнею четвертого порядку

- *параболоїд обертання* утворюється обертанням параболи навколо її осі;
- *однопорожнинний гіперболоїд обертання* утворюється обертанням гіперболи навколо уявної осі;
- *двопорожнинний гіперболоїд обертання* утворюється обертанням гіперболи навколо дійсної осі;
- *конус обертання* утворюється обертанням навколо осі кривої другого порядку, яка розпадається на дві прями лінії, що перетинаються;
- *циліндр обертання* утворюється обертанням навколо осі кривої 2-го порядку, яка розпадається на дві паралельні прями лінії.

### Гвинтові поверхні

*Гвинтова поверхня* утворюється гвинтовим переміщенням твірної лінії. Її можна задати начальним положенням твірної лінії ( $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ), нерухомою віссю, перпендикулярною до площини проєкцій  $\Pi_1$ , кроком  $i$  ходом (рис. 55).

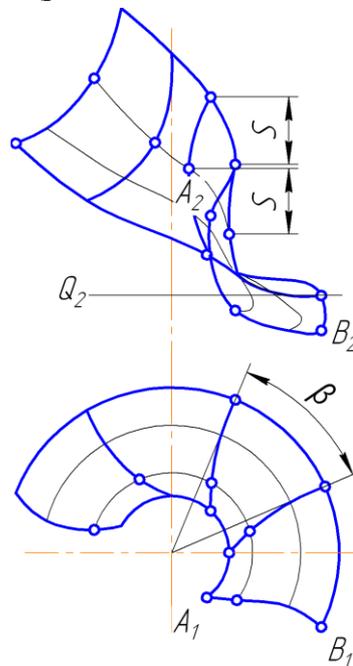


Рис. 55. Утворення гвинтової поверхні

Ходом усіх точок твірної лінії є циліндрична гвинтова лінія, яка має однакові крок  $i$  і хід зі гвинтовою поверхнею. Ці гвинтові ходи точок твірної лінії мають спільний *одичний крок*  $S_0 = \frac{S}{2\pi}$ , який називається *параметром* гвинтової поверхні  $p = S_0 = \frac{S}{2\pi}$ . Горизонтальними проєкціями ходів точок твірної лінії є кола з спільним центром у точці, яка є виродженою проєкцією гвинтової осі.

У процесі обертання твірної лінії навколо осі на кут  $\beta$  вона отримує осьове переміщення на величину:

$$S = \beta \cdot \frac{S}{2\pi} = \beta \cdot p,$$

$$S_n = \beta_n \cdot p,$$

де кут  $\beta$  вимірюється в радіанах.

Фронтальні проекції ряду положень твірної лінії, які відповідають горизонтальним проекціям, визначають виходячи з умови, що фронтальні проекції точок твірної вище на величини  $S$  фронтальних проекцій однойменних точок твірної лінії у початковому її положенні.

Поєднавши фронтальні проекції однойменних точок твірної лінії у різноманітних її положеннях плавними кривими, отримаємо фронтальні проекції ходів ряду точок твірної лінії, які уявляють собою синусоїду.

Гвинтові поверхні, у яких твірною є пряма лінія, називаються *гелікоїдами*.

Гелікоїд називається *прямим*, якщо твірна пряма лінія становить з віссю поверхні прямий кут; у всіх інших випадках гелікоїд називається *косим*.

Якщо твірна пряма лінія перетинається з віссю поверхні, гелікоїд називається *закритим*; якщо не перетинається – гелікоїд називається *відкритим*.

## Багатогранники

Одним з видів просторових форм є *багатогранники* – замкнуті просторові фігури, які обмежені плоскими багатокутниками. Вершини та сторони багатогранників є вершинами і ребрами багатогранника. Вони утворюють просторову сітку. Якщо вершини і ребра багатогранника знаходяться з одного боку площини будь-якої з граней, то багатогранник називається *випуклим*; усі його грані – випуклі багатокутники.

Найбільшу практичну зацікавленість мають призми, піраміди, призматоїди і правильні випуклі багатогранники – тіла Платона (тетраedr, гексаedr, октаedr, додекаedr та ікосаedr), а також багатогранники, що мають довільну форму.

### Означення

*Багатогранником* називається тіло, обмежене багатогранною поверхнею. Сукупність усіх ребер і вершин багатогранника є його контуром.

Щоб задати – поверхню на епюрі Монжа, зазвичай вказують не всі проекції множини точок або лінії, що належать поверхні, а тільки деякі з них або ті, що входять до складу визначника поверхні чи задають контур. Визначник складається з двох частин: геометричної, в якій задаються деякі основні елементи та величини, й алгоритмічної, яка вказує характер зміни форми твірної і закону її переміщення.

Поверхня вважається заданою на кресленнику, якщо відносно будь-якої точки, заданої на тому ж кресленнику, можна однозначно встановити, чи належить точка цій поверхні, або ні.

### Правило

Щоб задати на кресленнику проекції точок, які належать багатограннику чи кривій поверхні, необхідно спочатку побудувати будь-яку лінію на заданій поверхні, а потім на проекціях цієї лінії взяти проекції шуканих точок (рис. 56).

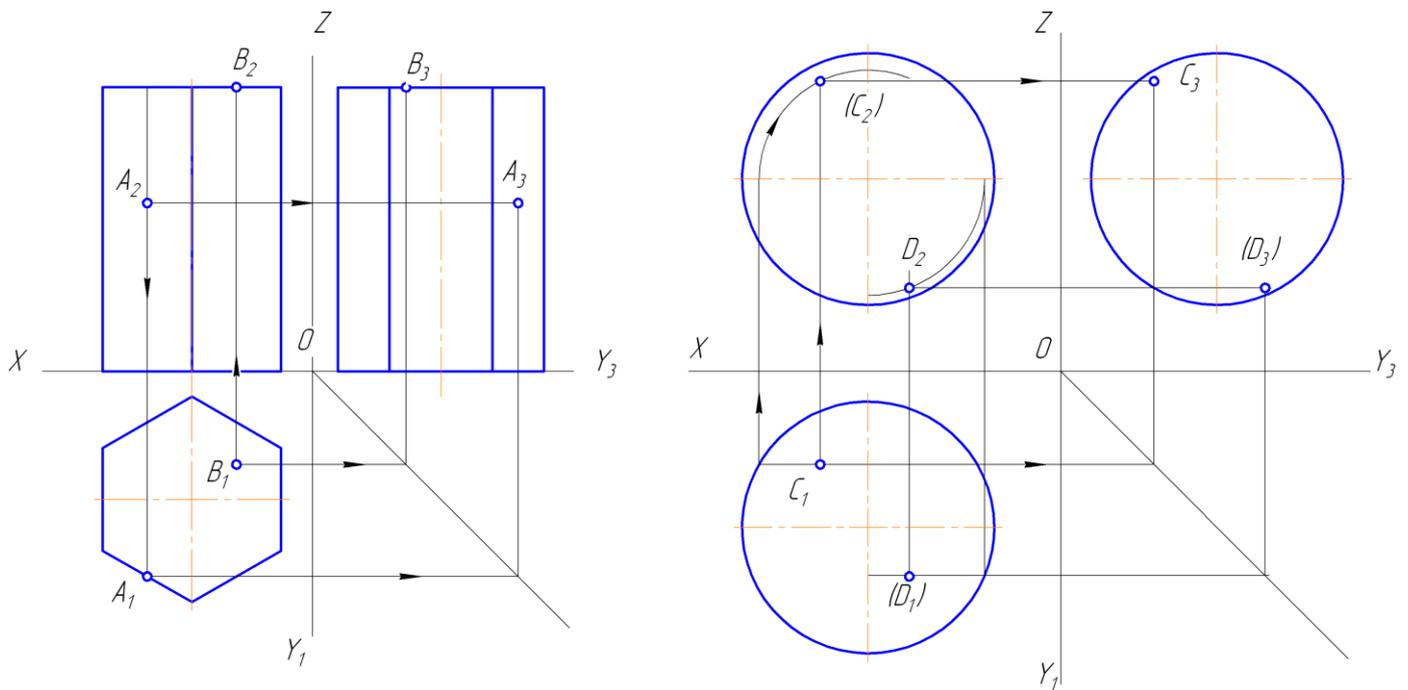


Рис. 56. Побудова точок на поверхнях

### Запитання для перевірки знань

1. Які способи задання поверхні Ви знаєте?
2. Що таке визначник поверхні?
3. Що називається каркасом поверхні?
4. У чому відмінності визначників поверхонь: обертання, гвинтових і паралельного перенесення?
5. Що називається меридіаном і паралеллю поверхні обертання?
6. Що таке напрямна площини і яку роль вона відіграє при утворенні поверхні кінематичним способом?
7. Наведіть класифікацію лінійчатих поверхонь.
8. У чому відмінності поверхонь закритого і відкритого тора?
9. Перерахуйте поверхні обертання другого порядку.
10. Дайте визначення кроку гвинтової лінії.

## 2.12. ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ ПРЯМИМИ ЛІНІЯМИ І ПЛОЩИНОЮ

### Перетин поверхонь проєкціювальними площинами

Площина перетинає поверхню по плоскій кривій лінії. Лінію перетину поверхні проєкціювальною площиною будують по точкам перетину з площиною ходів ряду точок твірної лінії і самої твірної лінії в різних її положеннях.

## Плоскі перерізи багатогранників

Лінія перетину багатогранника площиною визначається або за точками перетину ребер багатогранника (*спосіб ребер*), або за лініями перетину граней багатогранника з цією площиною (*спосіб граней*) (рис. 57).

### Означення

Багатокутник, утворений від перетину багатогранника площиною, називається *фігурою перерізу*.

### Твердження

Фігура перерізу поверхонь проєкціюється на площину проєкцій без спотворення, якщо розтинальна площина паралельна площині проєкцій.

Проекції фігури перерізу можуть перетворюватись на відрізки прямих, на тій площині проєкцій, до якої площина перерізу перпендикулярна.

Кількість сторін багатокутника перерізу дорівнює кількості граней, які перетинаються розтинальною площиною.

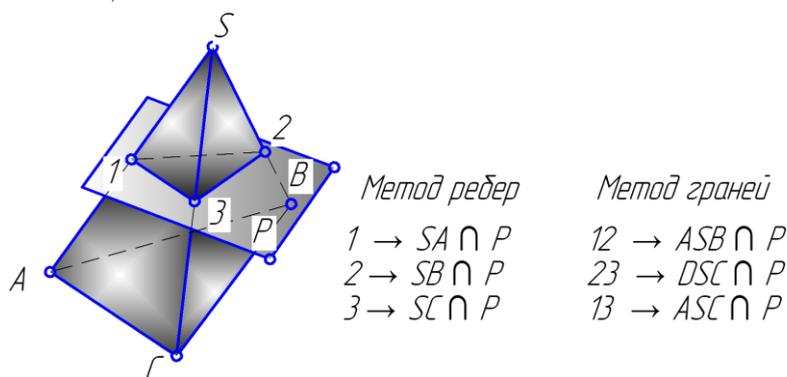


Рис. 57. Перетин багатогранника площиною

## Плоскі перерізи кривих поверхонь

### Твердження

При перетині кривих поверхонь площиною в загальному випадку криві лінії утворюються шляхом знаходження точок перетину твірних поверхні зі розтинальною площиною. Якщо крива поверхня нелінійна, то для побудови лінії перетину такої поверхні площиною необхідно застосовувати допоміжні площини. Точки шуканої лінії знаходяться на перетині ліній, по яких допоміжні розтинальні площини перетинають поверхню і площину.

При перетині поверхні обертання площиною спочатку будують *головні точки* лінії перетину, а потім ряд проміжних точок. Проміжними точками лінії перетину будуть точки перетину площиною, яка паралельна поверхні (рис. 58).

### Означення

*Головними точками* кривої перетину поверхні обертання площиною називаються точки перетину цієї площини – головного меридіального перерізу поверхні, екватора поверхні, а також вища і нижча точки лінії перетину відносно площини проєкцій  $\Pi_1$ .

На рис. 58 побудовано лінію перетину поверхні, заданої контуром, фронтально-проекціювальною площиною  $Q_2$ . Головними точками шуканої лінії перетину є точки  $1_1 1_2$  і  $2_1 2_2$ , в яких головний меридіан поверхні перетинається площиною  $Q_2$ , а також точки  $3_1 3_2$  і  $4_1 4_2$ , в яких задана площина перетинає екватор поверхні. Точки  $1_1 1_2$  і  $2_1 2_2$  одночасно є вищою і нижчою точками шуканої лінії перетину.

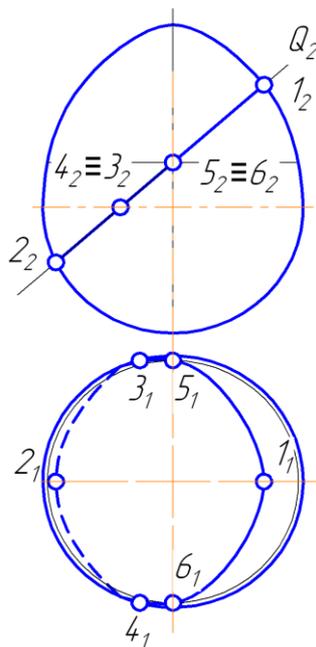


Рис. 58. Побудова лінії перетину кривої поверхні площиною

Точки  $5_1 5_2$  і  $6_1 6_2$  є проміжними (додатковими) точками лінії перетину. Поєднавши горизонтальні проєкції знайдених точок лінії перетину плавною кривою, отримуємо горизонтальну проєкцію шуканої лінії перетину. Фронтальна її проєкція співпадає зі слідом  $Q_2$  площини.

Та частина лінії перетину, яка розташована вище екватора буде видимою на горизонтальній площині проєкцій.

### Конічні перерізи

При перетині конуса обертання площиною можуть утворюватись: прямі, що перетинаються, коло, еліпс, гіпербола і парабола.

#### Твердження

Якщо розтинальна площина перпендикулярна до осі конуса, то в перетині утворюється *коло* (рис. 59, а).

Якщо розтинальна площина проходить через вершину конуса, то розтинає його *по прямим лініям* (рис. 59, б).

Якщо розтинальна площина перетинає усі твірні конуса і не перпендикулярна до його осі, то в перетині утворюється *еліпс* (рис. 59, в).

Якщо розтинальна площина перетинає тільки одну порожнину конуса і паралельна одній твірній конуса (кут її нахилу до осі конуса дорівнює куту, який утворюють твірні конуса з його віссю), то в перетині утворюється *парабола* (рис. 59, г).

Якщо розтинальна площина перетинає обидві порожнини конуса обертання, інакше паралельна двом його твірним, то в перетині утворюється гіпербола (рис. 59, д).

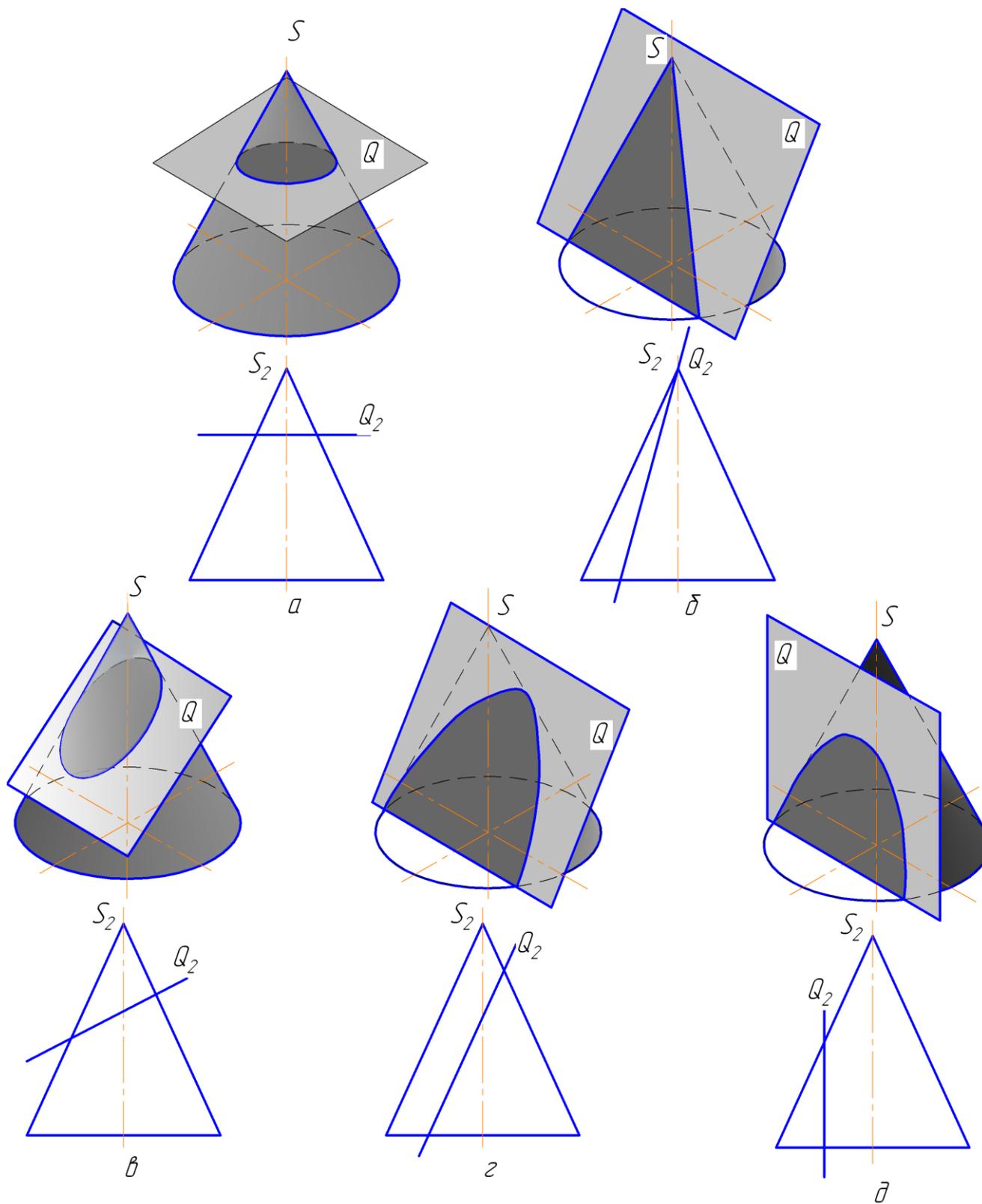


Рис. 59. Утворення конічних перерізів

## Перетин поверхні прямою лінією

Для того щоб визначити точки перетину прямої з поверхнею будь-якого геометричного тіла (призма, піраміда, циліндр, конус, куля тощо), поступають точно так, як і при визначенні точки перетину прямої з площиною.

Перетин багатогранника прямою лінією це – дві точки, які називаються *точками входу* і *виходу*.

Точка перетину прямої лінії з поверхнею зазвичай визначається за схемою:

- 1) через пряму лінію проводять допоміжну розтинальну площину (найчастіше проєкціювальну);
- 2) будують лінію перетину допоміжної площини з поверхнею;
- 3) визначають точки перетину прямої лінії з лінією перетину поверхні допоміжною площиною.

Побудову точок перетину прямої лінії  $E_1F_1$ ,  $E_2F_2$  з поверхнею обертання, заданої контуром, показано на рис. 60.

На прикладі через дану пряму лінію проведено фронтально-проєкціювальну площину  $P_2$  і побудовано лінію перетину цієї площини з поверхнею обертання. Пряма лінія перетинається з побудованою кривою лінією в точках  $K_1K_2$ ,  $M_1M_2$ , які є шуканими точками входу прямої  $E_1F_1$ ,  $E_2F_2$  у поверхню та її виходу з неї.

### Увага!

При замкненні прямої до допоміжної площини останню необхідно вибрати так, щоб її лінія перетину з поверхнею проєкціювалась на площину проєкцій у вигляді простих ліній – прямої або кола.

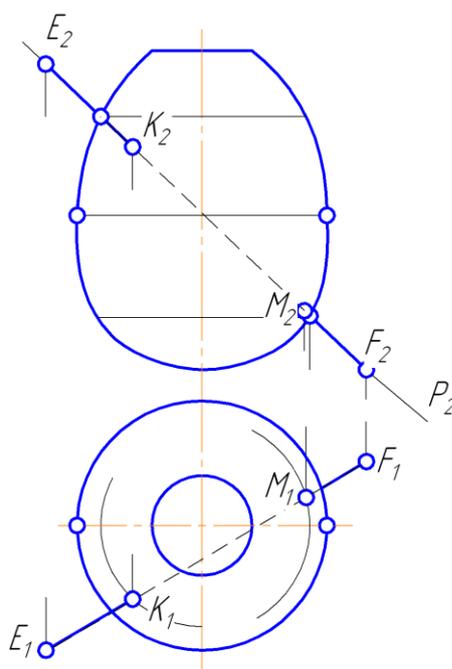


Рис. 60. Перетин поверхні прямою лінією

## Перетин поверхонь площинами загального положення

Лінію перетину поверхні довільно розташованою площиною будують як і для проєкціовальної площини, по точкам перетину ходів ряду точок твірної лінії і самої твірної лінії в різних її положеннях з цією площиною.

У тих випадках, коли на поверхні не показано положення твірної і ходів точок, використовують допоміжні площини і поверхні.

Побудову лінії перетину конуса обертання довільно розташованою площиною  $M_1N_1E_1$ ,  $M_2N_2E_2$  показано на рис. 61. Тут спочатку визначено точки лінії перетину, що розташовані на головному меридіані. Фронталь  $1_12_1$ ,  $1_22_2$ , розташована в головній меридіальній площині, перетинає твірні фронтального контура в точках  $3_13_2$  і  $4_14_2$ , а вісь конуса – в точках  $5_1K_1$ ,  $5_2K_2$  площини і визначає слід  $N_{S_1}$  меридіанної площини, перпендикулярної до горизонталі. В площині  $N_{S_1}$  знаходяться найвища і найнижча точки лінії перетину. Ці точки  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  визначено як точки перетину прямої  $K_1\delta_1$ ,  $K_2\delta_2$  площини  $N_{S_1}$  і заданої площини з твірними  $6_1S_1$ ,  $6_2S_2$  і  $7_1S_1$ ,  $7_2S_2$ , що розташовані в меридіанній площині  $N_{S_1}$ .

Відрізок  $A_1B_1$  є великою віссю еліпса горизонтальної проєкції, а точка  $S$  – одним з фокусів цього еліпса. Роблячи засіки з фокуса  $S$  радіусом, який дорівнює половині відрізка  $A_1B_1$  в його середині  $O_1$ , визначимо точки  $D_1$  і  $C_1$ . Де  $D_1C_1$  – мала вісь еліпса. Взаємперпендикулярні діаметри  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  і  $D_1C_1$ ,  $D_2C_2$  представлені, як спряжені діаметри в їх фронтальних проєкціях, спряженими діаметрами фронтальної проєкції лінії перетину конуса обертання заданою площиною. Далі вже відомим методом визначаємо велику і малу вісі еліпса і будуємо необхідний ряд точок.

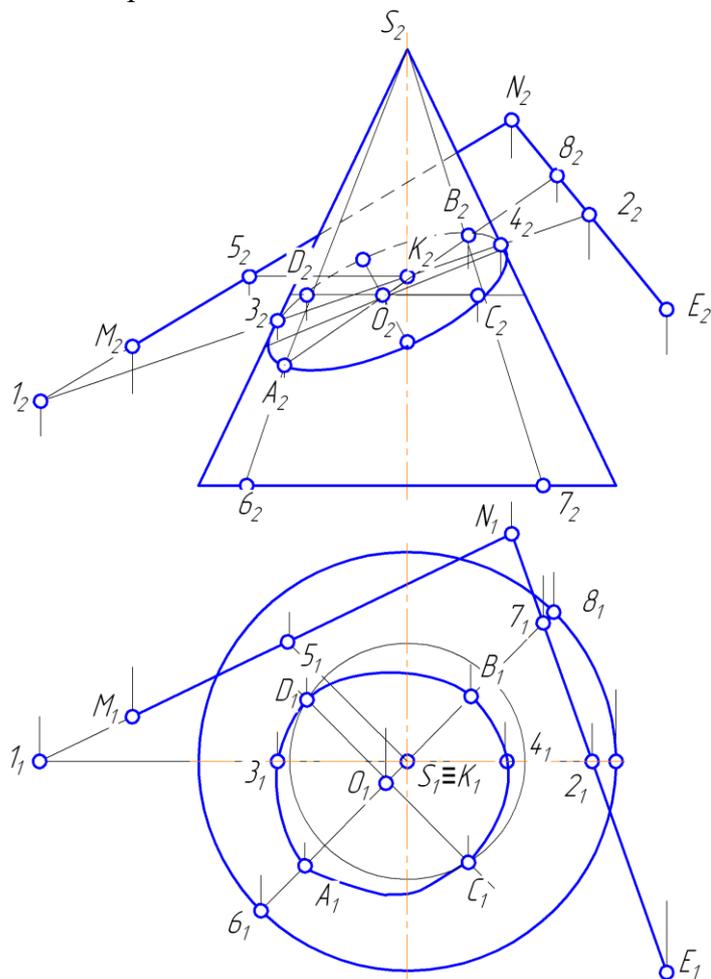


Рис. 61. Перетин поверхні конуса площиною загального положення

## Запитання для перевірки знань

1. Укажіть загальну схему визначення точок лінії перетину поверхні площиною.
2. Які точки лінії перетину поверхні площиною називають головними (опорними)?
3. Укажіть послідовність графічних побудов визначення точок перетину прямої з поверхнею.
4. Укажіть умови, за яких в перетині конуса обертання площиною утворюється коло, еліпс, гіпербола, парабола, прямі, що перетинаються.
5. Укажіть послідовність графічних побудов під час визначення лінії перетину поверхонь другого порядку площинами.
6. Що називається фігурою перерізу?
7. У чому полягає сутність методу ребер (методу граней), визначення лінії перетину багатогранника?

## 2.13. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ

Зазвичай поверхню розглядають як гнучку, як оболонку, яку неможливо розтягнути.

Деякі поверхні, якщо їх поступово деформувати, можна сумістити з площиною без розривів і складок. Такі поверхні називаються *розгортні*.

При розгортанні встановлюється взаємна однозначна відповідність між точками поверхні і площинами. Усі поверхні можна поділити на такі, що можна розгорнути і такі, які не можна розгорнути без спотворення.

До поверхонь, що розгортаються належать ті, які можна розгорнути без деформації – сумістити з площиною так, що всі елементи поверхні зображуються у справжній величині. Без спотворення можуть розгортатись тільки лінійчаті поверхні, суміжні твірні яких перетинаються. При цьому точки перетину можуть бути як власні, так і невластні.

До групи лінійчатих поверхонь з суміжними твірними, що перетинаються належать торси (поверхні з ребром повернення) та їх окремі види, конічні і циліндричні поверхні. Торси мають спільну властивість – розвертатись на дотичних до них площинах.

Будь-яка фігура, що накреслена на поверхні торса, перетворюється у плоске зображення на розгортці. Можна розглядати торс і його розгортку як множину точок, між якими встановлюється взаємно однозначна відповідність. Ця відповідність має ряд важливих властивостей (тверджень).

### Твердження

Кожній точці поверхні торса відповідає єдина точка на його розгортці.

Кожній кривій лінії, яка лежить на торсі у загальному випадку відповідає крива лінія на його розгортці; довжина кривої на торсі дорівнює довжині її перетворення.

Кут між кривими лініями (кут між дотичними і кривими у точці їх перетину) на поверхні торса дорівнює куту між перетвореннями цих кривих ліній на розгортці.

Замкнена лінія на поверхні торса та відповідна їй лінія на розгортці обмежують однакову площину.

При конструюванні часто доводиться розв'язувати задачі, використовуючи методи нарисної геометрії, на побудову розгорток поверхонь, які неможливо розгорнути без спотворення. Теоретично така поверхня не може мати розгортку, але в практиці для того, щоб отримати необхідну поверхню з листового матеріалу будують, так звані, *умовні розгортки*, поверхонь, які неможливо розгорнути, де крім згину, необхідно робити розтяг і стискання листа.

Для побудови умовних розгорток поверхонь обертання, які неможливо розгорнути за апроксимуючі поверхні приймають циліндр і конус.

## Означення

Під *розгорткою поверхні* розуміють перетворення, внаслідок якого всі точки поверхні суміщаються з площиною.

Розгортка будь-якої поверхні, що розгортається приблизно. При розгортанні такої поверхні останню апроксимують поверхнями, вписаних або описаних багатогранників, які мають грані у формі прямокутників або трикутників.

Отже, для того, щоб отримати приблизну розгортку, яка б з достатнім ступенем точності відтворювала розгортку поверхні, що не розгортається, попередньо розбивають її на ділянки (відсіки), кожна з яких апроксимується.

Існує три способи побудови розгорток:

- 1) спосіб нормальних перерізів (рис. 62);
- 2) спосіб розкатки (рис. 63);
- 3) спосіб триангуляції\* (трикутників, рис. 64).

На рис. 62 показано побудову розгортки похилої призми. Спочатку перетинаємо поверхню призми площиною  $P$ , яка перпендикулярна до бокових ребер призми. Будуємо переріз заданої призми цією площиною –  $[\Delta 123]$ . Визначаємо дійсну величину сторін трикутника  $[\Delta 123]$  методом плоскопаралельного перенесення. Далі в довільному місці кресленика проводимо горизонтальну пряму і від довільної точки  $1_0$ , яку беремо на цій прямій, відкладаємо відрізки  $|1_0 2_0|$ ,  $|2_0 3_0|$ ,  $|3_0 1_0|$ , що конгруентні сторонам трикутника  $[\Delta 123]$ . Через точки  $1_0$ ,  $2_0$ ,  $3_0$  і  $1_0$  проводимо прямі, що перпендикулярні до горизонтальної прямої. На цих прямих відкладаємо відрізки, які конгруентні відповідним дійсним величинам відрізків бічних ребер призми. Таким чином, отримаємо точки  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  і  $A_0'$ ,  $B_0'$ ,  $C_0'$ . Отримані точки з'єднуємо прямими, що дасть нам розгортку бічної поверхні призми, до якої приєднуємо нижню і верхню основи.

Спосіб розкатки (рис. 63) доцільно використовувати для побудови розгортки призми у тому випадку, коли основа призми паралельна до будь-якої однієї з площин проєкцій, а її ребра паралельні до іншої площини проєкцій. На рис. 63 показано побудову розгортки методом розкатки. Для того, щоб отримати повну розгортку призми достатньо до будь-якої ланки ламаної лінії бічної поверхні розгортки призми приєднати дійсні величини основ (верхньої та нижньої).

---

\* Триангуляція – від лат. *triangulum* – трикутник (*tres* – три і *angulus* – кут) – розбиття поверхні на трикутники (криволінійні).

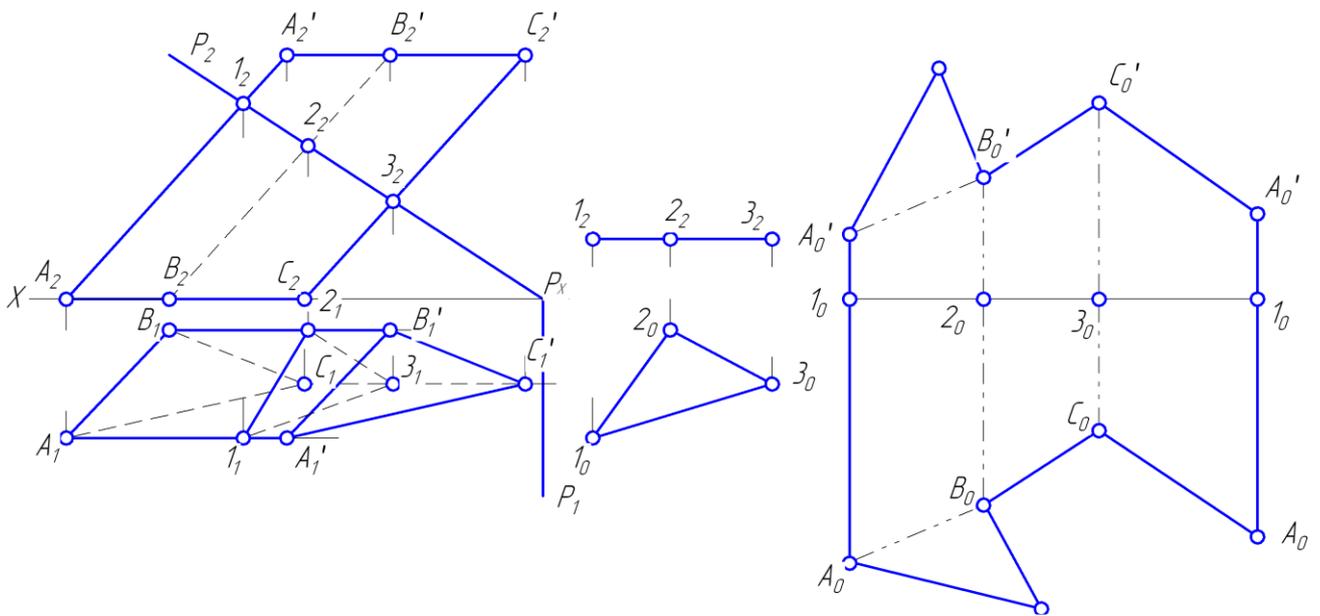


Рис. 62. Спосіб нормальних перерізів

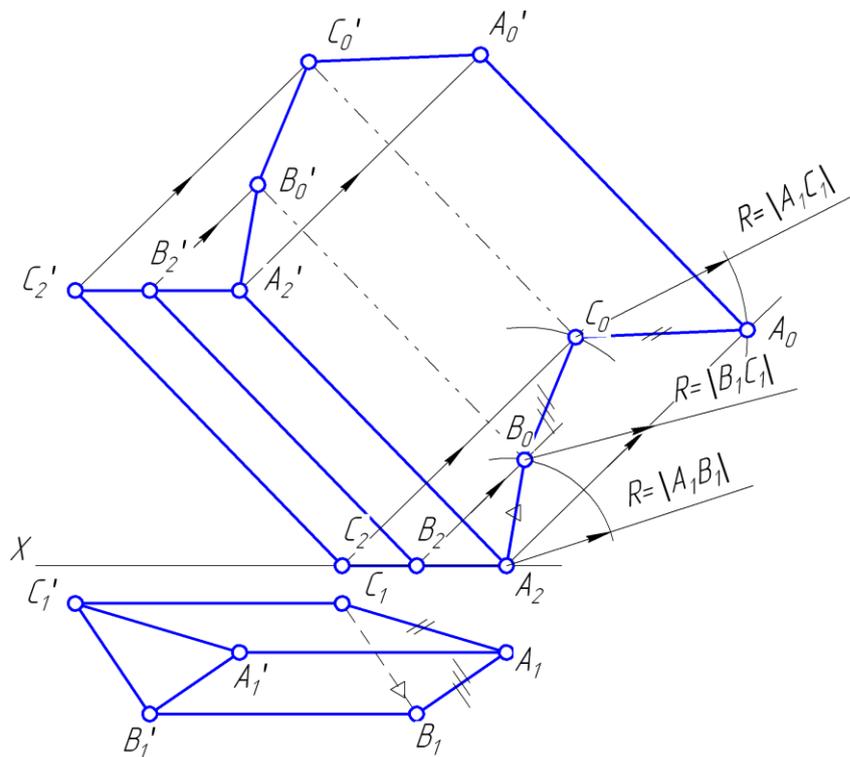


Рис. 63. Спосіб розклатки

На рис. 64 побудовано розгортку бічної поверхні піраміди  $SABC$  методом триангуляції (трикутників), яка уявляє собою плоску фігуру, що складається з трикутників – граней піраміди. Тому побудова зводиться до визначення дійсної величини ребер піраміди і побудову за трьома сторонами трикутників – граней піраміди. Визначення дійсної величини ребер піраміди здійснено методом обертання навколо осі, що належить висоті піраміди та яка перпендикулярна до площини  $\Pi_1$ .

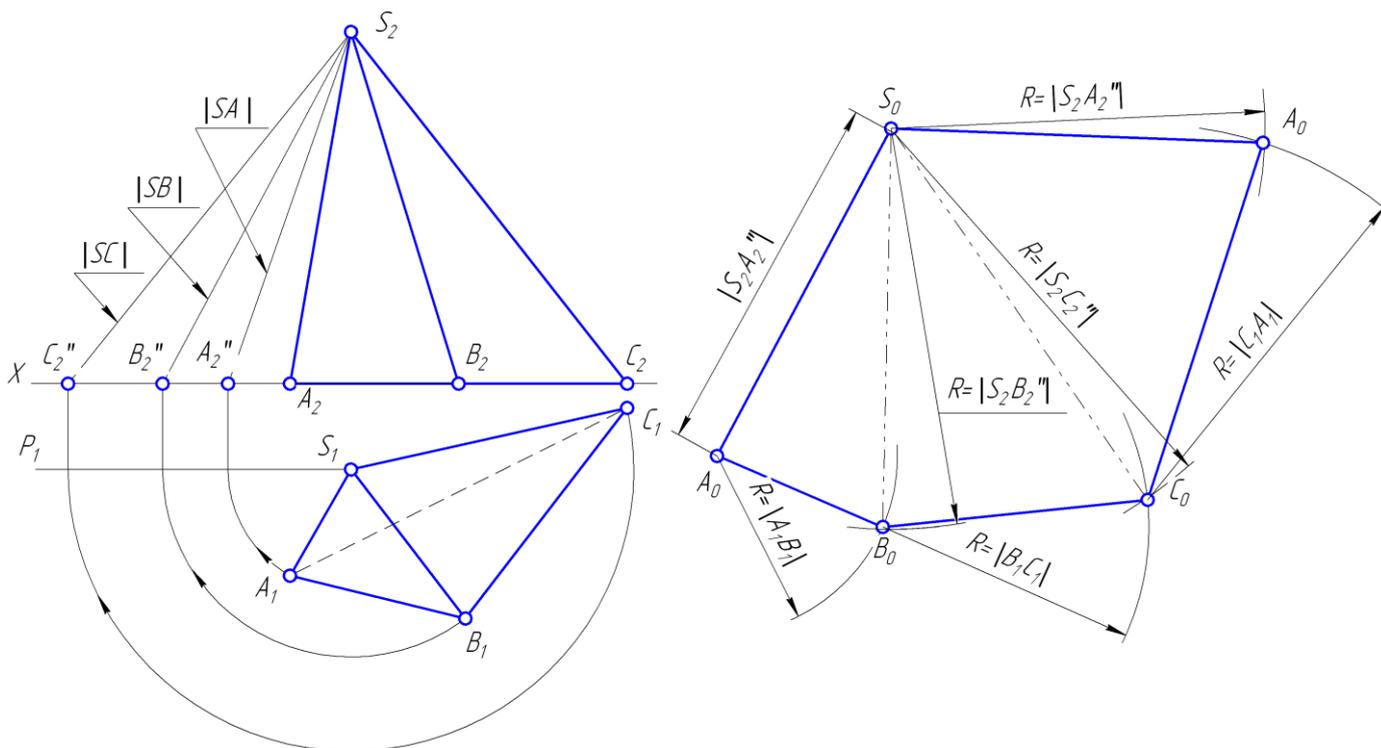


Рис. 64. Спосіб триангуляції (трикутників)

Задача на побудову розгортки конічної поверхні і поверхні з ребром повернення розв'язується також за допомогою трикутників, замінюючи криві поверхні багатогранною поверхнею з трикутними гранями. На площині послідовно будують всі трикутники багатогранної поверхні. Точки розігнутих хорд кола з'єднують плавною лекальною кривою.

### Запитання для перевірки знань

1. Що називають розгорткою поверхні?
2. Які поверхні називають розгортні, а які нерозгортні?
3. Укажіть основні властивості розгорток.
4. Які є способи побудови приблизних розгорток?
5. Що називається апроксимацією поверхні?
6. Зі скількох плоских відсіків складається повна розгортка правильної шестигранної призми?
7. Зі скількох плоских відсіків складається розгортка правильної тригранної піраміди?

### 2.14. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

Дві поверхні перетинаються по кривим лініям (ламана лінія), яку можна визначити по точкам перетину ліній однієї поверхні з іншою або по точкам перетину ліній кожної з поверхонь – ліній першої поверхні з другою і ліній другої поверхні з першою. Такими лініями можуть бути твірні в різних їх положеннях, ходи точок твірної лінії, а також будь-які лінії, що лежать на поверхні.

Таким чином, для того, щоб побудувати лінію перетину двох поверхонь, необхідно визначити ряд спільних точок, що належать їм, а потім ці точки поєднати у визначеній послідовності.

Лінією перетину може бути:

- *просторова крива* – при перетині двох кривих поверхонь чи кривої поверхні і багатогранника;
- *просторова ламана лінія* – при перетині двох багатогранників;
- в окремих випадках лінія перетину двох поверхонь може бути *плоскою* – прямою лінією, колом, еліпсом тощо.

Узагальнений алгоритм розв'язування задач на визначення лінії перетину двох поверхонь:

1. Увести допоміжну розтинальну площину, яка перетинає кожен із заданих поверхонь по найбільш простим і зручним для побудови лініям;
2. Визначити лінію перетину допоміжної площини з кожною поверхнею;
3. Знайти точки (чи  $n$  точок) перетину одержаних ліній, які й будуть шуканими;
4. Виконавши зазначені побудови  $n$  разів, отримаємо  $n$  точок. Сполучивши однойменні проєкції цих точок плавними кривими, отримаємо проєкції шуканої лінії перетину.

Послідовне введення ряду допоміжних площин, дає можливість визначити необхідне число точок.

### **Вказівка**

Допоміжну площину необхідно обирати так, щоб її лінія перетину з кожною поверхнею проєкціювалась на площину проєкцій у вигляді простих ліній – прямої чи кола.

У ряді випадках при розв'язанні задач використовують комбінацію допоміжних розтинальних площин. Зі загальної схеми побудови лінії перетину поверхонь можна виділити два основних способи – *спосіб допоміжних розтинальних площин* і *спосіб сфер (концентричних і ексцентричних сфер)*:

- *спосіб допоміжних розтинальних площин* використовують у тому випадку, коли вони перетинаються, з кожною з даних поверхонь, дають прямі лінії або кола. Часто проєкціювальні площини вибирають у вигляді площин рівня – площин, паралельних площинам проєкцій (рис. 65);
- *спосіб розтинальних концентричних сфер* використовують для побудови лінії перетину конічних та циліндричних поверхонь (рис. 66);
- *спосіб допоміжних ексцентричних сфер* використовують для побудови лінії перетину двох поверхонь обертання, які мають спільну площину симетрії (рис. 67).

На рис. 65 показано побудову лінії перетину п'ятигранної піраміди з циліндром, твірні якого перпендикулярні до горизонтальної площини проєкцій.

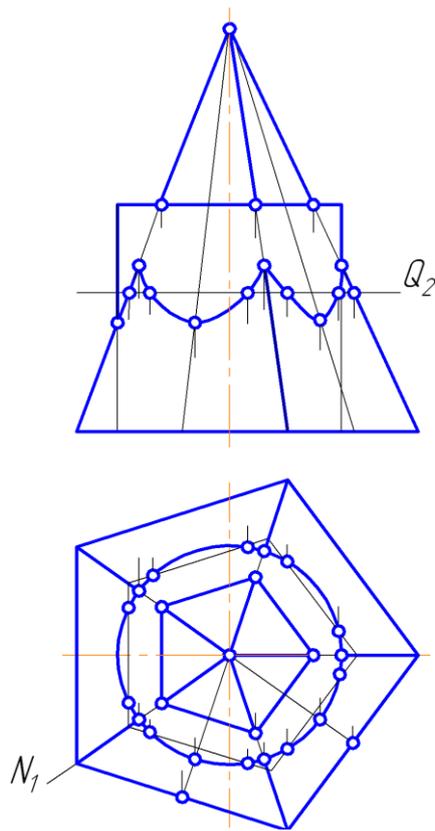


Рис. 65. Спосіб допоміжних розтинальних площин

Лінія перетину складається (рис. 65) з п'яти однакових між собою дуг еліпсів. Еліпси можуть бути побудовані по точкам перетину ребер й інших довільних прямих піраміди з поверхнею циліндра або за допомогою допоміжних горизонтальних площин, які перетинають циліндр по колу, а піраміду – по правильним п'ятикутникам.

На рис. 66 показано побудову лінії перетину зрізаного конуса з циліндром, методом концентричних сфер. Осі цих двох поверхонь обертання перетинаються і вони мають спільну фронтальну площину симетрії, а також задані однією фронтальною проекцією. Точки перетину меридіанів поверхонь обертання належать шуканій лінії перетину поверхонь. Їх визначаємо безпосередньо (без будь-яких додаткових побудов) на кресленнику.

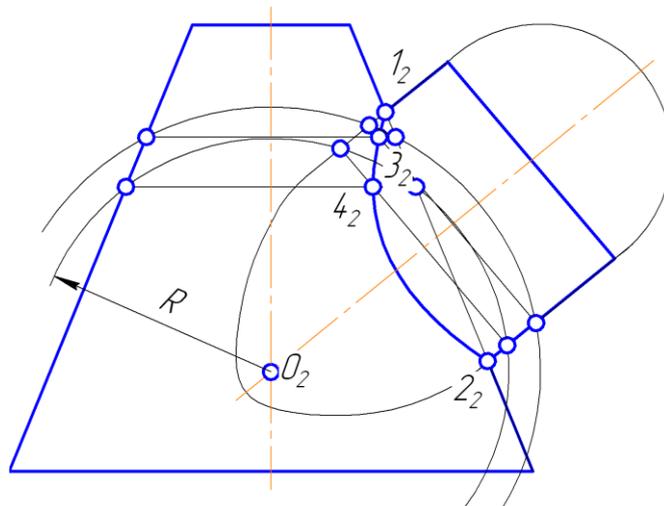


Рис. 66. Спосіб концентричних сфер

На рис. 67 побудовано лінію перетину поверхонь обертання, що мають спільну площину симетрії (одна з поверхонь – сфера), методом ексцентричних сфер. Осі поверхонь обертання не перетинаються. Кожна з таких поверхонь має цілий ряд кіл, по яким перетинаються ексцентричні сфери. Тут вісь поверхні обертання і центр сфери розташовані в одній фронтальній площині.

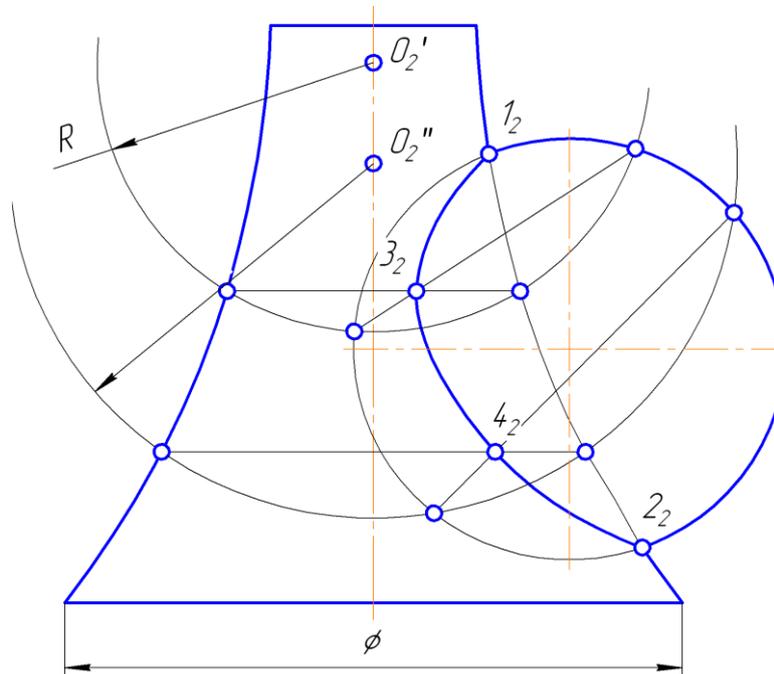


Рис. 67. Спосіб ексцентричних сфер

Будь-яка допоміжна розтинальна сфера з радіусом  $R$  і центром на осі поверхні обертання перетинає поверхню обертання і дану сферу по колу. Кола перетинаються у точках шуканої лінії перетину поверхонь. Обираючи інші розтинальні сфери різного радіуса та з різним положенням центрів на осі поверхні обертання, отримаємо ряд точок шуканої лінії перетину поверхонь.

Лінію перетину двох багатогранників можна визначити, виконуючи наступні побудови:

- 1) знайти точки перетину ребер одного багатогранника з гранями іншого;
- 2) знайти точки перетину ребер другого багатогранника з гранями першого;
- 3) знайдені точки послідовно з'єднати між собою прямими лініями.

### Вказівка

З'єднувати між собою необхідно обов'язково тільки ті точки, які лежать на одних і тих же гранях кожного з багатогранників.

Якщо хоча б одна з поверхонь має прямолінійні твірні, то лінію перетину можна визначити наступним шляхом: нанести на цій поверхні ряд твірних і знайти точки перетину їх з іншою поверхнею, а потім з'єднати ці точки кривою лінією.

Інколи для того, щоб знайти точки лінії перетину кривих поверхонь, простіше ввести не площини, а поверхню – циліндричну, конічну або кульову.

Будь-яка поверхня обертання перетинається з поверхнею кулі по колу, якщо центр кола лежить на осі обертання.

## Запитання для перевірки знань

1. Укажіть загальну схему побудови лінії перетину поверхонь.
2. По яких лініях перетинаються між собою циліндричні поверхні, твірні яких паралельні між собою?
3. По яких лініях перетинаються конічні поверхні зі спільною вершиною?
4. Які особливості побудови точок перетину кривих ліній з поверхнями?
5. Назвіть основні методи побудови ліній перетину поверхонь.
6. Опишіть методи розтинальних площин і сферичних посередників для визначення лінії перетину поверхонь.
7. Як визначити видимість лінії перетину поверхонь?

## 2.15. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

Щоб отримати наочне зображення об'єкта, що розглядається (плоского або просторового) на будь-якій площині, необхідно увести або косокутне проєкціювання, або, зберігши ортогональне проєкціювання, замінити одну з основних площин проєкцій довільно розташованою площиною.

АксонOMETрична проєкція, або аксонOMETрія, уявляє собою один із методів побудови наочних зображень об'єктів в одній площині (рис. 68).

АксонOMETричні кресленики мають властивість наочності та одночасно можуть повертатись до попереднього зображення – за таким креслеником легко уявити загальну форму об'єкта і його положення у просторі.

Зображення предмета ми отримуємо в аксонOMETрії паралельним проєкціюванням його на площину проєкцій.

Щоб отримати таке зображення об'єкт жорстко пов'язують з системою трьох взаємоперпендикулярних координатних осей  $OXYZ$ .

В залежності від направлення проєкціювання відносно площини аксонOMETричних проєкцій аксонOMETрія може бути *косокутною* або *прямокутною*.

### Означення

*Прямокутна ізометрична проєкція* – прямокутна аксонOMETрична проєкція предмета, яка має неспотворені чи однаково спотворені розміри вздовж аксонOMETричних осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  (рис. 68).

*Косокутна аксонOMETрична проєкція* – аксонOMETрична проєкція предмета на площині кресленика, не перпендикулярній до напрямку проєкціювальних променів.

АксонOMETричні проєкції використовуються як допоміжні кресленики, коли вимагається пояснити плоске зображення (кресленик предмета). Найчастіше використовують *прямокутну ізометрію* (рис. 69, а), для якої показники спотворення по всім осям однакові і дорівнюють 1 (збільшені), а також *прямокутну диметрію* – коефіцієнти спотворення по осям  $OX$  і  $OZ$  однакові і дорівнюють 1, по осі  $OY$  – 0,5 (рис. 69, б).

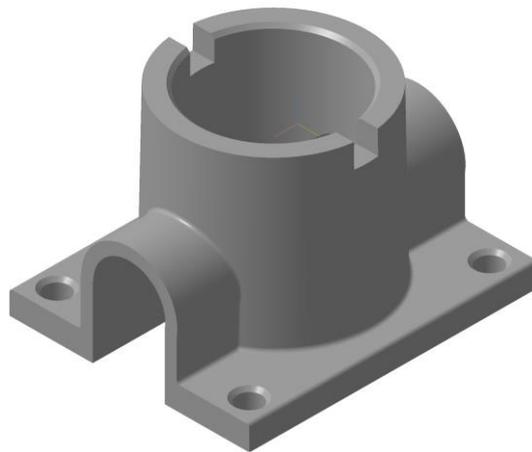
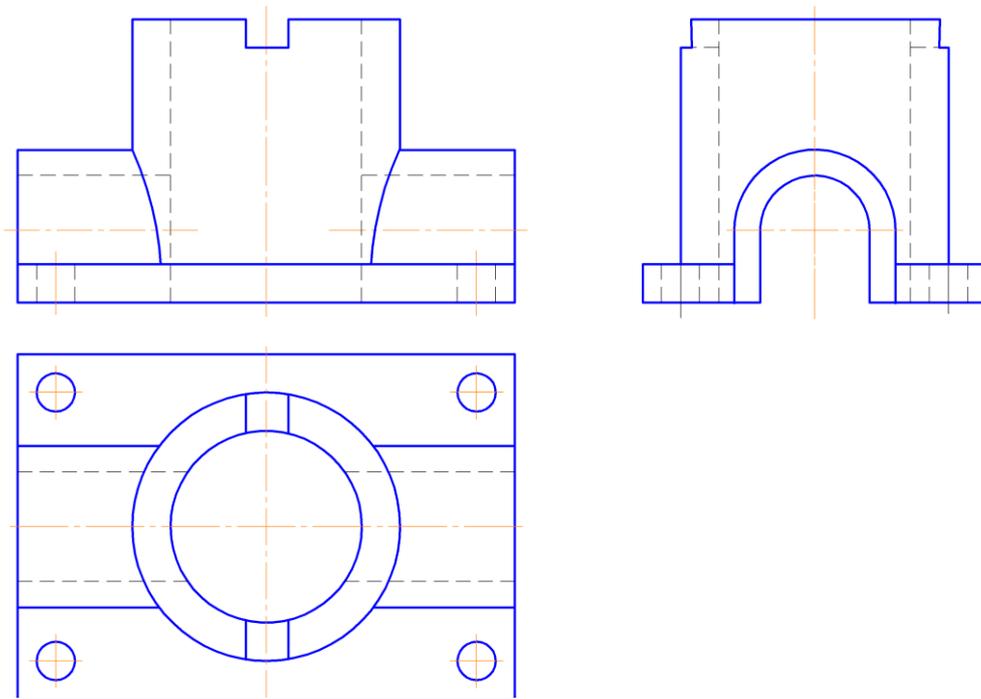


Рис. 68. Аксонометричне зображення деталі

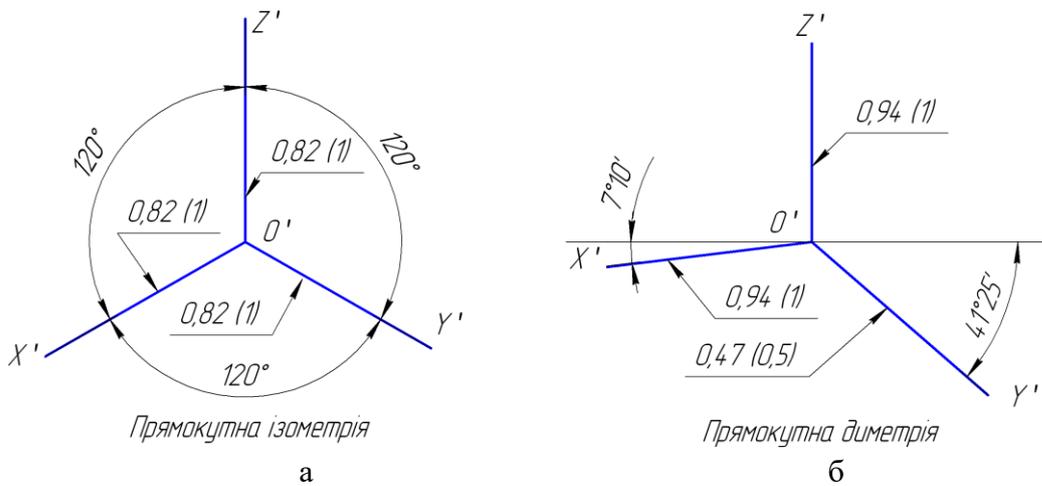


Рис. 69. Направлення осей в прямокутних аксонометричних проєкціях

У ході побудов аксонометричних проєкцій відрізки прямих ліній поверхонь, що паралельні осям проєкцій на комплексному кресленнику, повинні бути також паралельними відповідним аксонометричним осям. Плоскі криві і дуги кола великих радіусів в аксонометричних проєкціях будуються за координатами точок.

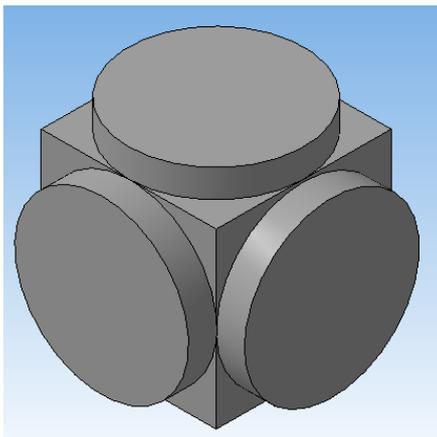
Для побудови ізометричних проєкцій зручно користуватись трикутником з кутом  $30^\circ$ . Для побудови фронтальної диметричної проєкції необхідно використовувати трикутник з кутом  $45^\circ$ .

Ізометричними проєкціями кіл, розмічених у площинах проєкцій або в паралельних їм площинах, є еліпси з однаковими співвідношеннями осей (рис. 70, а). Великі осі еліпсів дорівнюють  $1,22d$ , а малі –  $0,71d$ , де  $d$  – діаметр зображуваного кола. Напрямок осей еліпсів залежить від положення кола і визначається за правилом:

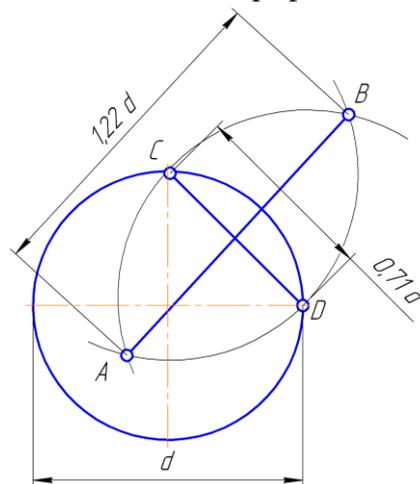
### Правило

У прямокутній аксонометрії велика вісь еліпса завжди перпендикулярна до тієї аксонометричної осі, якої немає в площині, а мала збігається з напрямком цієї осі, або паралельна до неї.

На практиці прийнято замінити еліпси в ізометрії овалами, що значно спрощує побудову. На рис. 70, б показано визначення великої і малої осей еліпса графічно.

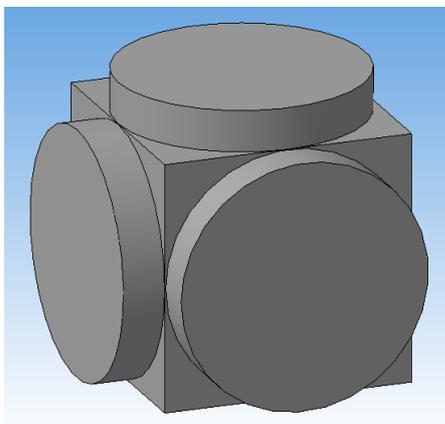


а

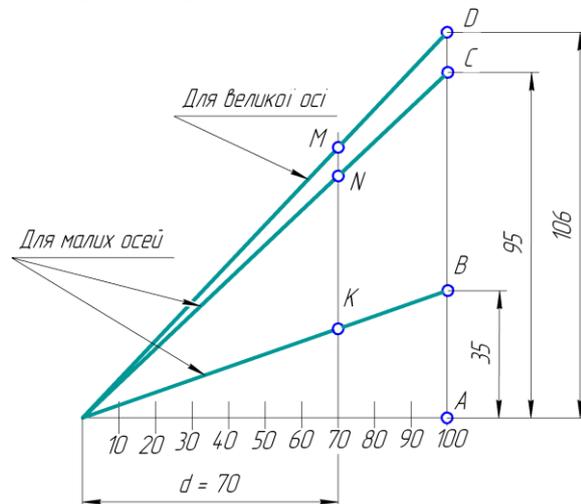


б

Рис. 70. Прямокутна ізометрична проєкція кола



а



б

Рис. 71. Прямокутна диметрична проєкція кола

На рис. 71, а зображено кола в прямокутній диметричній проекції, які проєкціюють у вигляді еліпсів, малі осі яких, як і в ізометрії, паралельні осям, яких немає у площинах даних кіл.

Довжина великої осі для всіх еліпсів однакова і дорівнює  $1,06d$ , де  $d$  – діаметр зображуваного кола. Але довжина малої осі різна: для еліпса, що лежить або паралельний фронтальній площині проєкцій вона становить –  $0,95d$ , а для еліпсів, що лежать або паралельні до горизонтальної і профільної площин проєкцій –  $0,35d$  (рис. 71, а). На рис. 71, б показано визначення розмірів великої і малої осі еліпса за допомогою графіка.

Лінії штрихування і перерізів в аксонометричних проєкціях наносять паралельно одній з діагоналей аксонометричних проєкцій квадратів, які лежать у відповідних координатних площинах і сторони, яких паралельні аксонометричним осям (рис. 72).



Рис. 72. Нанесення штрихування в аксонометричних проєкціях у розтинах

### Запитання для перевірки знань

1. Наведіть і охарактеризуйте види стандартних аксонометричних проєкцій відповідно до ГОСТ 2.317-69.
2. Як розміщено осі в ізометричній проєкції? У диметричній проєкції?
3. Яка послідовність побудови наочного зображення поверхні?
4. Як зображається коло в аксонометричних проєкціях?
5. Який напрям і розміри мають велика та мала вісі еліпсів у прямокутній ізометрії і диметрії кола?

# РОЗДІЛ 3

## ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОПІДГОТОВКИ

1. Побудувати горизонтальну і фронтальну проекції точок за заданими координатами, встановити їх положення (табл. 10):

Таблиця 10

Координати Точка	X	Y	Z
A	20	25	10
B	15	-15	-20
C	-10	20	15
D	25	10	-25
E	10	-25	25

2. Побудувати епюр точки В, який був би симетричним до заданої точки А (20; 15; 10), відносно горизонтальної площини проекцій.

3. Побудувати епюр точки В, який був би симетричним до заданої точки А (25; - 5; 15), відносно фронтальної площини проекцій.

4. Задано точку А і фронтальну проекцію точки В. Встановити в якому октанті простору знаходиться точка В, якщо відстань між  $A_1$  і  $B_1$  дорівнює 20 мм (рис. 73)?

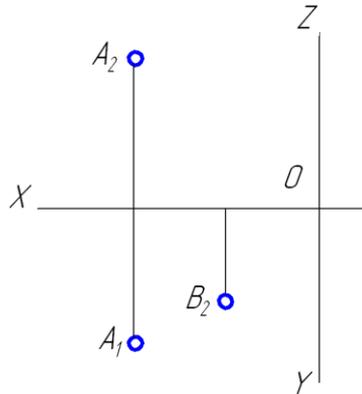


Рис. 73

5. Побудувати епюр точки А, яка знаходиться в зазначеній чверті та задано одну з її проекцій і вказано залежність між координатами ( $y=z+n$ ) (рис. 74–76).

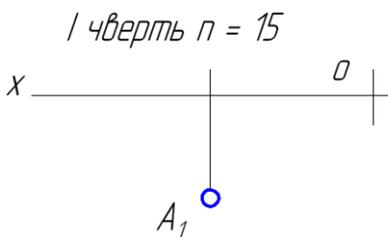


Рис. 74

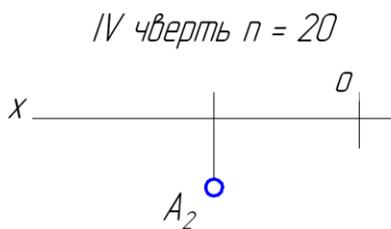


Рис. 75

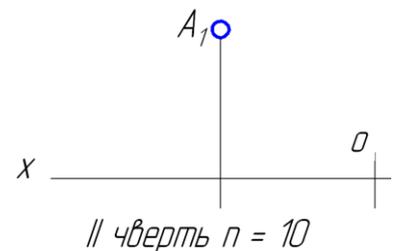


Рис. 76

6. За координатами кінців відрізка прямої побудувати дві її проекції, визначити положення прямої стосовно площин проекцій (табл. 11):

Координата	1		2		3		4	
	A	B	C	D	E	F	K	L
X	10	40	15	50	45	15	40	40
Y	25	5	5	30	0	0	35	5
Z	10	25	25	25	20	30	20	20
Положення прямої								

7. Визначити за епюром, чи належать вказані точки прямій L і вказати їх розташування в октантах (рис. 77)

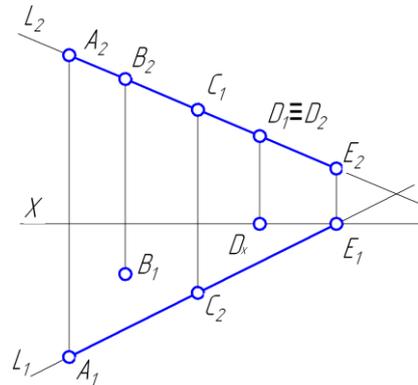


Рис. 77

8. Визначити на прямій AB точку C (рис. 78), якщо відомо відношення її координат –  $\frac{z}{y} = \frac{2}{1}$ :

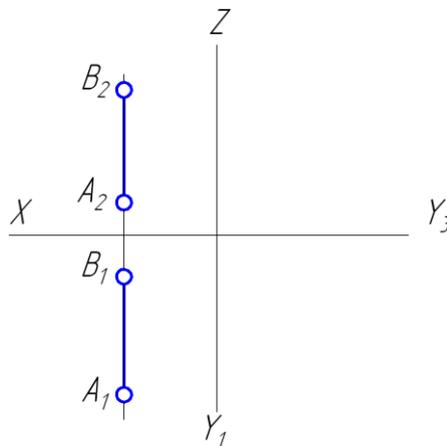


Рис. 78

9. Визначити на прямій точку C, якщо відома її відстань від однієї з площин проєкцій (рис. 79):

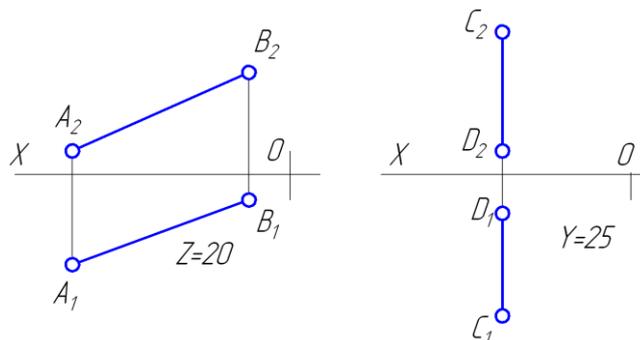


Рис. 79

10. Побудувати сліди прямої  $L$ , заданої точками  $A$  і  $B$  (табл. 12). Указати, через які октанти проходить пряма.

Таблиця 12

Варіант	Координати точки (x, y, z)		Варіант	Координати точки (x, y, z)	
	A	B		A	B
1	65, 20, 5	-45, 5, 40	14	-75, 40, -65	-30, -5, -40
2	75, 40, 65	30, 5, 40	15	30, 40, 5	75, 60, 40
3	45, -5, -40	-65, -20, -5	16	-75, -60, -40	-30, -40, 5
4	-30, -5, -40	-75, 40, -65	17	-50, 40, -10	75, 5, 50
5	75, 60, 40	30, 40, 5	18	-75, -5, -50	50, -40, 10
6	-30, -40, -5	-75, -60, -40	19	-85, 65, 0	35, 15, -55
7	75, 5, 50	-50, 40, -10	20	-35, -15, 55	85, -65, 0
8	50, -40, 10	-75, -5, -50	21	65, 20, 5	-45, 5, 40
9	35, 15, -55	-85, 65, 0	22	75, 40, 65	30, 5, 40
10	85, -65, 0	-35, -15, 55	23	50, -40, 10	-75, -5, -50
11	-45, 5, 40	65, 20, 5	24	35, 15, -55	-85, 65, 0
12	30, 5, 40	75, 40, 65	25	85, -65, 0	-35, -15, 55
13	-65, -20, -5	45, -5, -40			

11. Визначити сліди прямої, яка проходить через точки  $A$  і  $B$  (рис. 80):

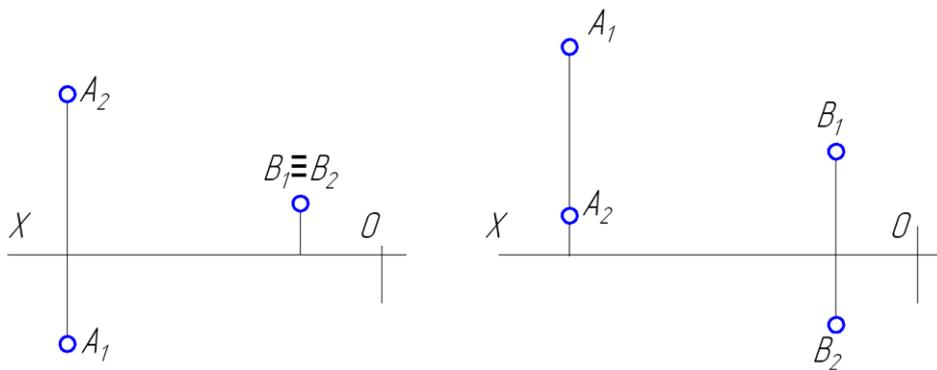


Рис. 80

12. Визначити взаємне положення двох прямих, заданих точками  $AB$  і  $CD$  (рис. 81):

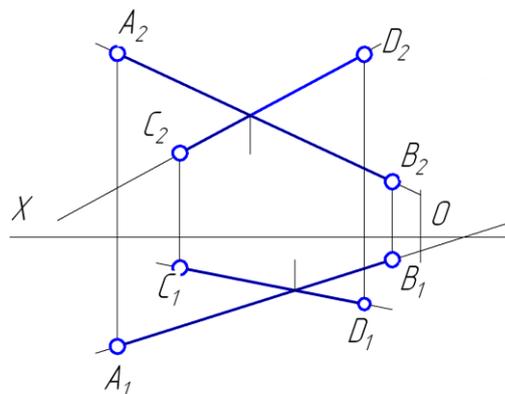


Рис. 81

13. Визначити взаємне положення двох прямих, заданих точками  $AB$  і  $CD$  (рис. 82):

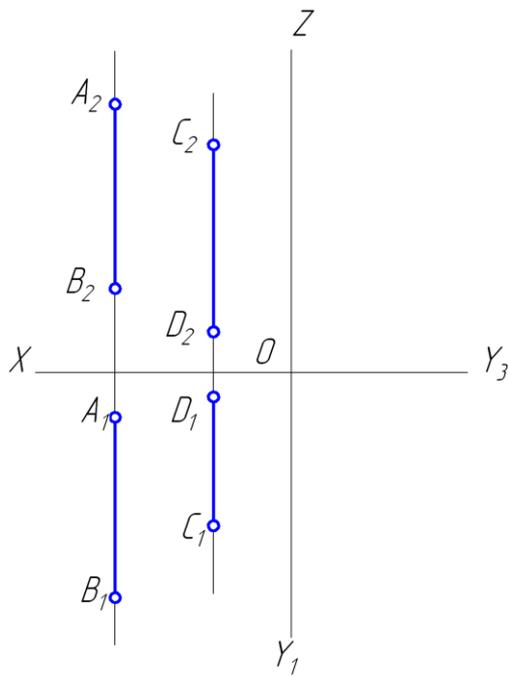


Рис. 82

14. Через точку  $M$  провести пряму  $L$ , яка була б паралельною заданій (рис. 83):

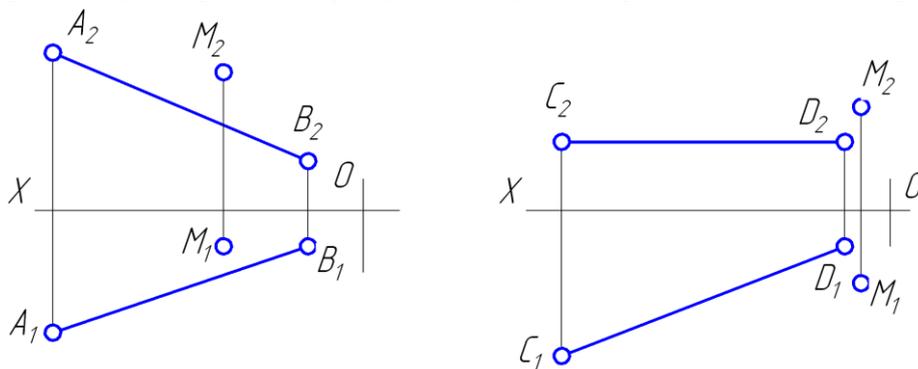


Рис. 83

15. Побудувати горизонтальну проекцію точки  $A$ , яка належить фронтальній прямій. Фронтальна пряма перетинає пряму  $L$  і похила під кутом  $45^\circ$  (рис. 84):

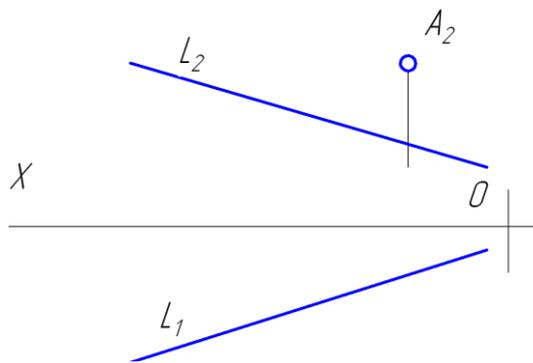


Рис. 84

16. Задано пряму  $AB$  і точку  $C$ . Провести через точку  $C$  довільну пряму, яка б перетинала пряму  $AB$  (рис. 85).

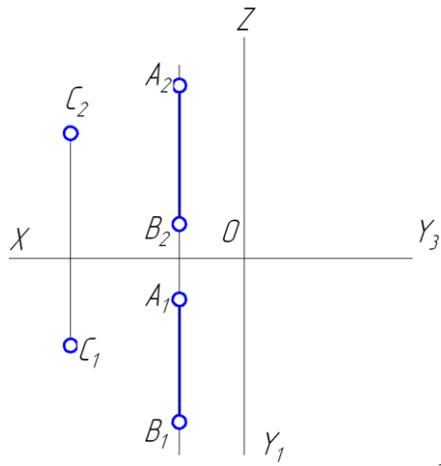


Рис. 85

17. Через точку  $C$  провести пряму, яка б була паралельна вертикальній площині проєкцій і перетинала задану пряму  $AB$  (рис. 86):

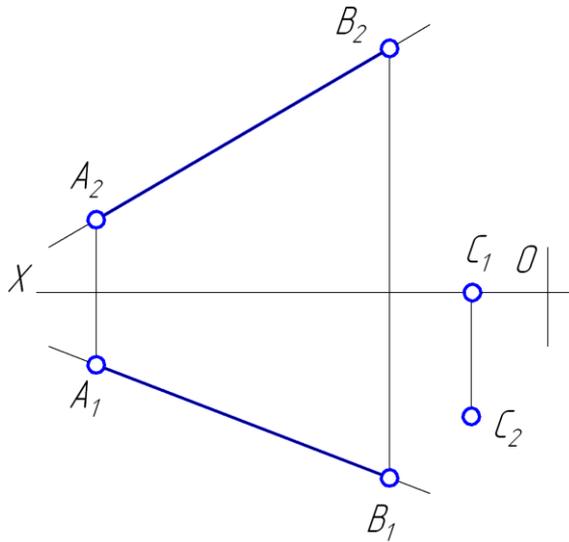


Рис. 86

18. Перетнути прямі, які задані точками  $AB$  і  $CD$ , прямою  $EF$ , яка б проходила через точку  $M$  (рис. 87):

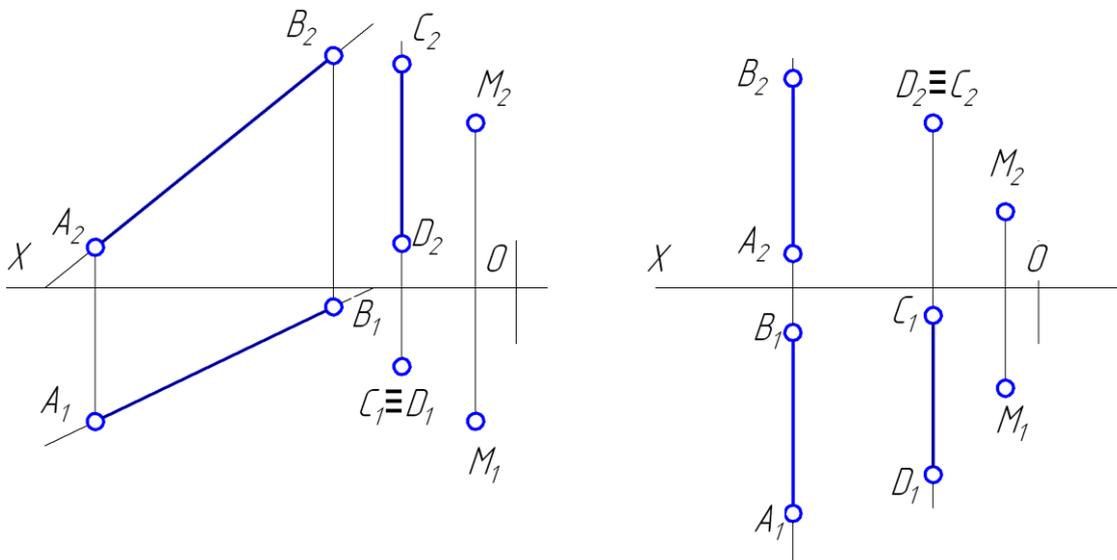


Рис. 87

19. Поділити відрізок АВ точкою С в заданому відношенні:  $AB:CB=2:3$  (рис. 88);  $AC:CB=1:2$  (рис. 89).

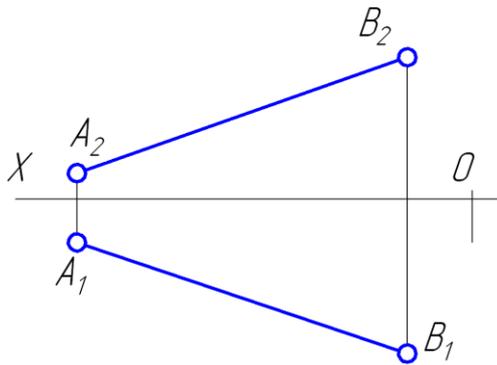


Рис.88

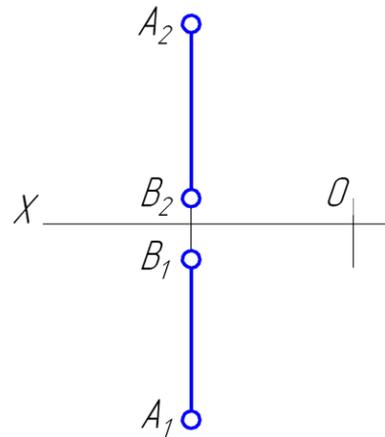


Рис. 89

20. Визначити дійсну величину відрізка АВ і кути нахилу  $\alpha$  і  $\beta$  його до площин проекцій (рис. 90, 91):

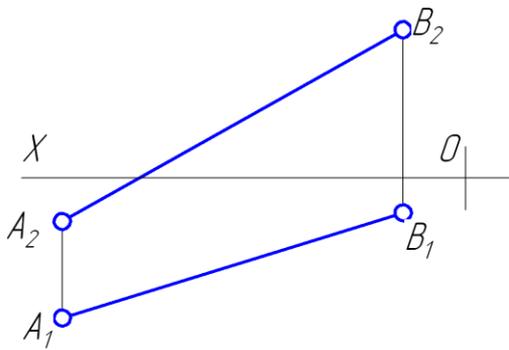


Рис. 90

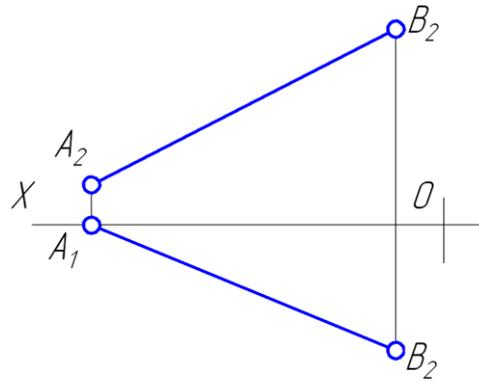


Рис. 91

21. Задано пряму ВС і точку А. Провести через точку А пряму, яка перетинає пряму ВС під заданим кутом  $\varphi$  (рис. 92).

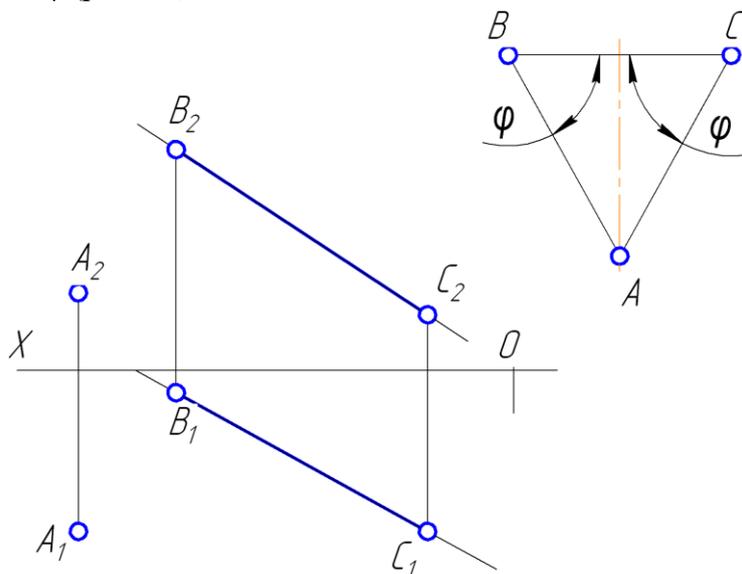


Рис. 92

22. В площині, заданої паралельними прямими AB і CD, провести довільну пряму (рис. 93):

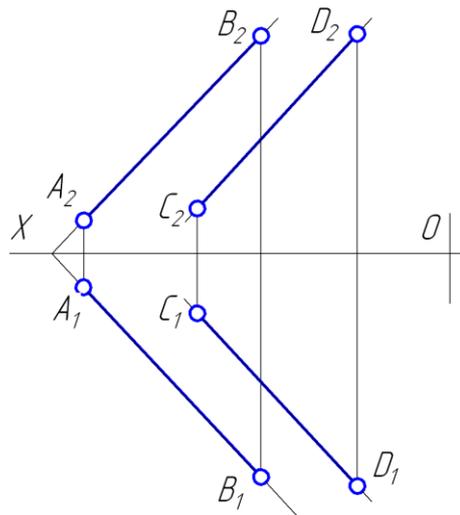


Рис. 93

23. В площині, заданої прямою AB і точкою C, провести горизонталь на відстані 15 мм від горизонтальної площини проєкцій (рис. 94):

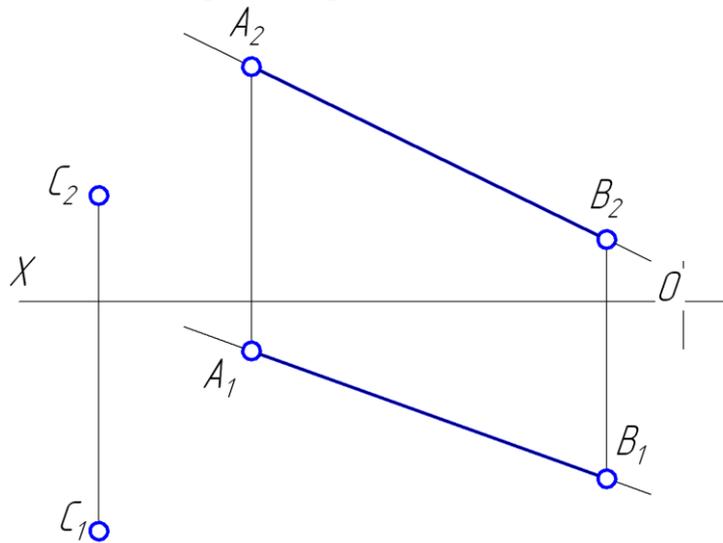


Рис. 94

24. В площині, заданої паралельними прямими AB і CD, провести фронталь на відстані 20 мм від вертикальної площини проєкцій (рис. 95):

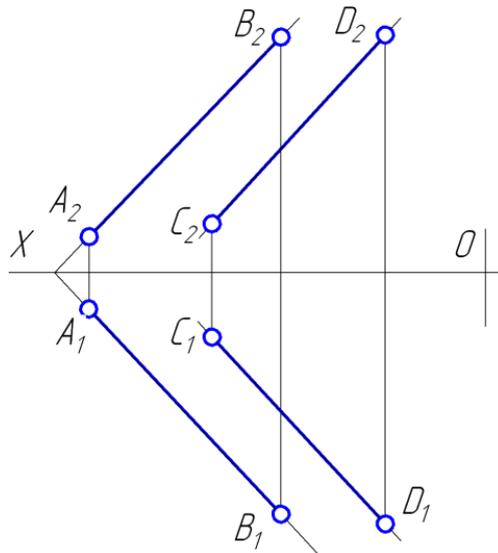


Рис. 95

25. В площині, заданої прямими  $AB$  і  $CD$ , що перетинаються провести лінію найбільшого скату (рис. 96):

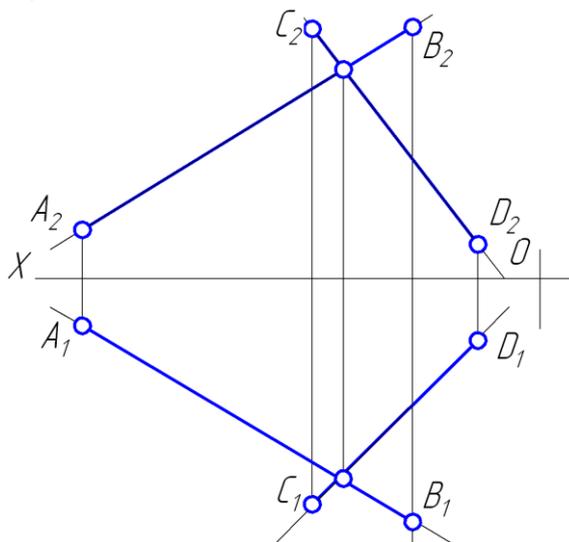


Рис. 96

26. Побудувати сліди площини, яка задана прямою  $AB$  і точкою  $C$  (рис. 97):

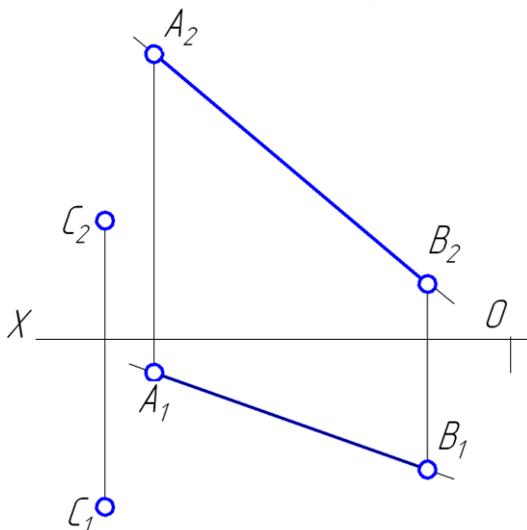


Рис. 97

27. Побудувати сліди площини, яка задана двома прямими  $AB$  і  $CD$ , що перетинаються (рис. 98):

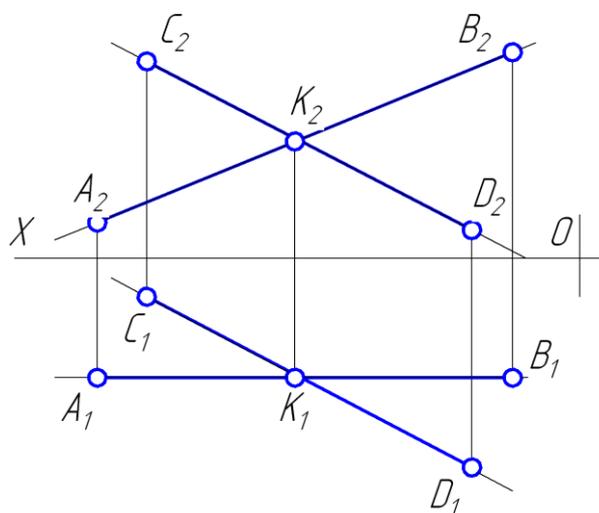


Рис. 98

28. Побудувати проєкції точок, яких не вистачає та які розташовані в заданих площинах (рис. 99):

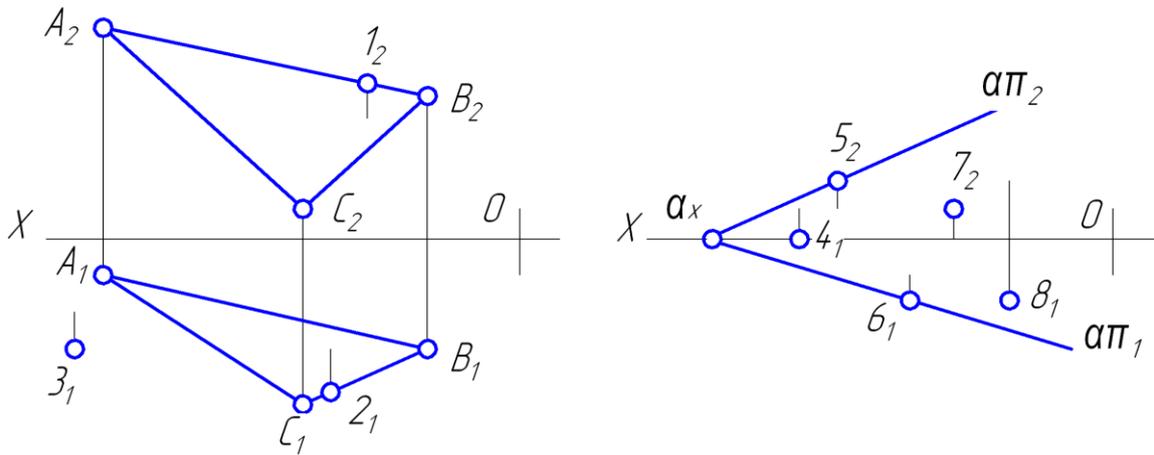


Рис. 99

29. Побудувати сліди площини  $P$  загального положення, яка проходить через точку  $A$  (рис. 100):

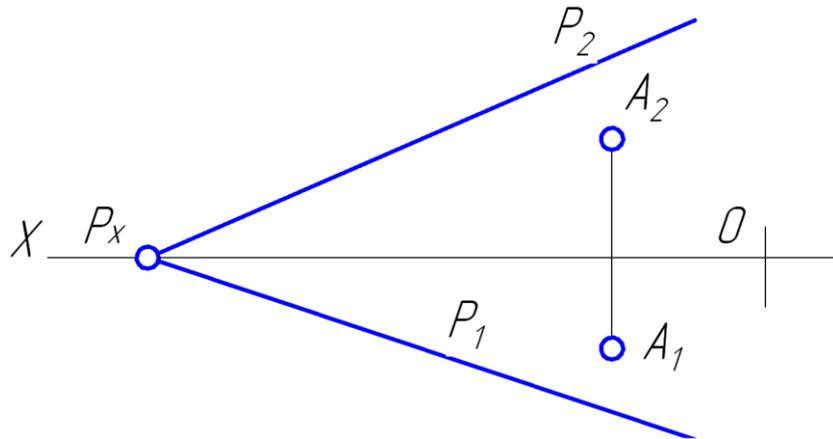


Рис. 100

30. Встановити, чи належить пряма  $AB$  площині  $P$ , заданої слідами (рис. 101):

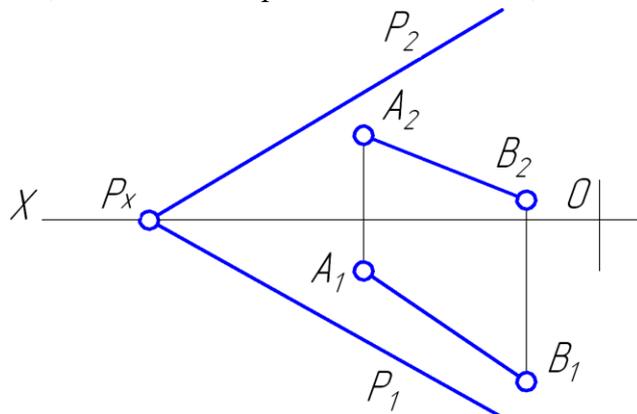


Рис. 101

31. Через задану точку  $A$  побудувати площину, яка задана слідами, перпендикулярна до горизонтальної площини проєкцій, і яка утворює з фронтальною площиною проєкцій кут  $30^\circ$  (рис. 102):

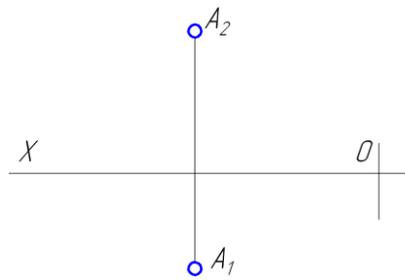


Рис. 102

Примітка.

Кут між горизонтально-проекціювальною площиною і фронтальною площиною проекцій визначається як кут між горизонтальним слідом площини і віссю проекцій.

32. Провести через точку  $A(-30,-20)$  горизонтально-проекціювальну площину  $P$ , яка становить з фронтальною площиною проекцій кут  $45^\circ$ .

33. Провести через точку  $B(30,-20)$  фронтально-проекціювальну площину  $\Phi$ , яка становить з горизонтальною площиною проекцій кут  $30^\circ$ .

34. Провести через точку  $C(-20, 30)$  профільно-проекціювальну площину  $\Omega$ , яка становить з горизонтальною площиною проекцій кут  $30^\circ$ ; з фронтальною площиною –  $45^\circ$ .

35. На яких з рисунків 103 ( $a-d$ ), щоб визначити лінію перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$ , доцільно використовувати нижче вказані допоміжні площини (відповіді записати до таблиці 13):

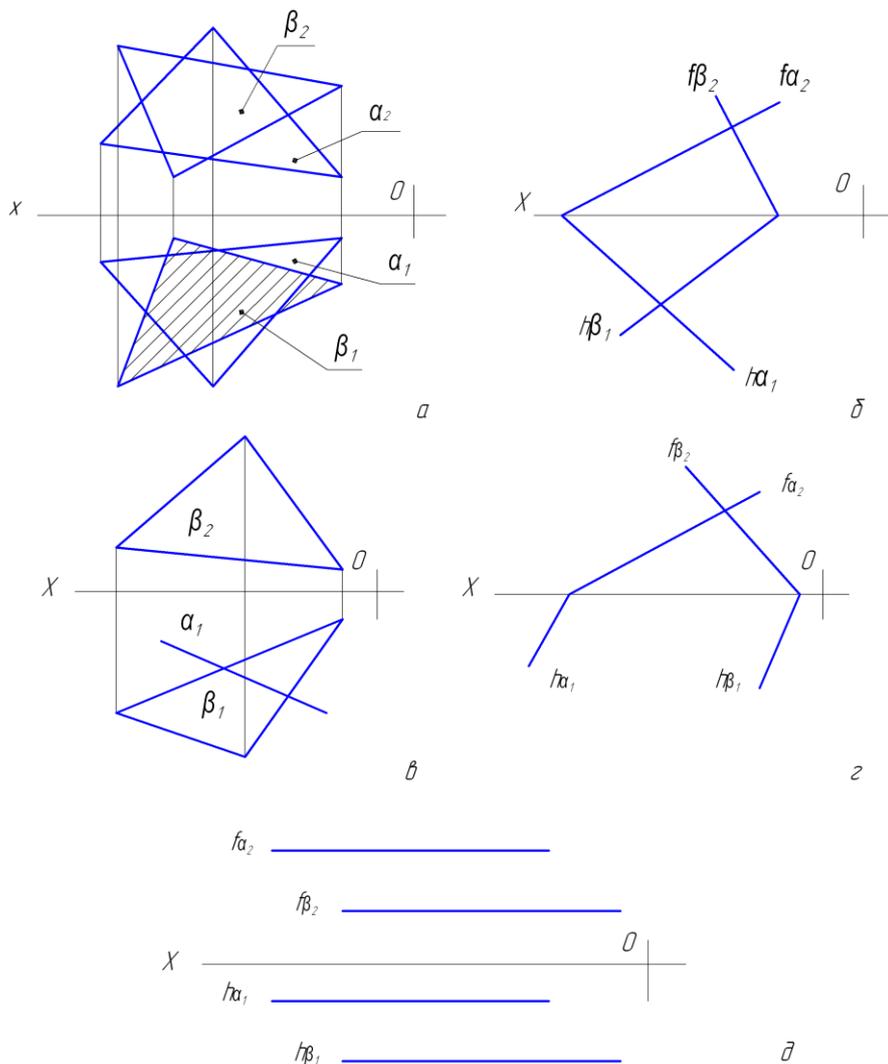


Рис. 103

Допоміжні площини	Кресленик
Горизонтальні	
Фронтальні	
Горизонтально-проекціювальні	
Фронтально-проекціювальні	
Загального положення	
Не треба площин	

36. Визначити точку перетину прямої з площиною (рис. 104, а-в):

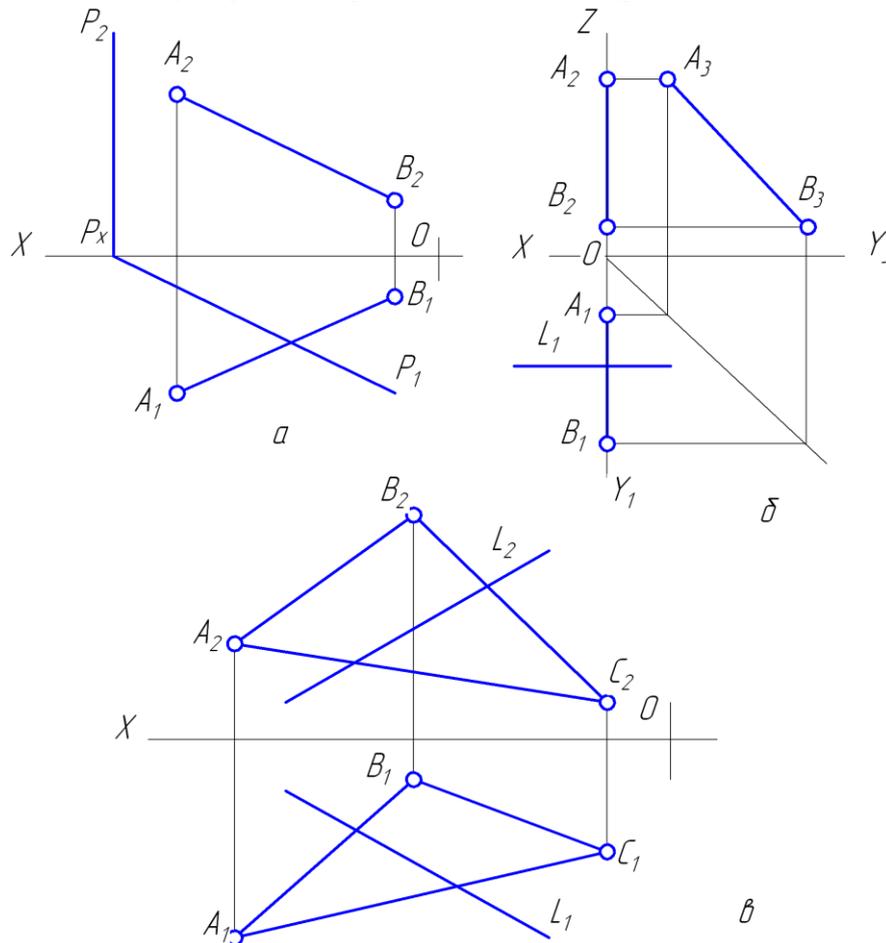
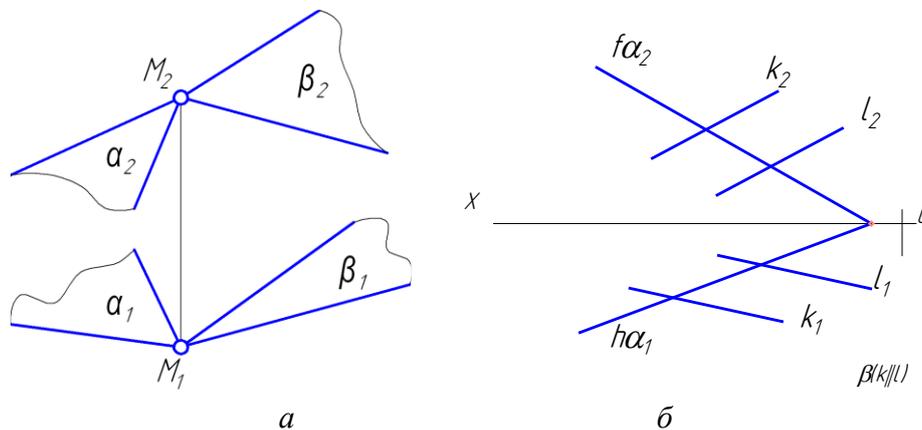


Рис. 104

37. Визначити лінію взаємного перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$  (рис. 105, а-в), встановити видимість елементів:



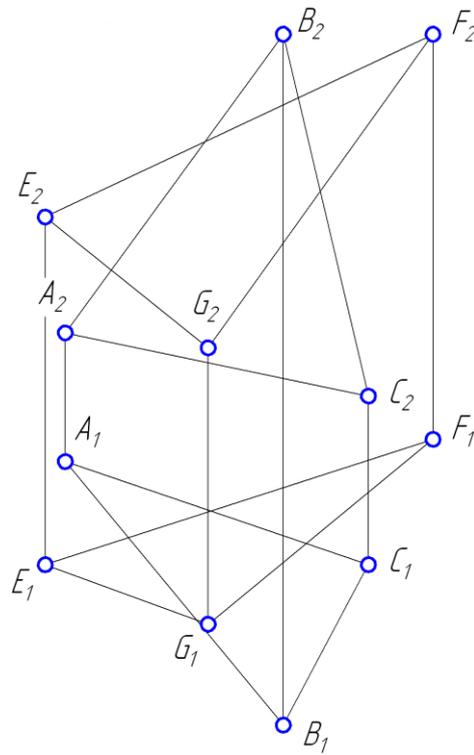


Рис. 105

в

38. Через точку  $A$  провести пряму, яка була б паралельна площині, заданій слідами (рис. 106):

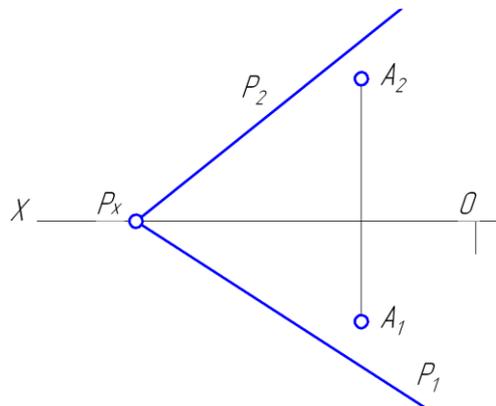


Рис. 106

39. Задано пряму  $MN$  і площину паралельними прямими  $AB$  і  $CD$  (рис. 107). Встановити, чи вони паралельні між собою?

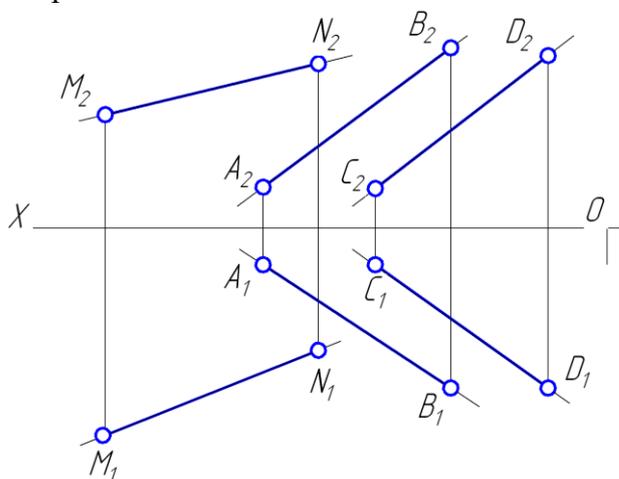


Рис. 107

40. Задано площину  $P$  і точку сходження слідів площини  $Q$ , яка паралельна площині  $P$ . Побудувати сліди площини  $Q$  (рис. 108, а, б).

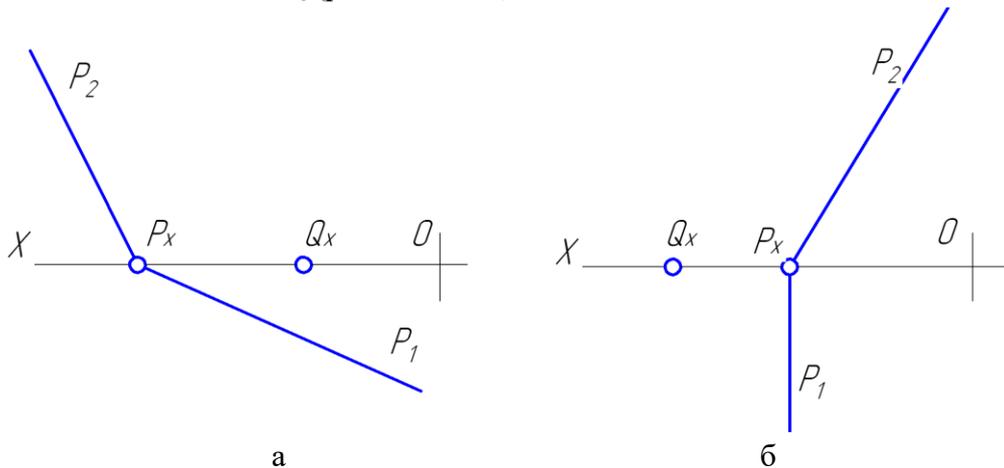


Рис. 108

41. Встановити, чи паралельні площини, які задано прямими: паралельними  $AB$  і  $CD$  і  $EF$  і  $GK$ , що перетинаються (рис. 109).

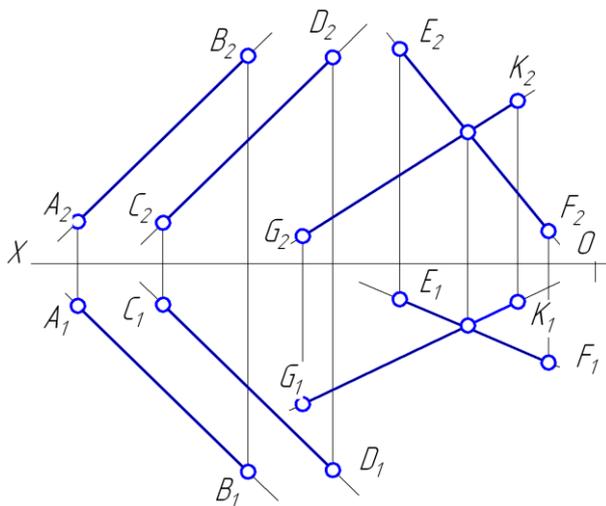


Рис. 109

42. Із заданої точки  $A$  опустити перпендикуляр на площину  $P$  (рис. 110, а, б):

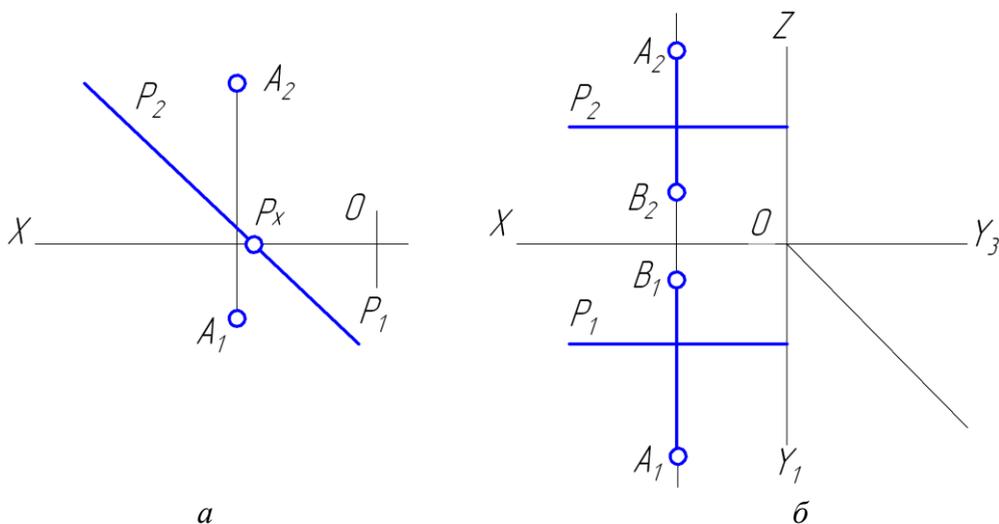


Рис. 110

43. Визначити відстань від точки А до площини Р (рис. 111, а, б):

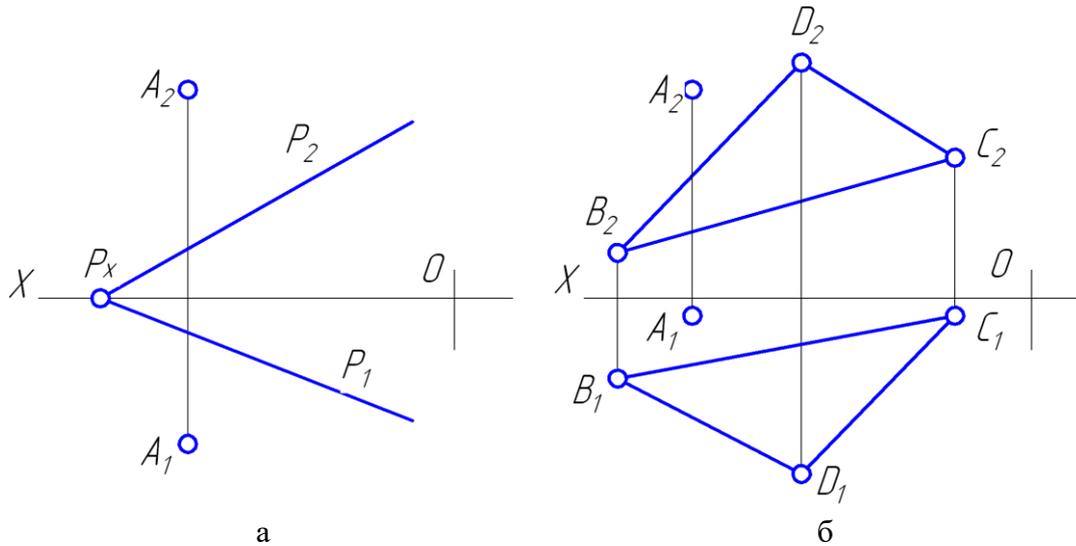


Рис. 111

44. Через точку В провести пряму, яка б перетинала задану пряму L під прямим кутом (рис. 112).

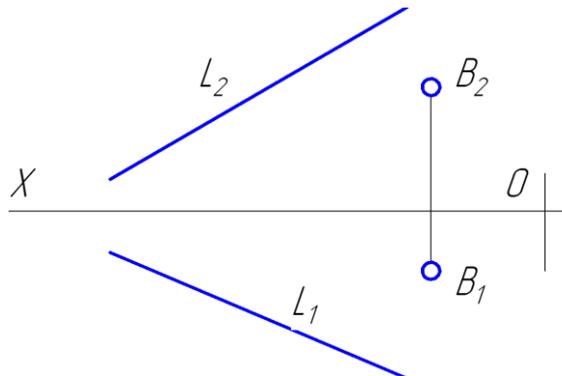


Рис. 112

45. На прямій лінії L визначити точку А, яка рівновіддалена від точок Р і Q (рис. 113).

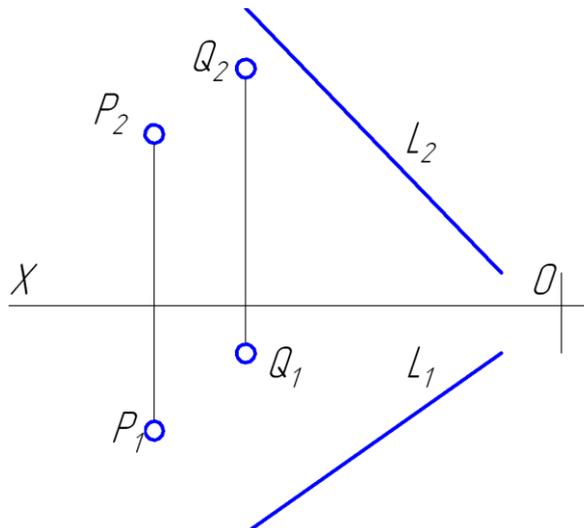


Рис. 113

46. Задано площину  $P$ . Побудувати геометричне місце точок простору на відстані  $l = 30$  мм (рис. 114).

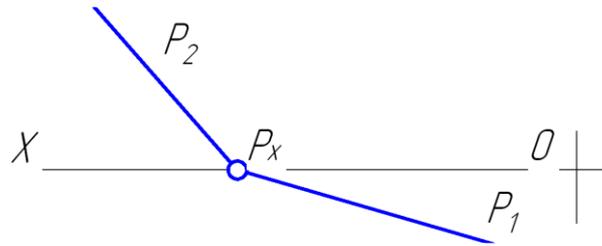


Рис. 114

Примітка

Шуканим геометричним місцем точок є площина, яка паралельна даній площині і яка віддалена від неї на відстані 40 мм.

47. Побудувати геометричне місце точок простору, рівновіддалених від кінців відрізка  $AB$  (рис. 115).

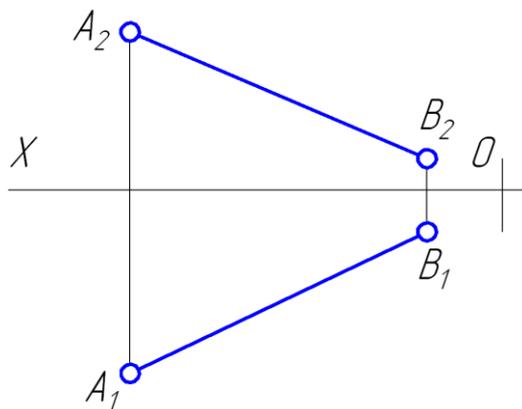


Рис. 115

Примітка

Шуканим геометричним місцем точок є площина, яка перпендикулярна до даного відрізка і проходить через його середину.

48. Визначити відстань між мимобіжними прямими  $AB$  і  $CD$  (рис. 116).

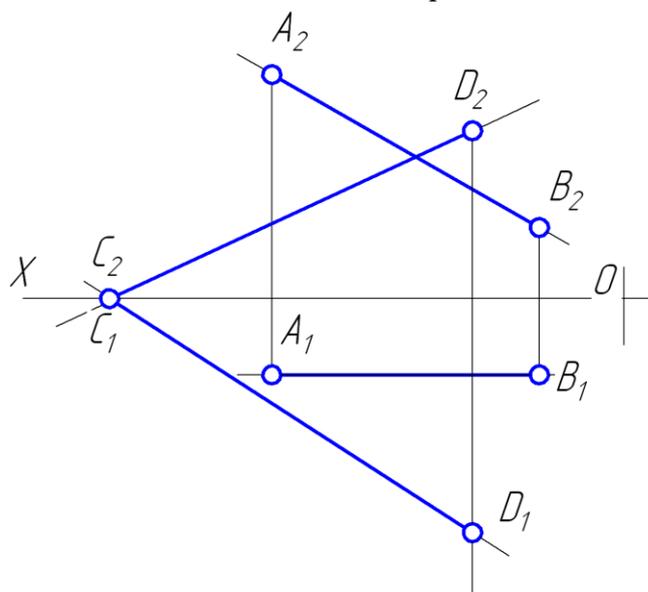


Рис. 116

Примітка

Відстань між мимобіжними прямими вимірюється відстанню між площинами паралелізму чи відстанню між однією з прямих до площини, яка проходить через іншу пряму, паралельну першій прямій.

49. Задано відрізок АВ. Визначити його проєкції, якщо в новій системі площин проєкцій він повинен бути розташованим перпендикулярно до вертикальної площини проєкцій (рис. 117, а), перпендикулярно до горизонтальної площини проєкцій (рис. 117, б).

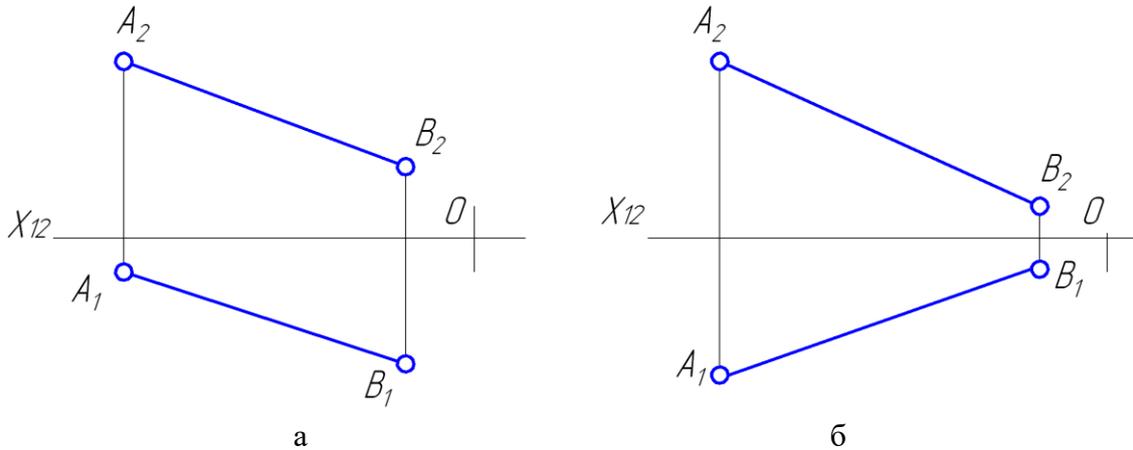


Рис. 117

50. Опустити перпендикуляр з точки С на пряму АВ (рис. 118).

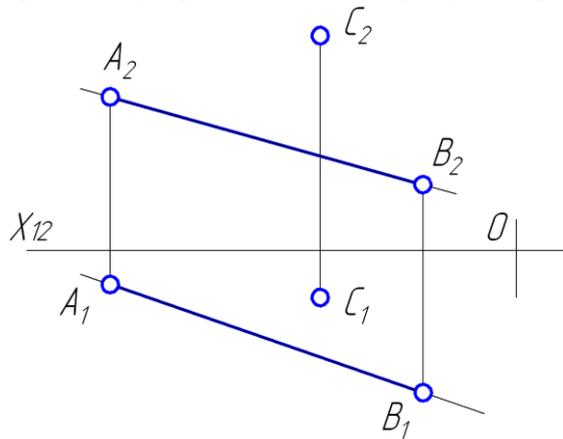


Рис. 118

51. Замінити площини проєкцій на нові так, щоб вертикальні проєкції паралельних прямих АВ і CD співпали в одну пряму (рис. 119).

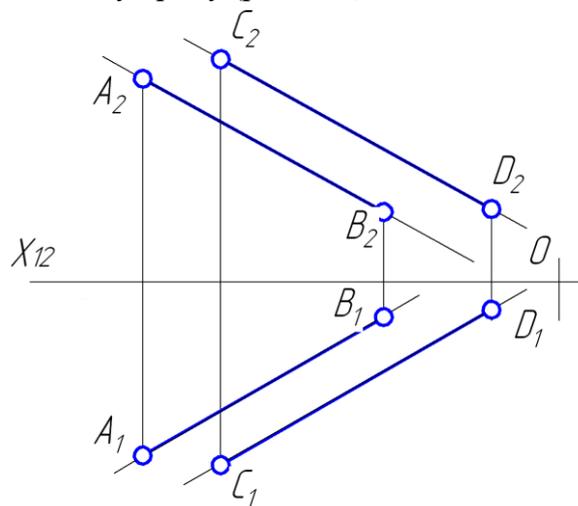


Рис. 119

*Примітка*

Паралельні прямі АВ і CD визначають площину, і їх вертикальні проєкції співпадуть в одну пряму лінію, якщо ця площина в новій системі площин проєкцій буде перпендикулярною до вертикальної площини проєкцій.

52. Визначити центр кола, описаного навколо трикутника ABC (рис. 120).

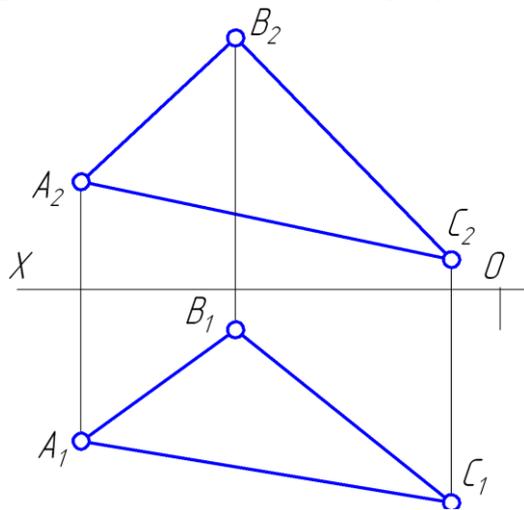


Рис. 120

Примітка

Центр кола, описаного навколо трикутника, лежить на перетині перпендикулярів, проведених до його сторін через середини.

53. Визначити відстань від точки C до прямої AB (задачі розв'язати способом паралельного переміщення, рис. 121, а, б).

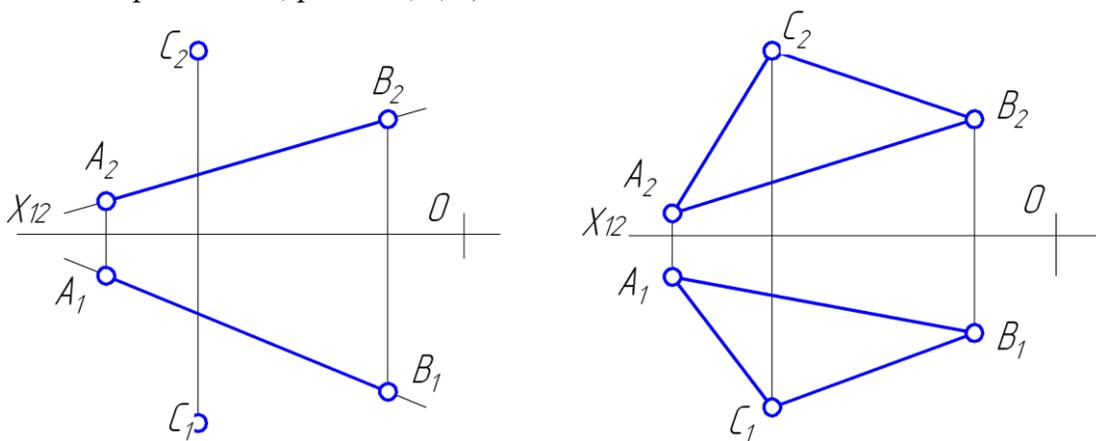


Рис. 121

54. Задано пряму AB і горизонтальну проекцію прямої CD, яка паралельна прямій AB. Визначити вертикальну (фронтальну) проекцію прямої CD, якщо відстань між заданими прямими 20 мм. Задачу розв'язати методом суміщення (рис. 122).

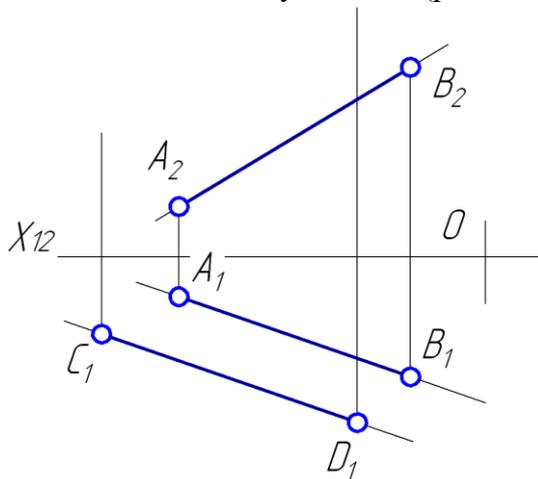


Рис. 122

### Приклад

Розв'язок задачі № 54 методом заміни площин проекцій (рис. 123).

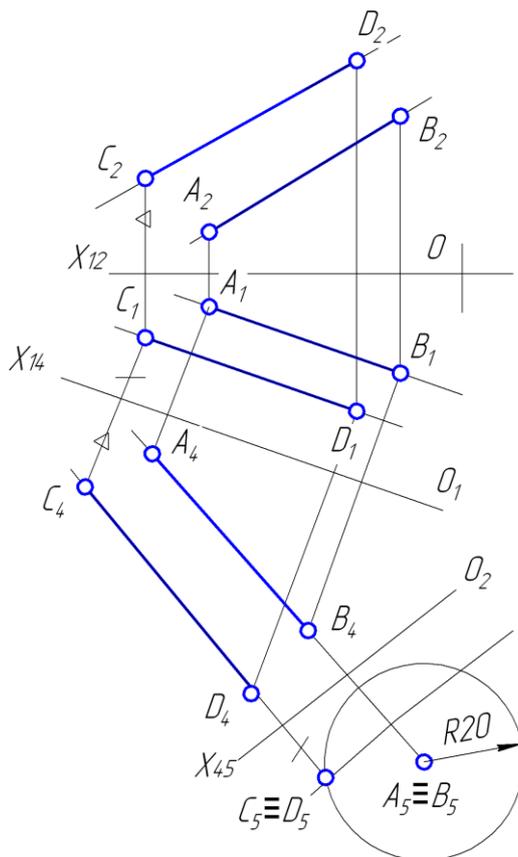


Рис. 123. Приклад розв'язання задачі

55. Обертанням навколо горизонталі визначити справжню величину трикутника ABC (рис. 124).

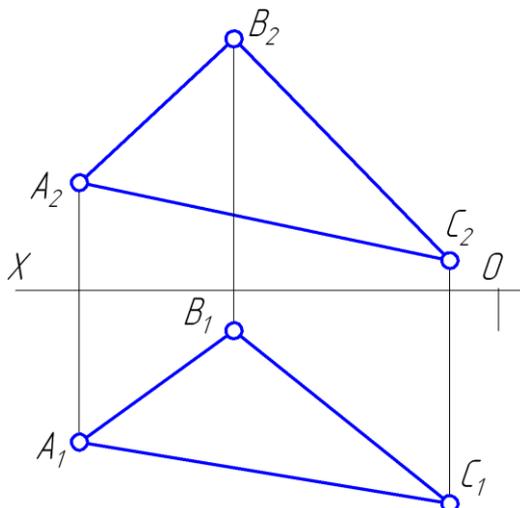


Рис. 124

56. Визначити кут при ребрі SA піраміди SABCD (рис. 125).

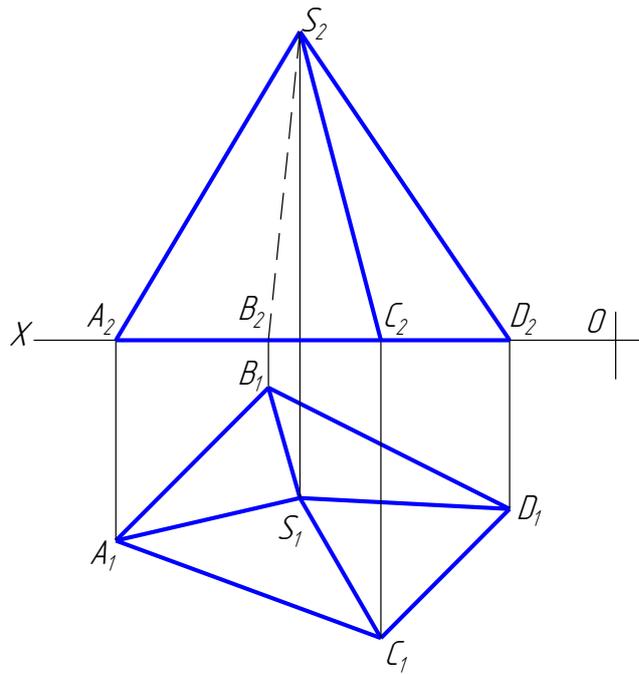


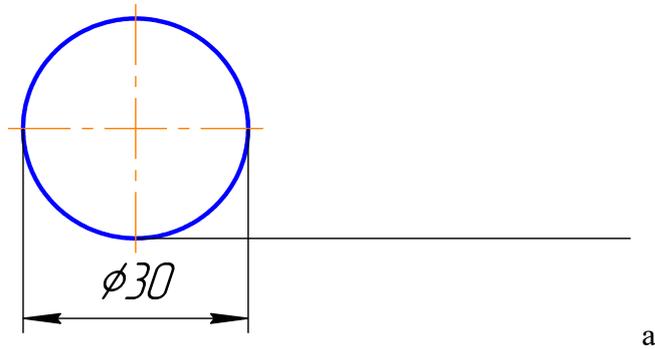
Рис. 125

Примітка.

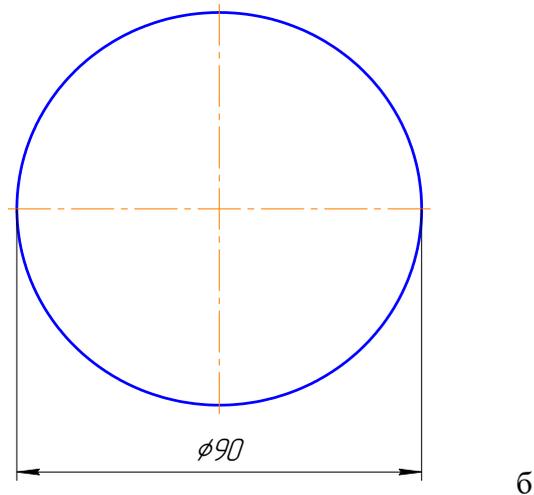
Шуканий кут при ребрі SA визначається, як двогранний кут між гранями CSA і DSA. Для цього необхідно перетворити ребро SA в проєкціовальне положення.

**57.** Побудувати лекальні криві (рис. 126, а–д):

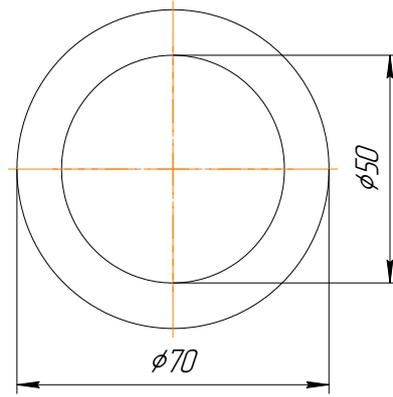
а) евольвенту кола



б) спіраль Архімеда

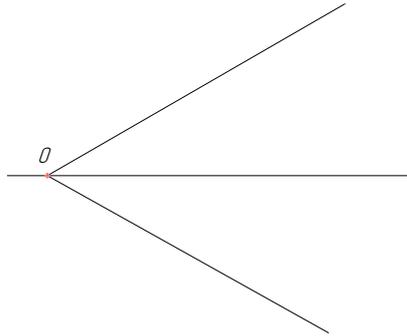


в) еліпс



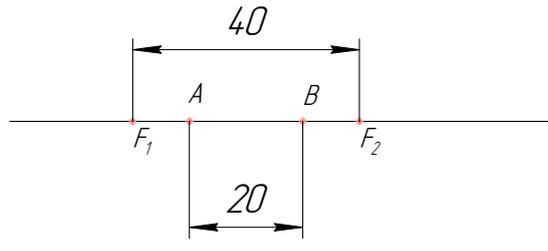
в

г) параболу



г

д) гіперболу



д

Рис. 126

58. Спрямити криву лінію (рис. 127):

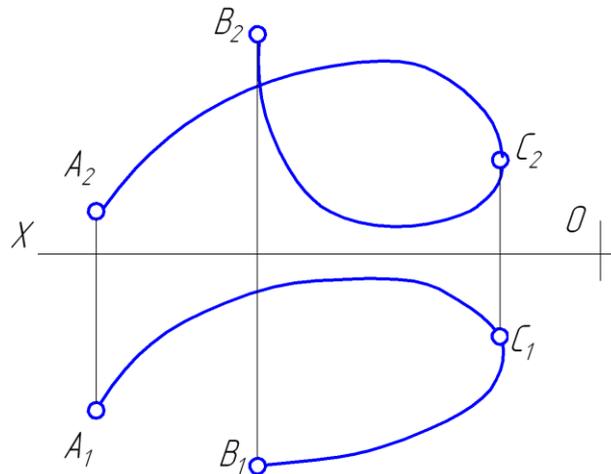


Рис. 127

59. Встановити, які поверхні зображено на рис. 128?

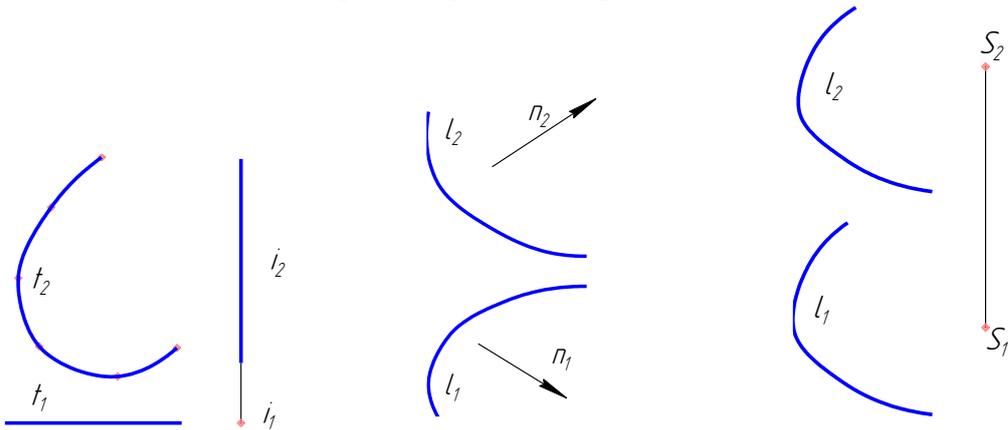


Рис. 128

Примітка.

$i$  – вісь обертання;  $t$  – твірна;  $l$  – напрямна.

60. Встановити, якими поверхнями обмежено тіло на рисунку 129?

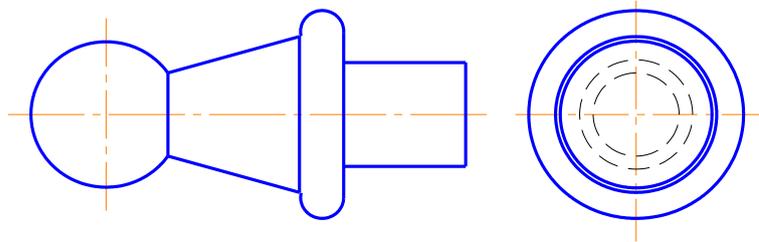
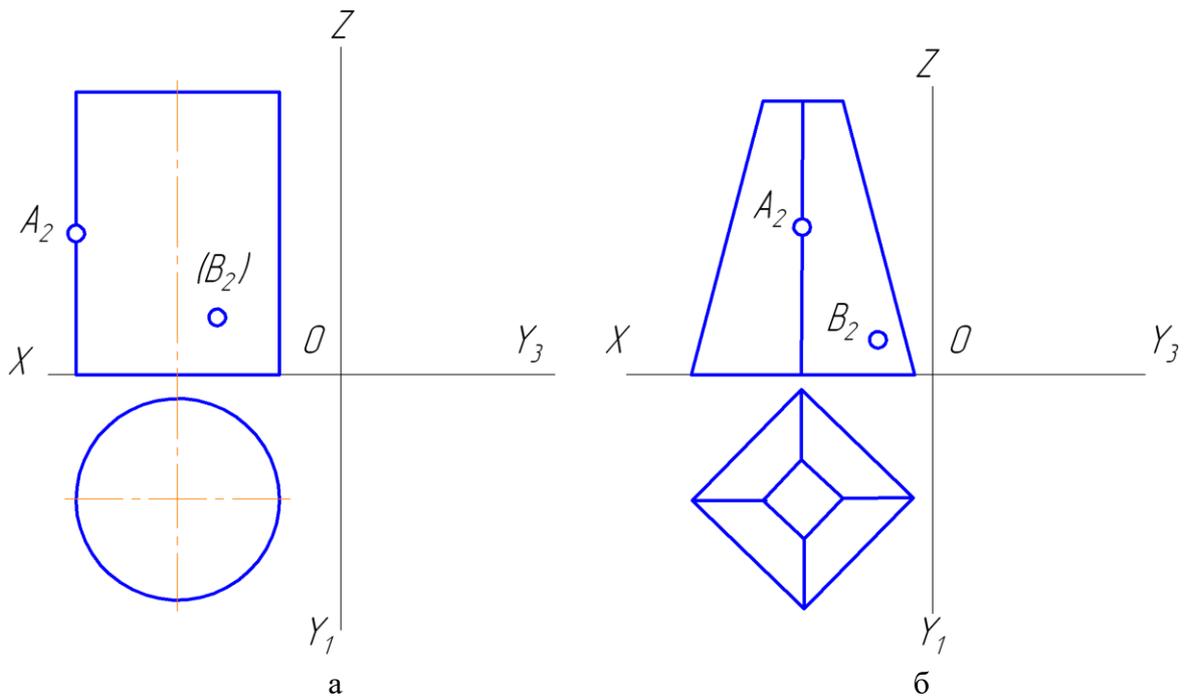


Рис. 129

61. Побудувати третю проекцію вказаної поверхні та проекції точок, які належать даним поверхням (рис. 130, а–г):



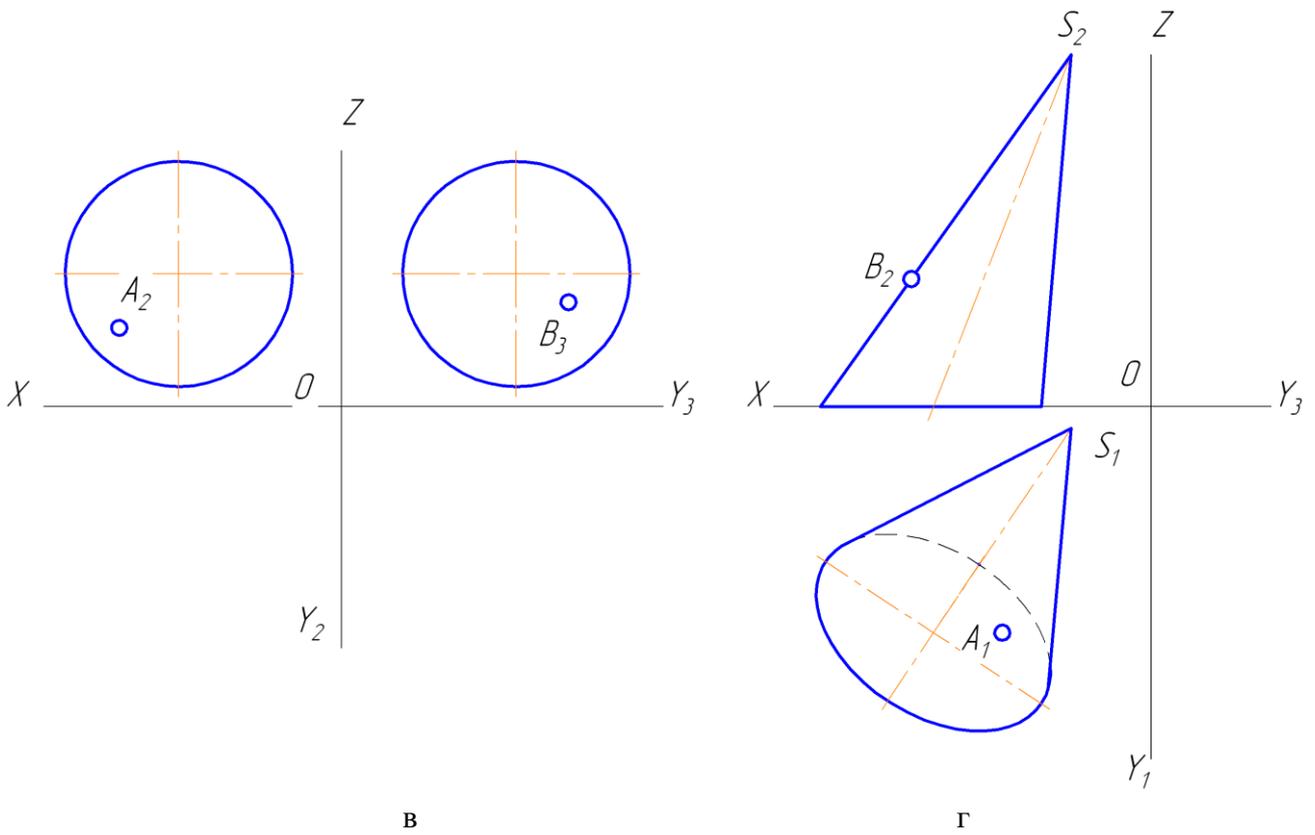


Рис. 130

62. Побудувати переріз піраміди фронтально-проекціовальною площиною. Визначити дійсну величину фігури перерізу (рис. 131).

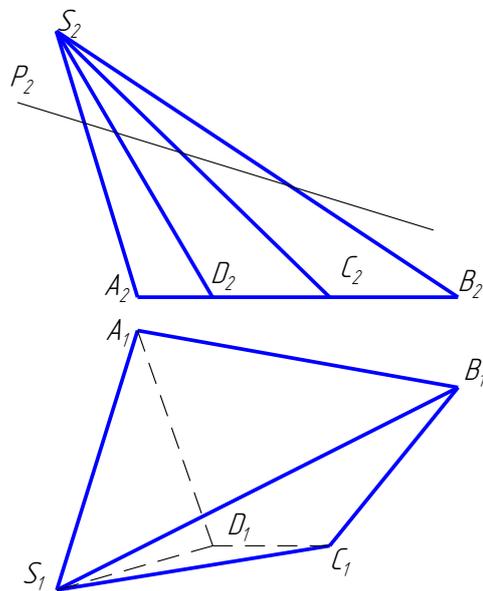


Рис. 131

63. Побудувати переріз призми горизонтально-проекціовальною площиною. Визначити дійсну величину фігури перерізу (рис. 132).

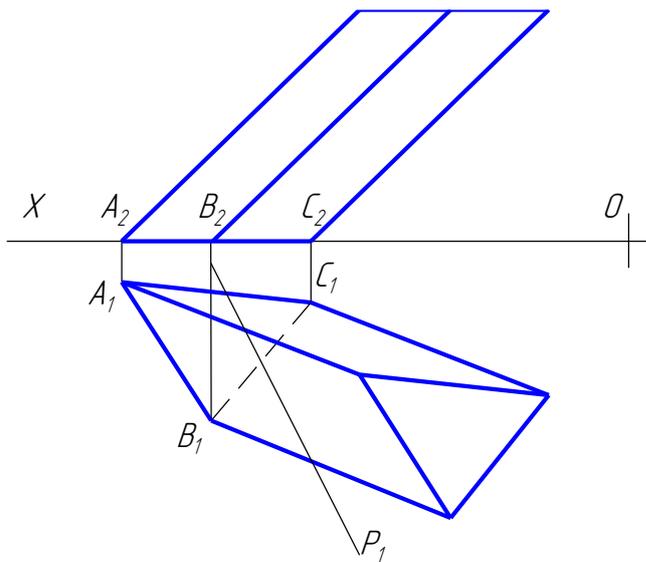


Рис. 132

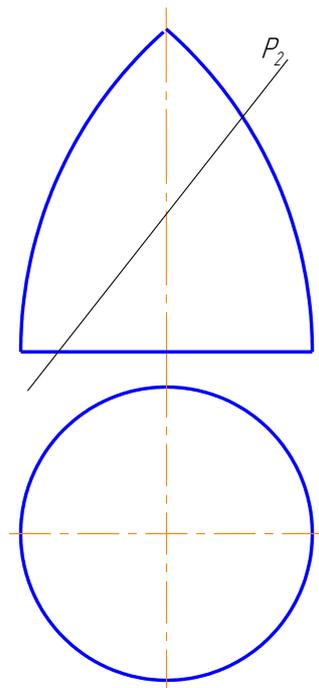


Рис. 133

64. Побудувати переріз поверхні обертання фронтально-проекціовальною площиною. Визначити дійсну величину фігури перерізу (рис. 133).

65. Побудувати переріз конуса горизонтально-проекціовальною площиною. Визначити дійсну величину фігури перерізу (рис. 134).

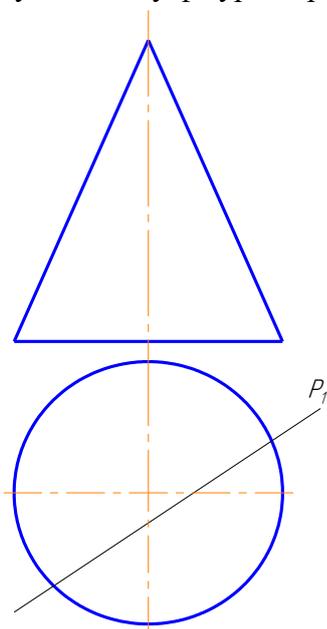


Рис. 134

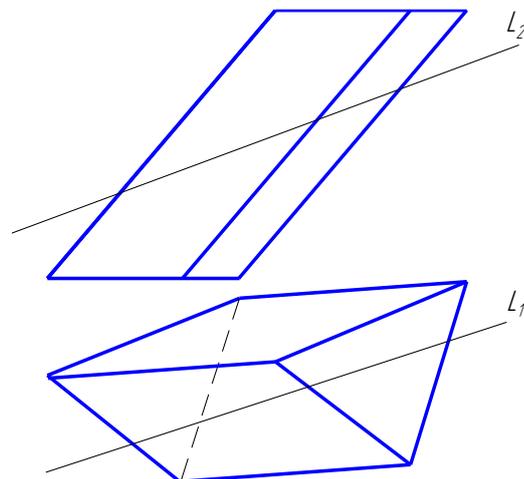


Рис. 135

66. Побудувати точки перетину прямої  $L$  з поверхнею похилої призми. Показати видимість прямої (рис. 135).

67. Побудувати точки перетину прямої  $L$  з поверхнею обертання. Показати видимість прямої (рис. 136).

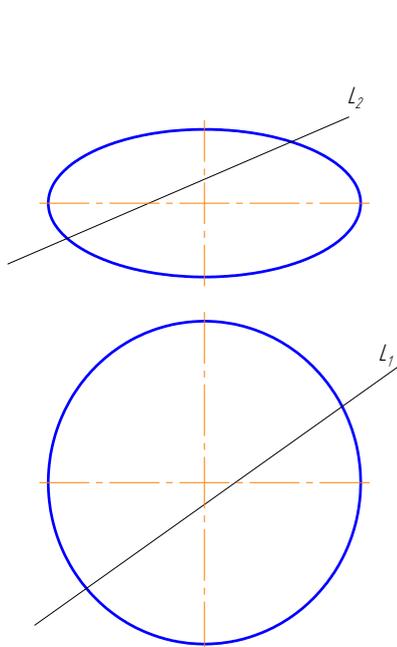


Рис. 136

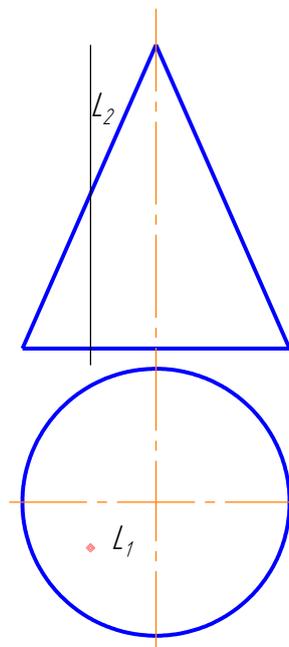


Рис. 137

68. Побудувати точки перетину прямої  $L$  з поверхнею конуса. Показати видимість прямої (рис. 137).

69. Побудувати точки перетину прямої  $L$  з поверхнею кільця. Показати видимість прямої (рис. 138).

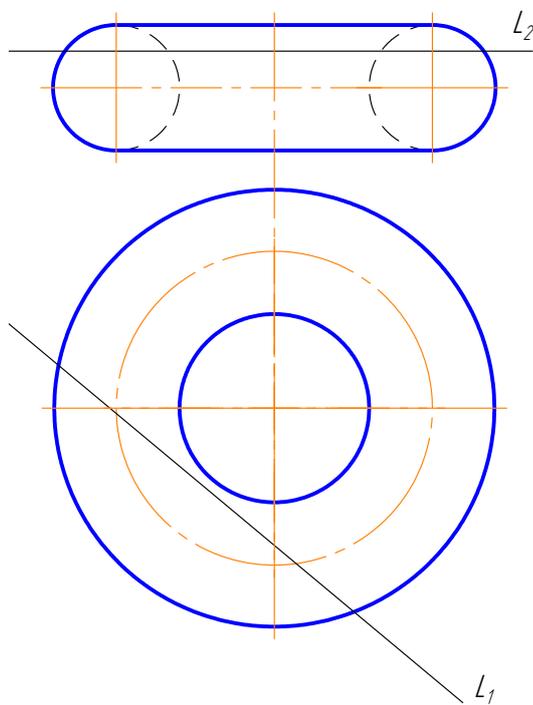


Рис. 138

70. Побудувати третю проекцію зрізаної піраміди і прямої призми, які перетинаються. Визначити лінію перетину поверхонь і видимість (рис. 139).

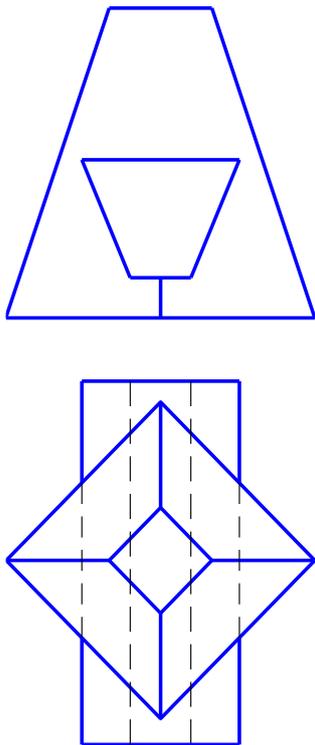


Рис. 139

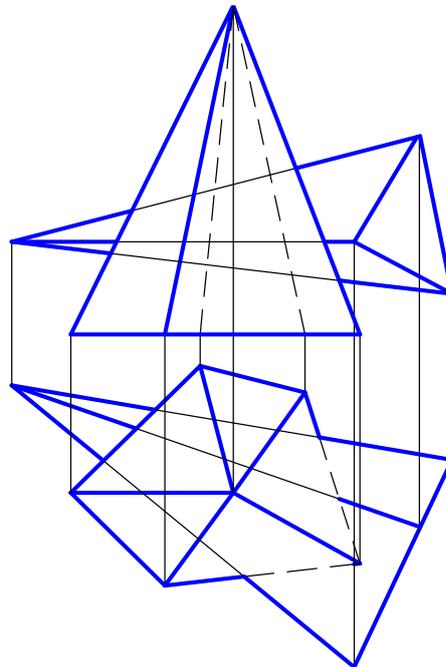


Рис. 140

71. Побудувати лінію взаємного перетину пірамід. Визначити видимість поверхонь (рис. 140).

72. Побудувати лінію взаємного перетину прямого циліндра і призми. Визначити видимість поверхонь (рис. 141).

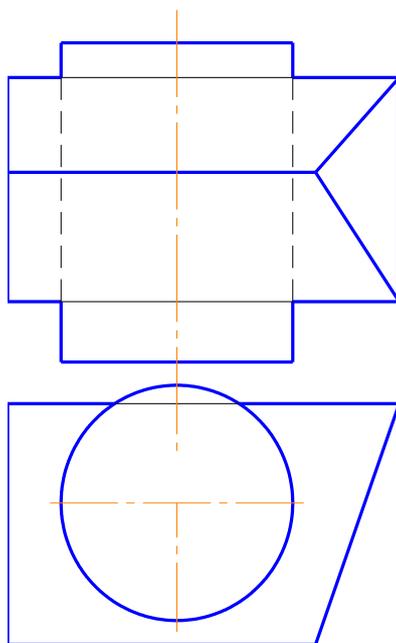


Рис. 141

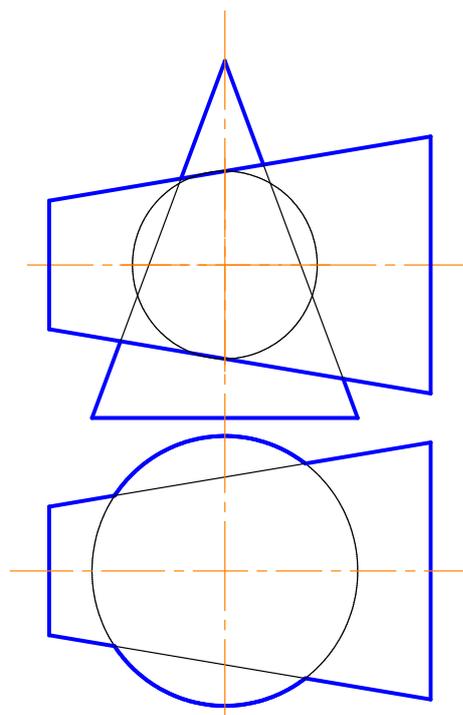


Рис. 142

73. Побудувати лінію взаємного перетину поверхонь обертання методом сфер. Визначити видимість поверхонь (рис. 142).

74. Побудувати лінію взаємного перетину поверхонь обертання методом сфер. Визначити видимість поверхонь (рис. 143).

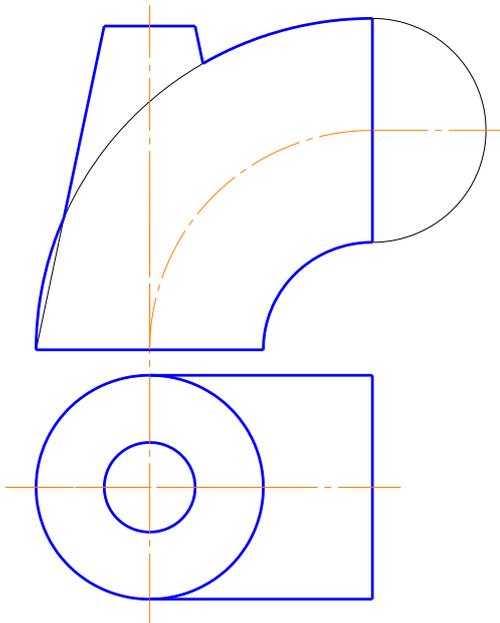


Рис. 143

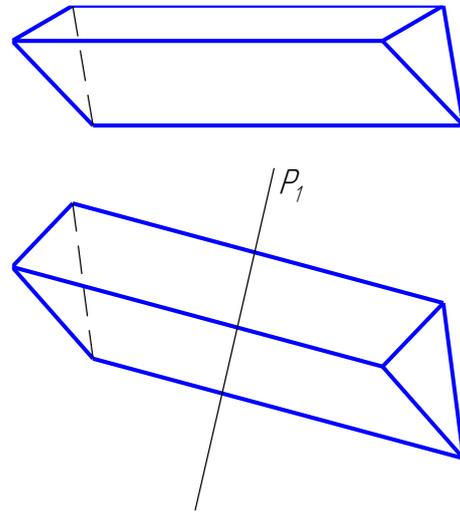


Рис. 144

75. Побудувати розгортку похилої тригранної призми методом нормальних перерізів (рис. 144).

76. Побудувати розгортку похилої тригранної призми методом розкатки (рис. 145).

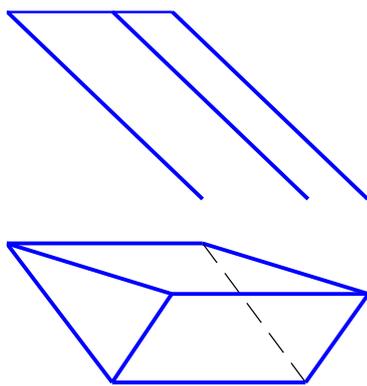


Рис. 145

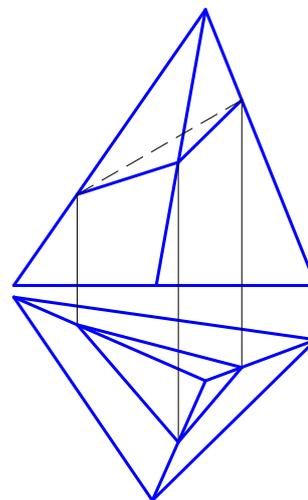


Рис. 146

77. Побудувати розгортку тригранної піраміди з нанесеною на її грані фігурою перерізу площиною методом трикутників (рис. 146).

78. Побудувати ізометричну проекцію плоскої фігури для випадків розташування її паралельно горизонтальній, фронтальній і профільній площині проєкцій (рис. 147).



# РОЗДІЛ 4

## ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ НА РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ

### 4.1. ЗАГАЛЬНІ ПРАВИЛА ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ

У відповідності з діючим навчальним планом із курсу нарисної геометрії передбачаються лекції і практичні заняття, самостійна робота, яка включає виконання розрахунково-графічних робіт, іспит з нарисної геометрії під час екзаменаційної сесії. До іспиту допускаються студенти в яких розрахунково-графічні роботи виконані та захищені. Якщо під час захисту встановлено, що розрахунково-графічні роботи виконані не самостійно, то студентові видається нове завдання.

Графічні роботи – основний засіб із закріплення теоретичного матеріалу і здобуття практичних навичок виконання креслеників.

Кожна розрахунково-графічна робота уявляє собою набір креслеників, виконаних за індивідуальним завданням і оформлених у відповідності з викладеними вимогами. Завдання на розрахунково-графічну роботу повинно відповідати номеру варіанта, який визначається, для студентів денної форми навчання як номер запису прізвища студента за списком у журналі (для заочної форми навчання – варіант за яким студент виконує розрахунково-графічні роботи вибирається за двома останніми цифрами залікової книжки, табл. 13).

Усі кресленики, що входять до складу розрахунково-графічних робіт, оформляються згідно з діючими стандартами: формат кресленика повинен відповідати ГОСТ 2.301-68, масштаби ГОСТ 2.302-68, лінії ГОСТ 2.303-68, написи ГОСТ 2.304-68, основний напис – ГОСТ 2.104-68.

В графі «Позначення документа» основного напису вписується літерно-числове сполучення.

#### Приклад

**0505 ІМ. 442 011. 002 –ХХ**

де 0505 – напрям підготовки – «Інженерна механіка»:

*ІМ* – факультет (інженерної механіки);

*4* – технічні науки;

*42* – розрахунково-графічні роботи;

*011* – номер теми (перша частина, перша тема);

*002* – номер розрахунково-графічної роботи (друга робота);

*ХХ* – номер варіанта.

**Вибір варіанта на контрольну роботу  
(заочна форма навчання)**

Передостання цифра залікової книжки	Остання цифра залікової книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	11	21	6	16	1	11	21	6	16
1	2	12	22	7	17	2	12	22	7	17
2	3	13	23	8	18	3	13	23	8	18
3	4	14	24	9	19	4	14	24	9	19
4	5	15	25	10	20	5	15	25	10	20
5	6	16	1	11	21	6	16	1	11	21
6	7	17	2	12	22	7	17	2	12	22
7	8	18	3	13	23	8	18	3	13	23
8	9	19	4	14	24	9	19	4	14	24
9	10	20	5	15	25	10	20	5	15	25

Кресленики розрахунково-графічних робіт потрібно складати до формату А4 (297х210), оздобити титульним аркушем та скріпити. Титульний аркуш розрахунково-графічних робіт оформлюється згідно зразка у відповідності з ГОСТ 2.304 – 81, рис. 150.

Виконувати завдання розрахунково-графічних робіт необхідно в тій послідовності, в якій вони приведені у навчальному посібнику.

Кожне завдання розрахунково-графічної роботи виконують на окремому аркуші формату А3, тільки на одній стороні аркуша кресленника. А також, усі побудови необхідно виконувати олівцем і спочатку для більшої точності тонкими лініями (твердим олівцем), а потім обвести м'яким.

**Шкала меж позитивних оцінок за модулями**

№ з/п	Модулі та їх елементи	Форма контролю	Кількість балів	
	Зміст		Мінімальна	Максимальна
<b>МОДУЛЬ 1</b>				
1	Лекційний курс (4 теми)	Тест-контроль	5	8
2	Розрахунково-графічні роботи:		5	
	1) Позиційні задачі	Виконання РГР і захист	5	8
	2) Метричні задачі	Виконання РГР і захист	5	8
3	Поточний контроль	Виконання вправи –«Лінії кресленника. Шрифт» Розв'язок задач	5	8
4	Обов'язкова контрольна робота	Графічна аудит. робота	5	8
	Всього		<b>25</b>	<b>40</b>
<b>МОДУЛЬ 2</b>				
1	Лекційний курс (4 теми)	Тест-контроль	5	8
2	Розрахунково-графічні роботи:		5	
	1) Способи перетворення етюра	Виконання РГР і захист	5	8
	2) Перетин поверхні площиною, розгортка поверхні	Виконання РГР і захист	5	8
	3) Перетин поверхонь	Виконання РГР і захист	5	8
4	Обов'язкова контрольна робота	Графічна аудит. робота	5	8
	Всього		<b>20</b>	<b>40</b>
	Всього за семестр		<b>40</b>	<b>80</b>

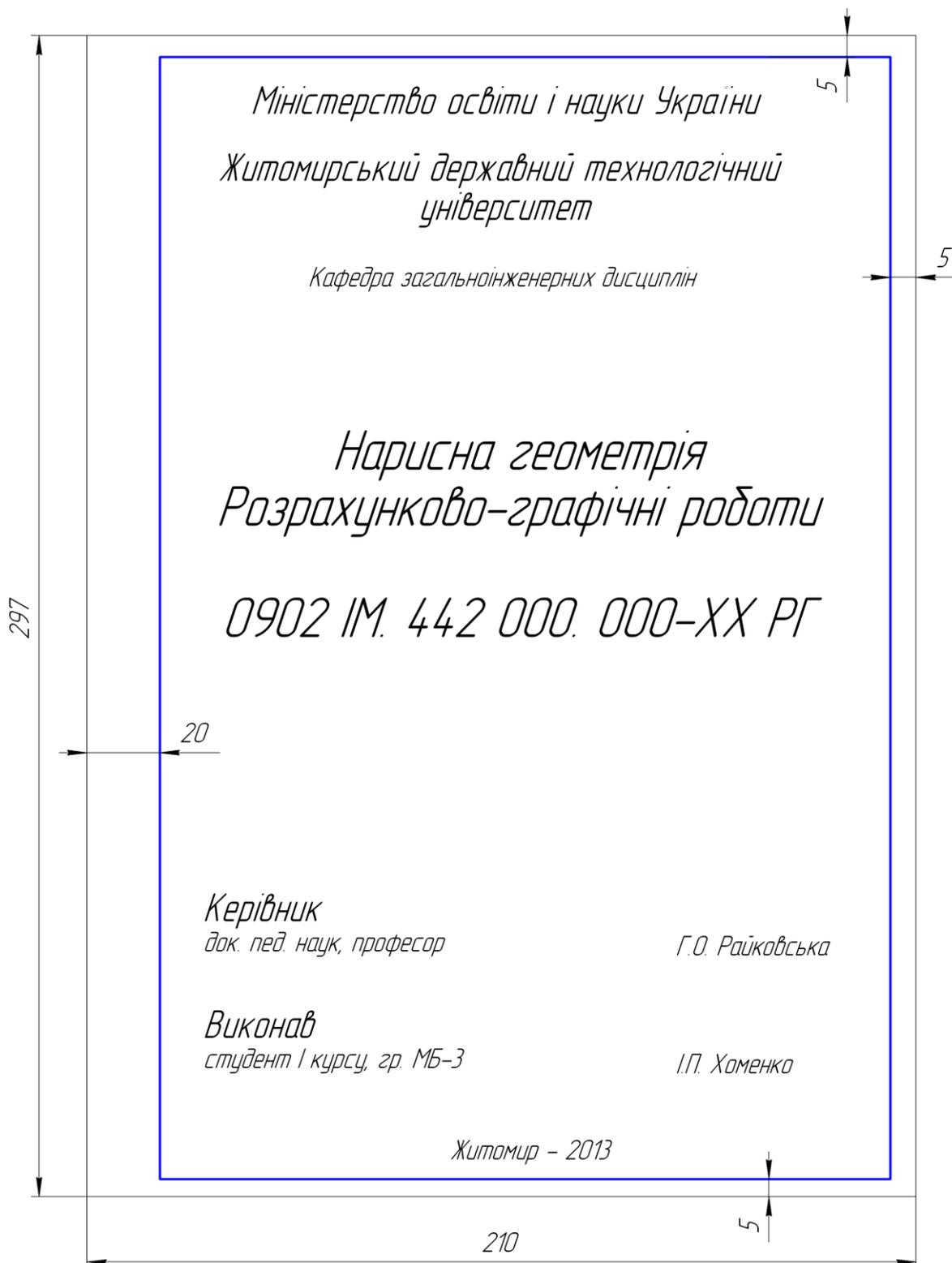


Рис. 150. Зразок титульного аркуша

**Критерії оцінювання знань**

Елементи модуля та критерії його оцінювання	Кількість балів
Графічна контрольна робота: <ul style="list-style-type: none"> <li>– робота виконана у повному обсязі без помилок з дотриманням стандартів при оформленні – СКД</li> <li>– у роботі допущені незначні недоліки, оформлення відповідає стандартам – СКД</li> <li>– робота виконана з грубими помилками, оформлення не відповідає СКД</li> </ul>	8 6 – 7 4 – 5
Розрахунково-графічна робота: <ul style="list-style-type: none"> <li>– робота виконана у повному обсязі без помилок, повна відповідь на запитання при захисті роботи</li> <li>– робота виконана у повному обсязі з деякими неточностями, неповна відповідь на запитання при захисті</li> <li>– робота виконана у повному обсязі з незначними помилками, неповні відповіді на запитання при захисті роботи</li> <li>– робота виконана із незначними помилками, при захисті студент дає незадовільну відповідь</li> <li>– робота виконана не в повному обсязі із значними помилками, при захисті незадовільна відповідь на запитання</li> <li>– робота виконана, але студент не може її пояснити – несамотійне виконання</li> </ul>	8 6 – 7 5 3 – 4 1–2 0
Творча робота: <ul style="list-style-type: none"> <li>– студент вільно володіє матеріалом курсу, розрахунково-графічні роботи носять творчий характер</li> <li>– студент приймає активну участь на практичних заняттях</li> </ul>	10 5

**Шкала оцінювання: національна та ECTS**

Сума балів за шкалою ЖДТУ	За шкалою ECTS	За національною шкалою	
		іспит	залік
90 – 100	<b>A</b>	відмінно	зараховано
82 – 89	<b>B</b>	добре	
74 – 81	<b>C</b>		
64 – 73	<b>D</b>	задовільно	
60 – 63	<b>E</b>		
35 – 59	<b>FX</b>	незадовільно	незараховано
1 – 34	<b>F</b>		

## 4.2. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ НА РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ

### Завдання 1 ЗАДАЧІ ПОЗИЦІЙНІ

(приклад завдання рис. 151)

#### 1.1. Мета виконання завдання:

- закріпити теоретичні знання на практиці: теоретичних основ побудови зображень і позиційних властивостей проєкцій пар геометричних елементів;
- виробити вміння реалізації зв'язку теорії зі практикою; будувати кресленики об'єктів і розв'язувати графічно задачі;
- виробити навички з виконання і читання креслеників основних геометричних елементів.

#### 1.2. Вихідні дані до завдання

Завдання складається з трьох задач: 001, 002, 003 (табл. 18). Умова задачі 001 для кожного варіанта індивідуальна (табл. 18), а умови задач 002 і 003 для всіх варіантів однакові:

002. Через точку D провести горизонтальну (для парних варіантів) або фронтальну пряму (для непарних варіантів), яка паралельна площині трикутника  $[\Delta EFN]$ ; побудувати довільну точку J, яка лежить в площині трикутника  $[\Delta EFN]$  і конкуруюча відносно площини проєкцій  $\Pi_1$  (для парних варіантів) або  $\Pi_2$  (для непарних варіантів).

003. Побудувати лінію перетину двох непрозорих площин, заданих трикутниками  $[\Delta LKM]$  і  $[\Delta OPT]$ . Визначити їх видимість на епюрі.

#### Методичні поради до розв'язування задач

1. Перед тим як приступити до розв'язування задач необхідно здійснити ретельний аналіз їх умов: встановити залежність між шуканими елементами і заданими; розчленувати умову задачі на частини з їх незалежним і одночасним розглядом.

2. Скласти алгоритмічний запис розв'язку задач. Алгоритмічний запис типових задач завдання 001 розрахунково-графічної роботи наведено в таблиці 17. На його основі складається алгоритм умови задачі стосовно кожного варіанта і для кожної задачі. Спочатку проводиться запис пунктів алгоритму, які відповідають графічним операціям просторового розв'язку задач, а далі вже підпунктів до них, що визначають характер і послідовність графічних операцій.

Таблиця 17

#### Типові приклади складання алгоритму розв'язку задач 001

Текстова умова	Алгоритмічний запис
Через точку C провести пряму, яка перетинає пряму $ AB $ і вісь Y.	$C \in L \cap \{ AB ; Y\}$
Через точку C провести профільно-проєкціювальну пряму і встановити її розташування відносно $ AB $ .	$C \in L \perp \Pi_3$ ; $L \cap  AB  = D$
Через точку C провести пряму, яка б була перпендикулярною до прямої $ AB $ .	$C \in L \cap  AB  = D$ ; $L \perp  AB $
Через точку C провести горизонтальну пряму, яка б перетинала пряму $ AB $ .	$C \in L \parallel \Pi_1$ ; $L \cap  AB  = D$
Через точку C провести пряму, що перетинає $ AB $ у точці, яка віддалена від точки B на 30 мм.	$C \in L \cap  AB  = D$ ; $ DB  = 30 \text{ мм}$
Через точку C провести пряму, що перетинає пряму $ AB $ у точці, яка ділить його у відношенні 2:3.	$C \in L \cap  AB  = D$ ; $ AD  :  DB  = 2:3$
Через точку C провести пряму, яка паралельна $ AB $ .	$C \in L \parallel  AB $

## Багатоваріантне індивідуальне завдання №1 – «Задачі позиційні»

Варіант	Умова задачі – 001	Координата	Т О Ч К А												
			A	B	C	D	E	F	N	L	K	M	O	P	T
01	Через точку А провести горизонтальну пряму, яка б перетинала пряму  BC .	X	80	20	20	100	80	0	40	0	110	45	55	0	80
		Y	5	40	40	60	25	25	75	60	40	15	0	45	60
		Z	30	50	5	25	50	30	90	15	20	50	0	45	60
02	Через точку А провести пряму, що перетинає  BC  у точці, яка віддалена від точки В на 40 мм.	X	70	40	20	90	70	60	0	0	85	50	10	40	95
		Y	10	50	10	30	5	45	20	65	60	0	25	50	25
		Z	20	40	5	30	50	20	20	5	10	60	45	5	45
03	Через точку А провести фронтальну пряму, що перетинає пряму  BC .	X	65	0	0	90	70	50	0	0	70	40	20	65	40
		Y	40	15	65	25	0	60	15	25	60	20	55	45	0
		Z	40	10	10	30	50	10	20	25	5	55	45	60	0
04	Через точку А провести пряму, що перетинає  BC  у точці, яка віддалена від точки С на 30 мм.	X	15	45	75	0	30	45	105	0	55	80	0	45	110
		Y	0	35	35	35	25	80	25	25	60	0	60	0	35
		Z	40	5	45	35	50	10	25	45	10	60	75	0	40
05	Через точку С провести пряму, яка б була перпендикулярною до прямої  AB .	X	45	0	0	105	75	60	0	0	55	95	35	5	120
		Y	30	55	10	35	25	80	25	20	45	5	65	5	20
		Z	10	10	40	25	40	0	15	40	10	65	0	60	30
06	Через точку А провести пряму, що перетинає  BC  у точці, яка віддалена від точки В на 60 мм.	X	80	90	30	0	25	115	85	0	90	60	5	100	30
		Y	60	40	10	60	25	5	40	30	65	5	70	40	5
		Z	30	80	25	25	50	10	50	50	70	10	5	30	75
07	Через точку А провести горизонтальну пряму, яка б перетинала пряму  BC .	X	60	20	20	105	85	70	0	0	50	75	30	0	80
		Y	5	10	60	30	0	50	20	20	60	20	10	85	10
		Z	45	75	15	35	60	25	25	35	35	95	10	50	50
08	Через точку С провести пряму, що перетинає пряму  AB  у точці, яка ділить його у відношенні 2:3.	X	60	10	35	90	70	60	0	0	50	80	30	0	80
		Y	65	15	30	25	0	40	15	25	60	20	10	85	10
		Z	15	60	15	30	50	20	20	35	35	70	10	50	50
09	Через точку С провести пряму, що перетинає пряму  AB  і вісь Z.	X	100	35	120	105	75	60	0	0	110	45	55	0	80
		Y	15	55	50	35	25	80	25	15	20	50	0	45	60
		Z	15	65	50	35	50	10	25	60	40	15	0	45	60
10	Через точку С провести горизонтальну пряму, яка б перетинала пряму  AB .	X	100	35	0	0	20	35	105	0	85	50	10	40	95
		Y	10	45	25	35	5	55	25	15	15	60	45	5	45
		Z	10	75	50	40	50	115	15	65	60	0	25	50	25

№ вар.	Умова задачі	Координ.	A	B	C	D	E	F	N	L	K	M	O	P	T
11	Через точку С провести фронтальну пряму, яка б перетинала пряму  AB .	X	95	25	0	0	25	115	65	0	70	40	20	65	40
		Y	5	55	30	60	25	5	75	25	5	55	45	60	0
		Z	15	55	10	25	50	10	90	25	60	20	55	45	0
12	Через точку С провести пряму, що перетинає  AB  у точці, яка віддалена від точки В на 35 мм.	X	60	0	50	105	85	70	0	100	10	40	95	0	70
		Y	20	55	50	35	5	55	25	30	65	5	70	40	5
		Z	15	50	35	35	60	25	25	50	70	10	5	30	75
13	Через точку С провести пряму, що перетинає пряму  AB  і вісь Y.	X	30	30	60	0	15	30	90	0	55	95	35	5	120
		Y	10	55	15	25	0	40	15	40	10	65	0	60	30
		Z	55	10	55	30	50	20	20	20	45	5	65	5	20
14	Через точку С провести пряму, що перетинає пряму  AB  і вісь X.	X	20	20	55	0	25	115	85	0	90	60	5	100	30
		Y	5	55	50	60	25	5	45	50	70	10	5	30	75
		Z	65	5	50	25	50	95	50	30	65	5	70	40	5
15	Через точку С провести горизонтальну пряму, яка б перетинала пряму  AB .	X	20	20	55	105	85	60	0	0	50	75	30	0	80
		Y	5	55	25	35	5	80	25	35	35	95	10	50	50
		Z	65	5	25	25	50	0	15	20	60	20	10	85	10
16	Через точку А провести пряму, що перетинає  BC  у точці, яка віддалена від точки В на 25 мм.	X	55	20	75	0	20	35	105	0	50	80	30	0	80
		Y	30	20	70	35	5	55	25	35	35	70	10	50	50
		Z	60	5	25	35	60	25	25	20	60	20	10	85	10
17	Через точку С провести пряму, що перетинає пряму  AB  і вісь Z.	X	60	30	60	115	90	0	50	110	0	65	55	110	30
		Y	25	40	45	60	25	5	75	60	40	15	0	45	55
		Z	10	50	35	25	50	10	90	15	20	50	0	45	60
18	Через точку С провести фронтальну пряму, яка б перетинала пряму  AB .	X	40	40	15	0	20	45	105	95	10	45	85	55	0
		Y	75	5	20	35	5	80	25	65	60	0	25	50	25
		Z	65	10	55	25	50	0	15	5	10	60	45	5	45
19	Через точку С провести пряму, яка паралельна  AB .	X	60	0	50	100	75	0	35	110	55	30	110	65	0
		Y	20	55	50	60	25	25	75	45	10	60	75	0	40
		Z	15	50	35	25	50	70	10	25	60	0	60	0	35
20	Через точку С провести профільно-проекціовальну пряму і встановити її розташування відносно  AB .	X	80	30	40	15	90	0	30	110	55	30	110	65	0
		Y	20	75	20	60	25	5	45	25	60	0	60	0	35
		Z	40	40	30	25	50	95	50	45	10	60	75	0	40
21	Через точку С провести пряму, яка перетинає пряму  AB  під прямим кутом.	X	40	10	65	105	85	60	0	70	0	30	50	5	30
		Y	10	60	45	30	0	75	20	25	5	55	45	60	0
		Z	30	30	15	35	60	10	25	25	60	20	55	45	0

№ вар.	Умова задачі	Координ.	A	B	C	D	E	F	N	L	K	M	O	P	T
22	Через точку С провести пряму, що перетинає пряму  AB  і вісь Y.	X	45	0	55	115	90	0	50	80	30	0	50	80	0
		Y	25	60	50	60	25	5	75	35	35	70	10	50	50
		Z	5	30	30	25	50	95	10	20	60	20	10	85	10
23	Через точку С провести профільно-проекціовальну пряму і встановити її розташування відносно  AB .	X	60	25	75	105	85	60	0	80	30	5	50	80	0
		Y	10	60	45	35	5	80	25	35	35	95	10	50	50
		Z	30	65	45	35	60	10	25	20	60	20	10	85	10
24	Через точку С провести пряму, що перетинає пряму  AB  і вісь X.	X	85	15	70	0	25	115	65	100	10	40	95	0	70
		Y	50	25	60	60	25	5	75	50	70	10	5	30	75
		Z	10	60	40	25	50	95	10	30	65	5	70	40	5
25	Через точку С провести пряму, яка перетинає пряму  AB  під прямим кутом.	X	60	0	45	90	70	50	0	120	65	25	85	115	0
		Y	10	45	60	30	5	65	20	40	10	65	0	60	30
		Z	15	15	45	30	50	10	20	20	45	5	65	5	20
26	Через точку А провести пряму, яка паралельна  BC .	X	60	20	20	0	20	100	60	80	30	5	50	80	0
		Y	20	25	60	60	25	25	75	20	60	20	10	85	10
		Z	50	65	20	25	50	30	90	35	35	95	10	50	50
27	Через точку С провести пряму, що перетинає пряму  AB  у точці, яка ділить його у відношенні 3:2.	X	100	30	50	0	20	45	105	110	0	65	55	110	30
		Y	15	50	10	35	5	80	25	15	20	50	0	45	60
		Z	20	75	10	35	60	10	25	60	40	15	0	45	55
28	Через точку С провести фронтальну пряму, яка б перетинала пряму  AB .	X	40	10	65	0	15	35	90	120	65	25	85	115	0
		Y	10	60	45	30	5	65	20	20	45	5	65	5	20
		Z	30	30	15	30	50	10	20	40	10	65	0	60	30
29	Через точку С провести пряму, що перетинає пряму  AB  і вісь Z.	X	20	20	60	105	85	70	0	0	55	80	0	45	110
		Y	5	55	65	35	5	55	25	45	10	60	75	0	40
		Z	65	5	20	25	50	15	15	25	60	0	60	0	35
30	Через точку С провести пряму, що перетинає пряму  AB  і вісь X.	X	90	15	70	0	20	45	105	70	0	30	50	5	30
		Y	50	5	45	30	0	75	20	25	60	20	55	45	0
		Z	5	50	45	35	60	10	25	25	5	55	45	60	0



3. У процесі розв'язування задачі 001 необхідно усвідомити, що через задану точку  $C$  можна провести безліч прямих, які будуть перетинати задану пряму  $|AB|$ . Таким чином, ми повинні враховувати наступні вимоги до положення прямої:

- всі прямі загального положення зображуються на епюрі так, що їх проекції обов'язково перетинають відповідну пару осей координат: горизонтальна –  $X$  і  $Y_1$ ; фронтальна –  $X$  і  $Z$ ; профільна –  $Z$  і  $Y_3$ ;
- одна з проекцій прямих рівня визначає направлення прямої з її безлічі можливих. Наприклад, направленню горизонтальної прямої у просторі відповідає направлення її горизонтальної проекції на кресленику, а нахил цієї горизонтальної проекції до горизонтальної лінії кресленика визначає кут нахилу  $\beta$  даної прямої до площини  $\Pi_2$ ;
- якщо точка лежить на прямій, то проекції цієї точки лежать на відповідних проекціях цієї ж прямої;
- якщо прямі паралельні, то їх однойменні проекції також паралельні між собою.

4. Розв'язок задачі 002 можна здійснити, виходячи з умови паралельності прямої до площини. Так як шукана пряма  $L$  повинна бути лінією рівня (горизонтальною або фронтальною), то вона повинна бути паралельною до лінії рівня площини (горизонталі або фронталі). Звідси витікає, що в заданій площині необхідно спочатку побудувати лінію рівня, а вже потім через задану точку провести паралельну до неї.

5. При побудові конкуруючої точки необхідно виходити з умови, що конкуруючі фігури лежать в одній проекціювальній площині. При цьому одна з проекцій точки буде співпадати з однойменною проекцією заданої точки.

6. Задача 003 є елементарною і практично зводиться до побудови точки перетину прямої з площиною. Побудувати лінію перетину двох площин – означає визначити їх спільні точки.

Видимість проекцій двох непрозорих площин встановлюють методом конкуруючих точок. При цьому, на кожній проекції достатньо визначити видимість тільки двох прямих, що перетинаються, а для інших – шляхом логічного судження.

## **Завдання 2** **ЗАДАЧІ МЕТРИЧНІ** (приклад завдання рис. 152)

### 2.1. Мета виконання завдання:

- закріпити теоретичні знання на практиці: метричних властивостей проекцій пар геометричних елементів;
- виробити вміння реалізації зв'язку теорії зі практикою; будувати кресленики об'єктів і розв'язувати графічно задачі;
- виробити навички з виконання і читання креслеників основних геометричних елементів.

### 2.2. Вихідні дані до завдання

Завдання складається з трьох задач: 001, 002, 003 (табл. 19), які розв'язуються у повному обсягу. Умови задач для всіх варіантів однакові:

001. Визначити дійсну величину відстані від точки  $D$  до площини заданої трикутником  $[\Delta ABC]$ . Через точку  $D$  побудувати площину, яка була б паралельна до заданої. Задачу розв'язати без перетворення ортогональних проекцій, визначити видимість перпендикуляра;

002. Визначити кут нахилу площини  $[\Delta ABC]$  до площини проєкцій: для парних варіантів до  $\Pi_1$ ; для непарних варіантів –  $\Pi_2$ . Задачу розв'язати без перетворення ортогональних проєкцій;

003. Визначити дійсну величину відстані від точки  $C$  до відрізка  $|AB|$  і побудувати точку  $K$ , яка симетрична точці  $C$  відносно даного відрізка (задачу розв'язати без перетворення ортогональних проєкцій).

Таблиця 19

**Багатоваріантне індивідуальне завдання №2**  
**«Задачі метричні»**

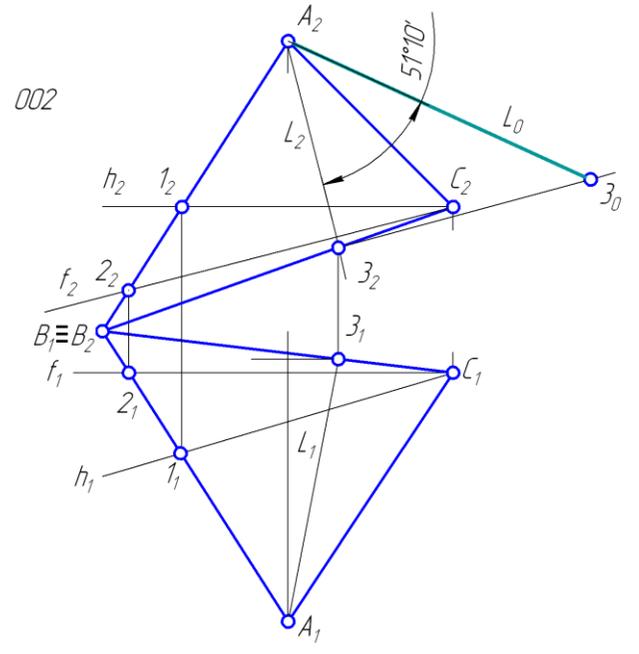
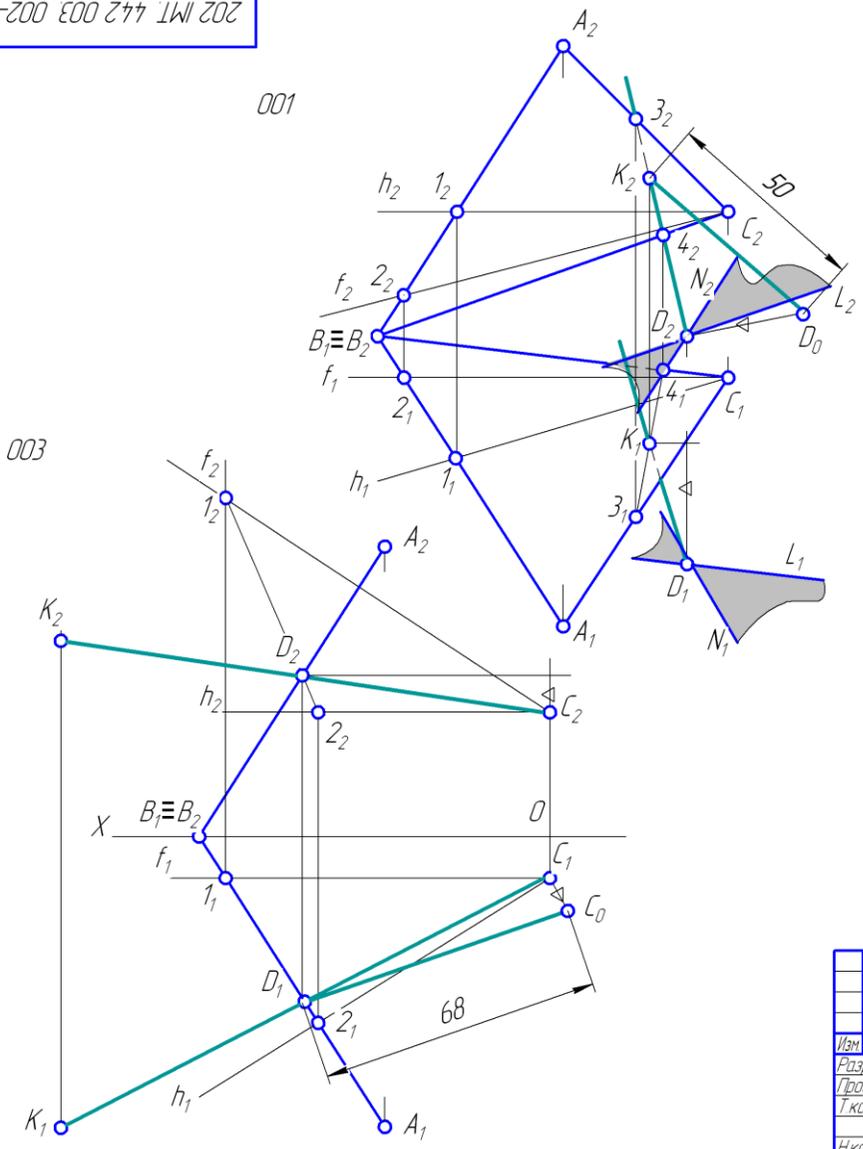
Варіант	Координата	Т О Ч К А			
		A	B	C	D
01	X	40	0	80	70
	Y	80	10	35	15
	Z	60	10	0	40
02	X	10	60	95	50
	Y	0	70	30	70
	Z	0	65	10	0
03	X	10	55	85	40
	Y	0	80	30	75
	Z	0	70	15	0
04	X	0	90	20	35
	Y	70	25	0	60
	Z	60	0	15	0
05	X	35	85	0	10
	Y	70	0	10	55
	Z	70	0	30	0
06	X	35	65	0	50
	Y	50	10	0	0
	Z	70	20	25	50
07	X	30	75	0	15
	Y	70	0	15	65
	Z	80	15	40	0
08	X	40	80	0	10
	Y	60	10	0	40
	Z	80	10	35	15
09	X	80	35	0	45
	Y	0	65	10	0
	Z	0	70	30	70
10	X	75	30	0	45
	Y	30	70	15	0
	Z	15	80	30	75
11	X	90	0	70	55
	Y	60	0	15	0
	Z	70	25	0	45
12	X	35	85	0	10
	Y	70	0	30	0
	Z	70	0	10	55
13	X	35	65	0	50
	Y	70	20	25	60
	Z	50	10	0	0
14	X	30	75	0	15
	Y	80	15	40	0
	Z	70	0	15	65
15	X	80	35	0	45
	Y	0	70	30	70
	Z	0	65	10	0

Продовження табл. 19

16	X	50	0	85	75
	Y	70	0	10	55
	Z	70	0	30	0
17	X	30	0	65	15
	Y	50	10	0	0
	Z	70	0	25	50
18	X	45	0	75	60
	Y	70	0	15	65
	Z	80	15	40	0
19	X	40	0	80	70
	Y	60	10	0	40
	Z	80	10	35	15
20	X	10	60	95	50
	Y	0	65	10	0
	Z	0	70	30	70
21	X	10	55	85	40
	Y	0	70	35	0
	Z	15	80	30	55
22	X	0	90	20	35
	Y	60	0	15	0
	Z	70	25	0	45
23	X	50	0	85	75
	Y	70	0	30	0
	Z	70	0	10	55
24	X	30	0	65	15
	Y	70	0	25	50
	Z	50	10	0	0
25	X	45	0	75	60
	Y	80	15	40	0
	Z	70	0	15	65
26	X	70	35	0	70
	Y	20	60	0	10
	Z	5	55	25	20
27	X	80	0	30	65
	Y	40	65	0	20
	Z	0	20	40	10
28	X	60	45	5	75
	Y	20	50	10	50
	Z	65	20	10	15
29	X	70	45	0	75
	Y	0	50	20	0
	Z	60	20	10	25
30	X	70	40	0	60
	Y	60	0	30	20
	Z	35	55	0	65

202 IMT 442 003 002-26

Лист № 1  
Стор. № 1  
Взам. н/д № 001  
Взам. н/д № 002  
Взам. н/д № 003



Координата	Т О Ч К А			
	A	B	C	D
X	40	85	0	10
Y	70	0	10	55
Z	70	0	30	0

				202 IMT. 442 003. 002-26		
Вам Лист	№ докум	Підп	Дата	Задачі метричні	Лист	Масштаб
Розроб	Іваненко					1:1
Проб	Ракобська				Лист	Листов
Т.контр.						1
Н.контр.					ЖДТУ, гр. ТМ-132	
Чтв	Ракобська			Копіював Формат А3		

Рис.152. Приклад завдання №2 – «Задачі метричні»

## Методичні поради до розв'язування задач

В практиці читання креслеників виникає потреба у визначенні відстані і кутів між геометричними елементами, побудови плоских фігур, конгруентних заданим на кресленику. Такі задачі після позиційних становлять другу основну групу задач нарисної геометрії – метричну.

Безпосередньо за креслеником, без додаткових побудов розв'язати ту чи іншу метричну задачу можна, як правило, тільки для геометричних елементів окремого положення, а для загального положення вимагаються додаткові побудови.

Таким чином, розв'язок усіх метричних задач пов'язаний із знанням властивостей окремих положень пар елементарних геометричних фігур, при яких є рішення безпосередньо на одній із проекцій.

1. Відстань між елементарними геометричними елементами проєкціюється без спотворення на одну з площин проєкцій в наступних випадках:

- коли дві точки знаходяться на однаковій відстані від будь-якої площини проєкцій;
- точка і пряма лежать у будь-якій проєкціювальній площині або площині рівня і пряма є прямою рівня;
- пряма і точки визначають площину, для якої пряма є лінією найбільшого скату (чи нахилу);
- площина проєкціювальна чи паралельна площині проєкцій;
- прямі лежать в одній з проєкціювальних площин чи площині рівня, а самі є лініями рівня;
- прямі є лініями найбільшого скату чи нахилу площини, яку вони визначають;
- площина паралелізму прямих проєкціювальна або площина рівня. Відстань між площинами паралелізму визначає тільки величину найкоротшої відстані між мимобіжними прямими і не визначає ту пару фізичних точок на прямій, довжина відрізка якого є найкоротшою;

2. Величина кута між парами геометричних елементів зображується на одну з площин проєкцій без спотворення у тому випадку, коли:

- дві прямі, що перетинаються належать площині рівня;
- одна з сторін прямого кута паралельна площині проєкцій, а друга не перпендикулярна до неї;
- дві прямі, що мимобіжні – прямі рівня (паралельні до будь-якої однієї з площин проєкцій);
- одна з сторін прямого кута мимобіжних прямих паралельна одній з площин проєкцій, а інша – не перпендикулярна до неї;
- площина проєкціювальна відносно будь-якої площини проєкцій, а пряма паралельна до цієї ж площини проєкцій;
- обидві площини проєкціювальні відносно до тієї ж площини проєкцій.

3. Величини кутів і відстані між різними геометричними елементами загального положення, як правило, не проєкціюються без спотворення ні на одну з площин проєкцій, а тому розв'язок таких задач вимагає додаткових побудов (розглянуто в підрозділі 2.8).

**Завдання 3**  
**СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕПЮРА**  
(приклад завдання рис. 153)

3.1. Мета виконання завдання:

- закріпити теоретичні знання розв’язування метричних і позиційних задач на практиці способами перетворення епюра;
- виробити уміння реалізації зв’язку теорії зі практикою; будувати кресленики об’єктів і розв’язувати графічно задачі;
- виробити навички з виконання і читання креслеників із максимальною ефективністю.

3.2. Вихідні дані до завдання

Завдання складається з двох задач: 001, 002 (табл. 20), які розв’язуються у повному обсягу. Умови задач для всіх варіантів однакові:

001. Визначити кути нахилу площини, заданої трикутником  $[\Delta ABC]$  до площин проекцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  (табл. 20). Побудувати пряму, яка паралельна площині трикутника  $[\Delta ABC]$  і віддалена від неї на 20 мм. Задачу розв’язати способом плоско-паралельного переміщення;

002. Через точку С провести пряму, що перетинає пряму  $|AB|$  під заданим кутом  $\alpha$  до  $\Pi_1$  (для непарних варіантів) або до  $\Pi_2$  (для парних варіантів), (табл. 20). Задачу розв’язати способом заміни площин проекцій.

Таблиця 20

**Багатоваріантне індивідуальне завдання №3**  
**«Перетворення епюра»**

Варіант	Координата	$\alpha$	Т О Ч К А			Варіант	$\alpha$	Т О Ч К А		
			А	В	С			А	В	С
01	X	20	90	50	20	16	20	65	40	0
	Y		10	60	10			15	0	40
	Z		50	10	60			0	55	20
02	X	20	95	50	20	17	30	65	10	0
	Y		20	10	60			20	0	60
	Z		10	60	10			10	20	60
03	X	25	90	65	5	18	40	70	45	0
	Y		50	10	30			60	10	10
	Z		40	60	10			0	50	20
04	X	30	65	10	0	19	50	70	40	0
	Y		10	20	60			45	55	10
	Z		20	0	60			60	0	45
05	X	30	90	30	10	20	30	65	40	0
	Y		20	10	50			0	55	5
	Z		20	60	0			20	5	50
06	X	30	90	10	50	21	30	60	45	0
	Y		20	10	50			10	55	25
	Z		60	40	0			60	15	5
07	X	30	90	30	10	22	30	60	45	5
	Y		30	60	10			20	50	10
	Z		10	60	10			65	20	10
08	X	30	60	45	5	23	20	65	40	0
	Y		65	10	10			0	55	20
	Z		30	60	20			15	0	40

09	X	25	90	20	40	24	40	60	45	5
	Y		20	10	60			30	60	20
	Z		40	60	30			65	10	10
10	X	40	90	10	40	25	30	75	30	10
	Y		30	10	60			0	50	20
	Z		60	60	10			25	5	60
11	X	30	95	10	10	26	45	80	45	0
	Y		10	50	10			10	70	40
	Z		10	60	10			20	0	45
12	X	30	75	35	0	27	35	65	25	0
	Y		5	55	25			55	5	25
	Z		25	65	0			20	5	50
13	X	45	80	0	30	28	30	75	30	10
	Y		0	20	45			20	5	60
	Z		40	70	0			0	50	20
14	X	25	90	65	5	29	40	90	10	40
	Y		40	60	10			60	60	10
	Z		50	10	30			30	10	60
15	X	60	65	10	0	30	50	70	40	0
	Y		10	20	60			60	0	45
	Z		20	0	60			45	55	10

### Методичні поради до розв'язування задач

За допомогою методів перетворення епюра значно спрощується розв'язок як позиційних, так і метричних задач.

1. Для розв'язання даних задач необхідно фігури із загального положення перевести в окреме. При цьому, дотримуватись взаємно однозначної відповідності між ними до і після їх переведення. Взаємно однозначне відображення простору на себе називають геометричним перетворенням.

2. Приведення геометричних фігур із загального положення може бути здійснено і без їх безпосереднього переміщення, а шляхом переміщення у просторі площин проєкцій таким чином, щоб фігури відносно них опинились розташованими в окремому положенні (площини проєкцій замінюють на нові).

3. При плоско-паралельному переміщенні всі точки фігури переміщуються в паралельних між собою площинах до тих пір, доки ця фігура не займе окреме положення відносно нерухомих площин проєкцій. Проєкції фігури на площину, паралельну площинам переміщення її точок, у процесі руху залишаються конгруентними між собою.

4. Задача 001 включає в себе дві прості задачі, розв'язок кожної з яких є елементарним. Для цього необхідно згадати метричні властивості проєкцій фігур і проєкцій пар фігур. Розв'язок зводиться до того, щоб площину із загального положення перетворити в окреме проєкціювальне положення. Для цього:

- в заданій площині побудувати горизонталь (або фронталь);
- призначити горизонтальні (або фронтальні) площини переміщення усіх точок;
- побудувати горизонтальну (або фронтальну) проєкцію визначника площини (на вільному полі кресленика біля вихідних проєкцій визначника площини), конгруентну вихідній, але розташовану таким чином, щоб горизонталь (або фронталь) стала перпендикулярною до осі ОХ;
- побудувати горизонтальний (або фронтальний) слід-проєкцію площини – пряму. Кут між цією прямою і віссю ОХ і буде кутом нахилу даної площини до  $\Pi_1$  або  $\Pi_2$ .

5. Задача 002 відноситься до типу задач багатофігурних. В цій задачі три умови:
- через точку провести площину  $\Gamma$ ;
  - побудувати площину  $\Gamma$ , яка становить з  $|AB|$  кут  $\alpha^\circ$ ;
  - умова даної задачі – через точку  $C$  провести площину  $\Gamma$ , яка становить з  $|AB|$  кут  $\alpha^\circ$ .
6. Щоб розв'язати поставлену задачу, необхідно розв'язати кожен її складову частину. Рекомендується виконувати побудову так, щоб точка  $C$  лежала на поверхні конуса, утвореного твірною  $|СК|$  і віссю конуса  $|AB|$ . Твірні цього конуса утворюють з віссю  $|AB|$  кут  $\alpha^\circ$ .

**Завдання 4**  
**ПЕРЕРІЗ БАГАТОГРАННИКА ПЛОЩИНОЮ.**  
**РОЗГОРТКА ПОВЕРХНІ**  
(приклад завдання рис. 154, 155)

4.1. Мета виконання завдання:

- поглибити теоретичні знання з метричних і позиційних властивостей пар геометричних фігур;
- виробити вміння зображати на кресленнику комбінації взаємного розташування геометричних фігур; використовувати геометричні методи для розв'язування інженерних задач;
- виробити навички з розв'язування метричних і позиційних задач із геометричними фігурами загального положення; виконувати кресленники геометричних поверхонь і уявляти їх просторові форми за кресленником.

4.2. Вихідні дані до завдання

Завдання складається з двох задач: 001, 002 (табл. 21). Умови задач для всіх варіантів однакові:

001. Побудувати проекції фігури перерізу багатогранної поверхні  $\theta$  площиною загального положення  $\Psi$ . Визначити видимість ділянок поверхні  $\theta$  і площини  $\Psi$ ;
002. Побудувати розгортку зрізаної частини багатогранної поверхні.

**Методичні поради до розв'язування задач**

1. Лінією перетину багатогранника в загальному випадку є плоский багатокутник. Задача зводиться до визначення точок перетину прямої (ребер) з площиною – спосіб ребер, або визначення лінії перетину площин (граней) – спосіб граней.

2. Якщо розтинальна площина або грані багатогранника проєкціювальні, то розв'язок задачі спрощується. В першому випадку одна з проєкцій фігури перерізу зображується прямою і розташовується на сліду-проєкції площини. У другому випадку лінії перерізу визначаються як лінії перетину площин – граней призми (піраміди) із заданою розтинальною площиною. Для цього використовують площини-посередники, за які приймають проєкціювальні площини.

0914 КТ. 442 005 003-28

Лист пр. 001

Стор. №

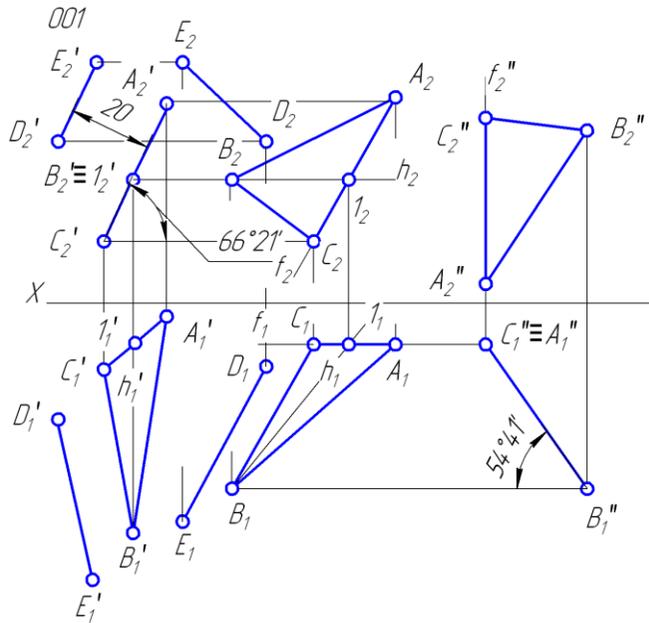
Лист и дата

Вам. инв. №

Лист и дата

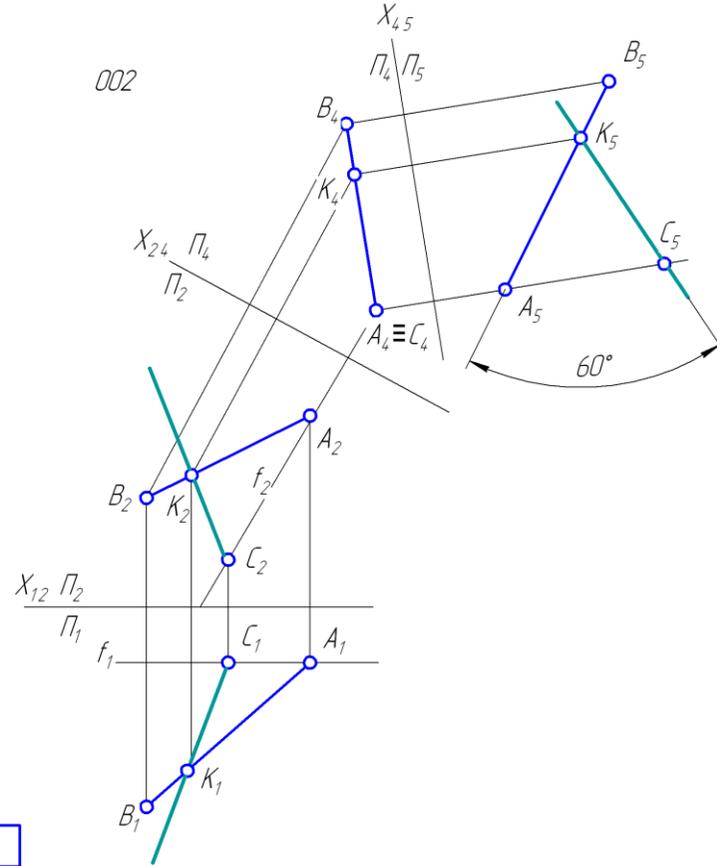
Лист и дата

Инв. №



Координата	Кут, $\alpha^\circ$	Т О Ч К А		
		A	B	C
X	60	0	40	20
Y		10	45	10
Z		50	30	15

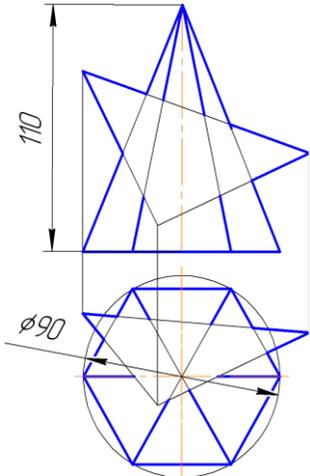
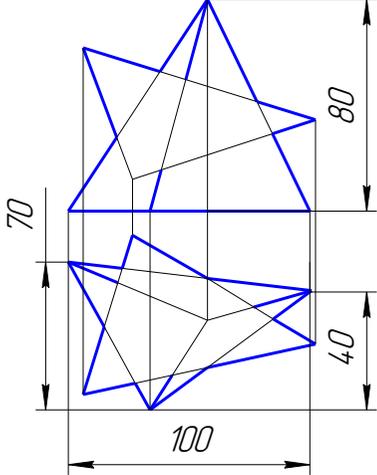
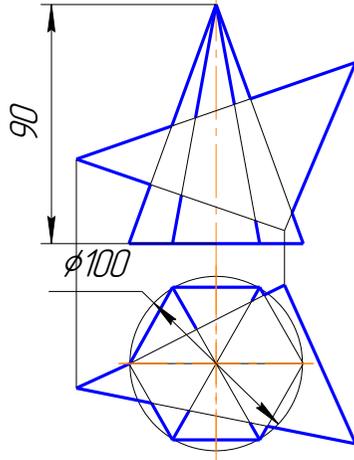
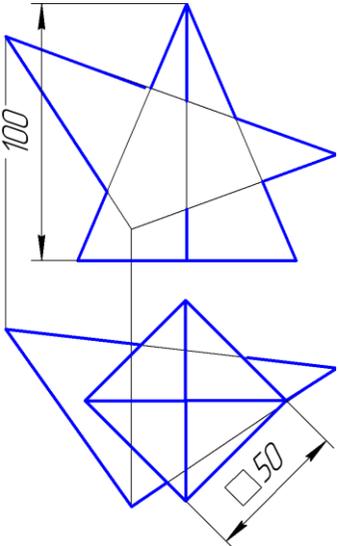
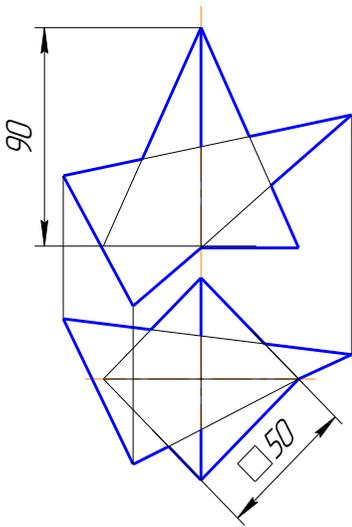
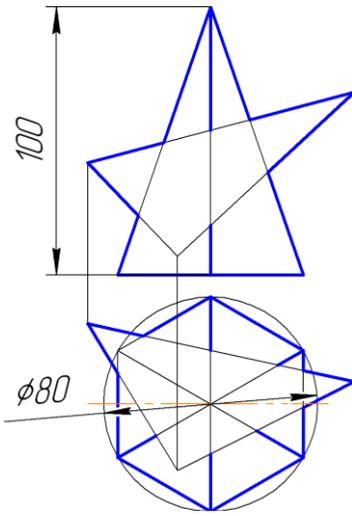
002



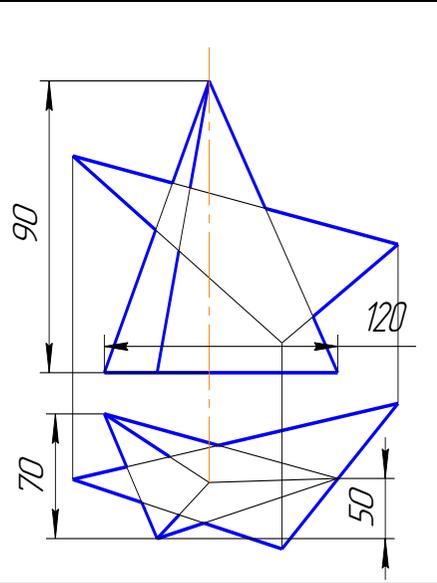
202 ІМТ. 442 005 003-28					
Ім. / Лист	№ док. /	Підп.	Дата	Лист	Масштаб
Разроб.	Сидоренко				11
Пров.	Райковська			Лист	Листов 1
Т. кантр.				ЖДТУ, зр. АТ-20	
Н. кантр.				Формат А3	
Члб.				Копіював	

Рис.153. Приклад завдання – «Способи перетворення епюра»

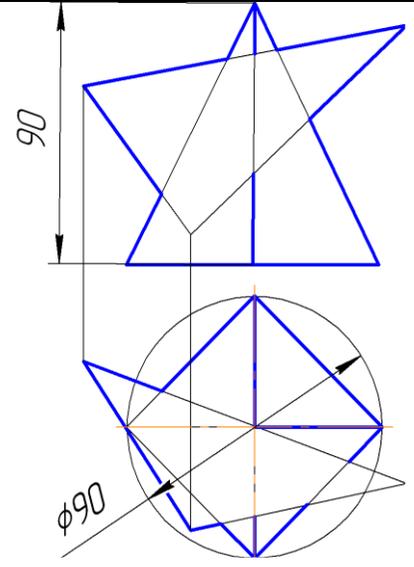
**Багатоваріантне індивідуальне завдання №4  
«Переріз багатогранника площиною. Розгортка поверхні»**

Варіант	Умова завдання (малюнок)	Варіант	Умова завдання (малюнок)	Варіант	Умова завдання (малюнок)
01		02		03	
04		05		06	

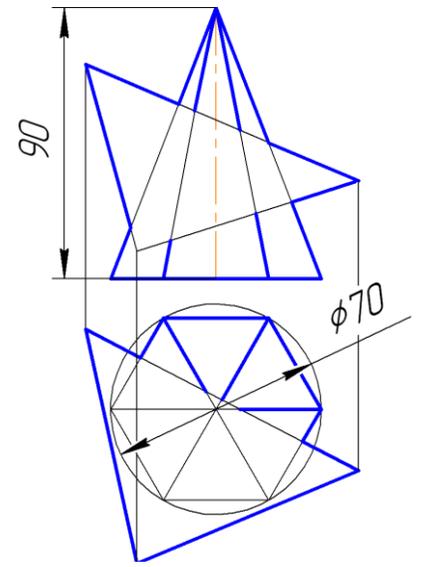
07



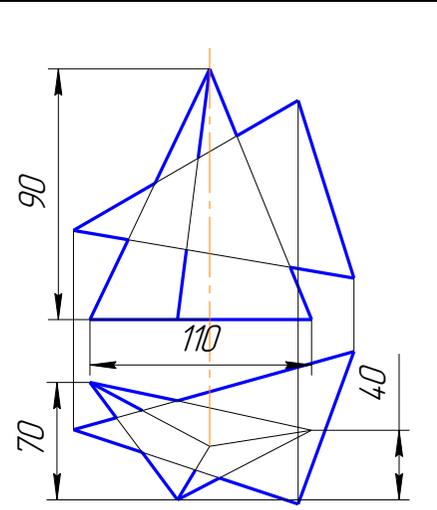
08



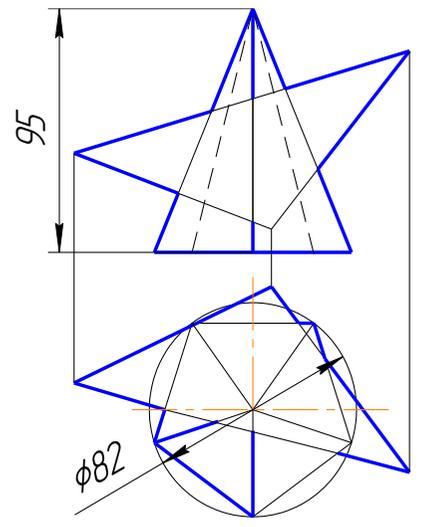
09



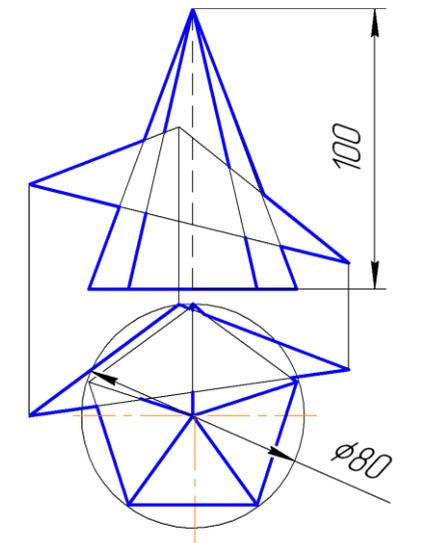
10

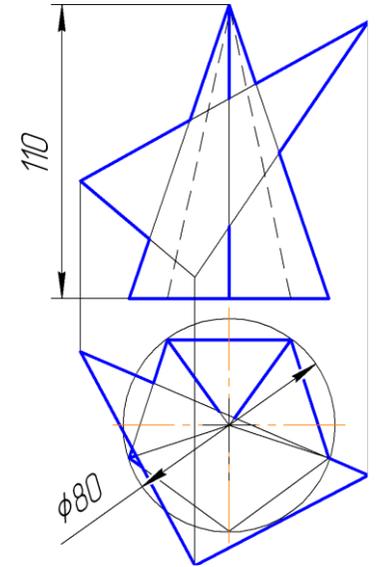
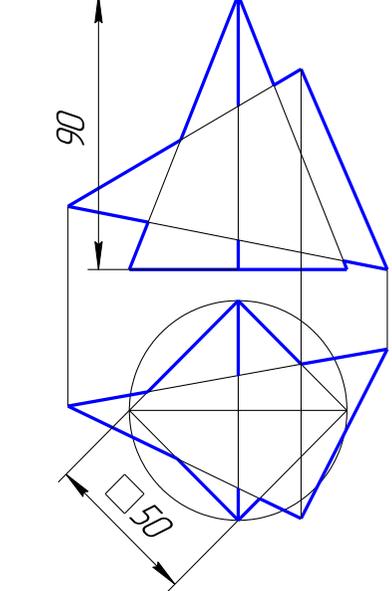
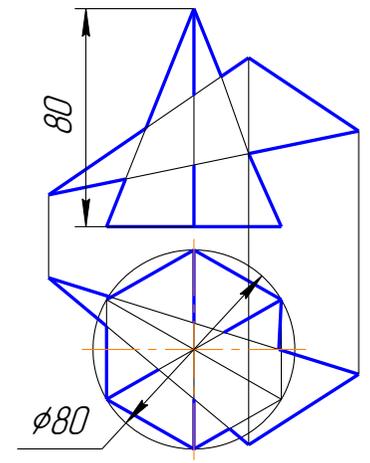
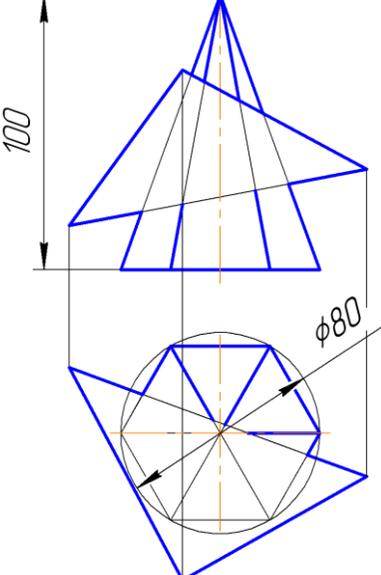
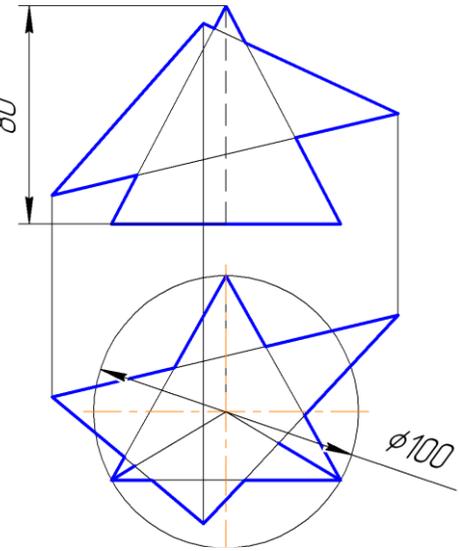
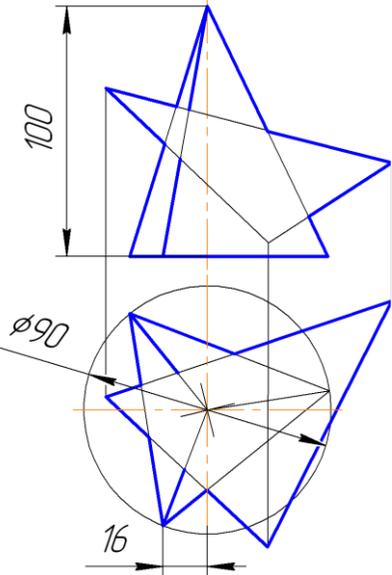


11



12



13		14		15	
16		17		18	

<p>19</p>		<p>20</p>		<p>21</p>	
<p>22</p>		<p>23</p>		<p>24</p>	

<p>25</p>		<p>26</p>		<p>27</p>	
<p>28</p>		<p>29</p>		<p>30</p>	

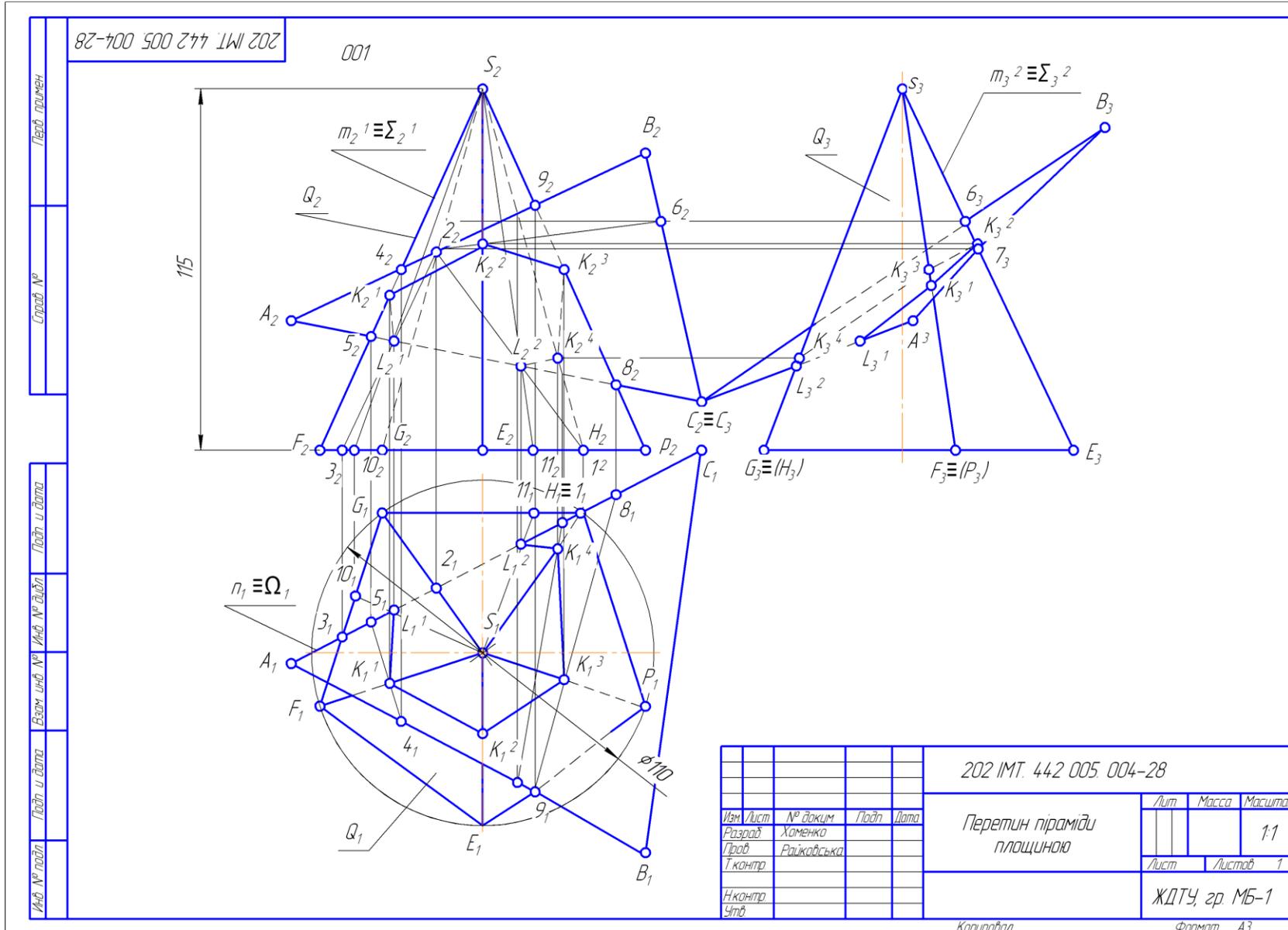


Рис. 154. Приклад завдання №4 – «Перетин поверхні площиною загального положення»

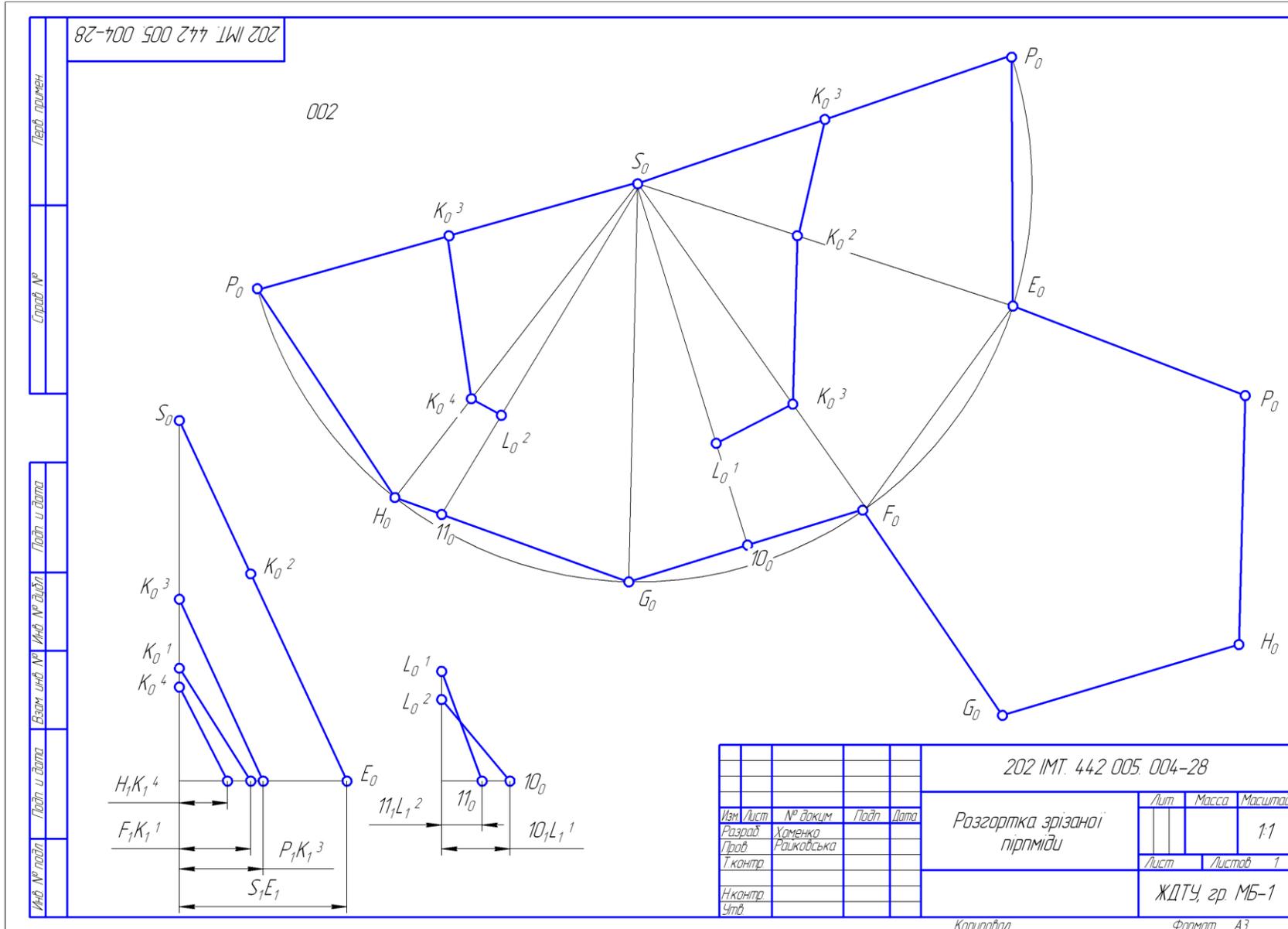


Рис. 155. Приклад побудови розгортки з лінією зрізу

3. Грані багатогранника і відповідні їм багатокутники на розгортці конгруентні між собою. Тому побудову розгортки багатогранника за креслеником зводиться до побудови плоских багатокутників, конгруентних гранням багатогранника. Їх розташування і послідовність можуть бути різними, проте розгортку необхідно будувати такою, щоб можна було б найкращим чином використати площу листового матеріалу, з якого створюється багатогранник.

4. Побудова розгорток прямої призми і піраміди виконується без використання будь-яких спеціальних прийомів. Для визначення величини сторін похилої призми або піраміди використовують спосіб прямокутного трикутника, який будують на вільному полі кресленика (рис. 155). Лінії згину на розгортка виконують штрих-пунктирною тонкою з двома пунктирами лінією.

## **Завдання 5**

### **ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ**

(приклад завдання рис. 156)

#### 5.1. Мета виконання завдання:

- вивчити і закріпити на практиці способи побудови лінії перетину двох кривих поверхонь;
- удосконалити уміння з реалізації принципу органічного зв'язку теорії з практикою;
- набути навички зображувати комбінації поверхонь;
- набути уміння використовувати графічні побудови при розв'язуванні інженерних задач;
- закріпити навички виконання креслеників геометричних поверхонь, що проєкціюються та їх просторове уявлення за креслеником.

#### 5.2. Вихідні дані до завдання

Завдання складається з двох задач на побудову проєкцій ліній перетину поверхонь в системі двох площин проєкцій: 001, 002 (табл. 22, 23). Умови задач для всіх варіантів однакові (малюнок вибрати за варіантом табл. 22):

001. За допомогою допоміжних розтинальних площин побудувати лінію перетину поверхонь;

002. За допомогою допоміжних розтинальних сфер побудувати лінію перетину поверхонь.

#### Методичні поради до розв'язування задач

1. Лінія перетину двох поверхонь є геометричною множиною точок, які одночасно належать обом поверхням. Отже, для побудови лінії перетину двох поверхонь необхідно визначити їх спільні точки. При цьому, необхідно чітко усвідомити, що точка буде результатом перетину трьох поверхонь. Таким чином, щоб побудувати лінію перетину двох поверхонь необхідно використати допоміжні розтинальні поверхні (посередники), які

виконують роль третьої поверхні перетину, в наслідок використання яких утворюються спільні точки перетину заданих поверхонь.

2. Для побудови лінії перетину двох поверхонь можна використовувати третю поверхню будь-якого вигляду, але за одною умовою: вона повинна перетинати кожен з поверхонь, що перетинаються по простим лініям – прямим чи колам. З цієї точки зору в якості посередників використовують площини або сфери.

3. Суть способу поверхонь-посередників зводиться до наступного – поверхня-посередник перетинає кожен з двох заданих поверхонь по двом лініям. Ці лінії, що розташовані одночасно на поверхні-посереднику та одночасному взаємному перетині визначають шукані точки лінії перетину двох заданих поверхонь. Необхідно, обов'язково, брати достатню кількість допоміжних поверхонь, щоб визначити достатню кількість точок шуканої лінії.

4. Перетин кривих поверхонь площинами по колу зводиться до наступних випадків:
- крива поверхня – поверхня обертання, а розгинальна площина перпендикулярна до осі обертання;
  - твірна кривої поверхні – коло (циклічні, каналові і трубчасті поверхні), а розгинальна площина проходить через її площину.

5. Розгинальна площина у якості посередника для побудови лінії перетину двох кривих поверхонь може бути використана тільки у тому випадку, коли кожен з поверхонь, що перетинаються вона перетинає одночасно по колу чи прямим лініям або в будь-якій комбінації її сполучення.

### Увага!

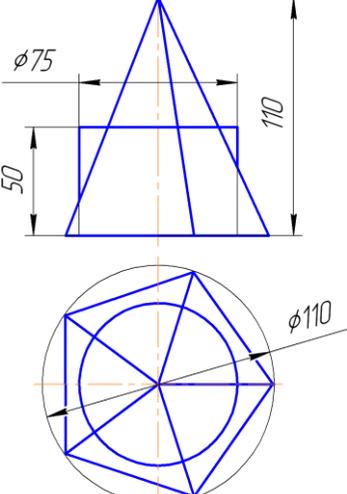
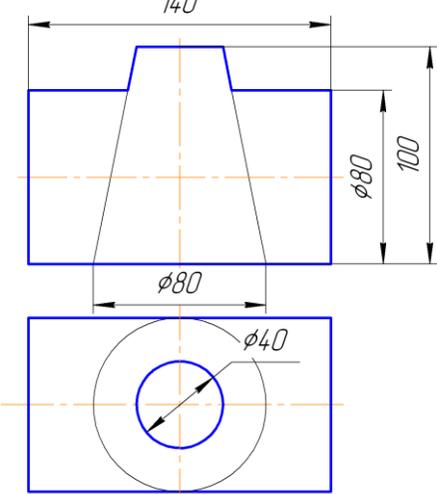
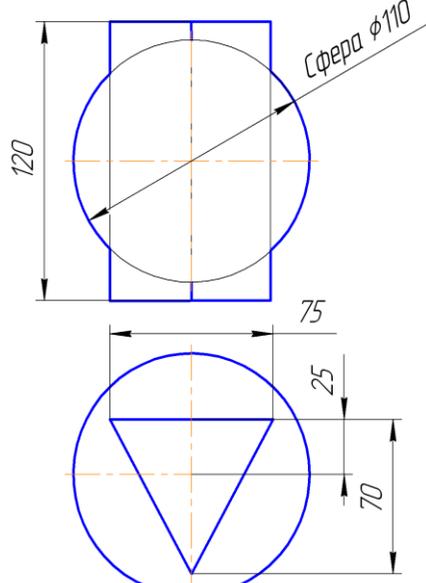
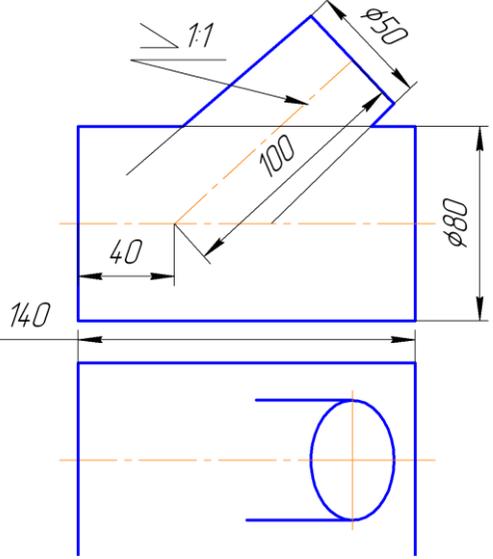
По прямим лініям можна перетнути тільки лінійчасту поверхню.

Таблиця 22

### Вибір малюнка на завдання № 5 – «Перетин поверхонь»

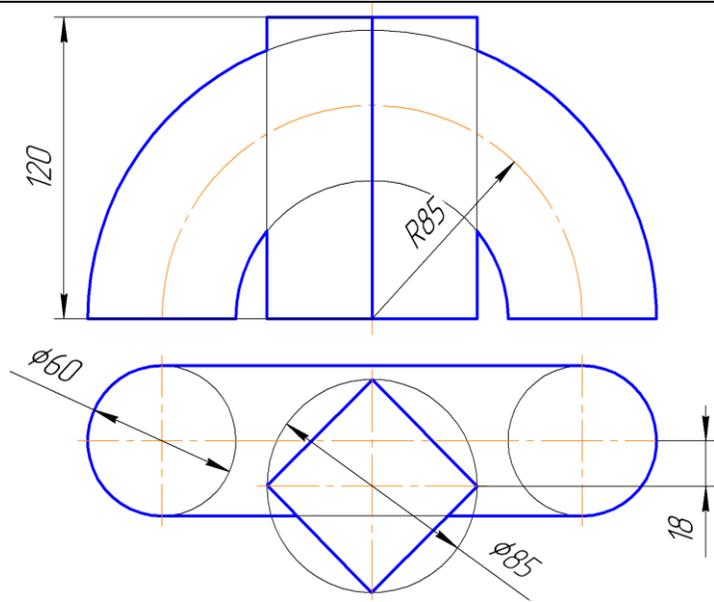
Варіант	Малюнок до задачі		Варіант	Малюнок до задачі	
	001	002		001	002
1	1	2	16	7	10
2	3	4	17	9	12
3	5	6	18	11	14
4	7	8	19	13	16
5	9	10	20	15	18
6	11	12	21	17	20
7	13	14	22	19	22
8	15	16	23	21	24
9	17	18	24	23	2
10	19	20	25	1	6
11	21	22	26	3	8
12	23	24	27	5	10
13	1	4	28	7	12
14	3	6	29	9	14
15	5	8	30	11	16

**Багатоваріантне індивідуальне завдання № 5**  
**«Перетин поверхонь»**

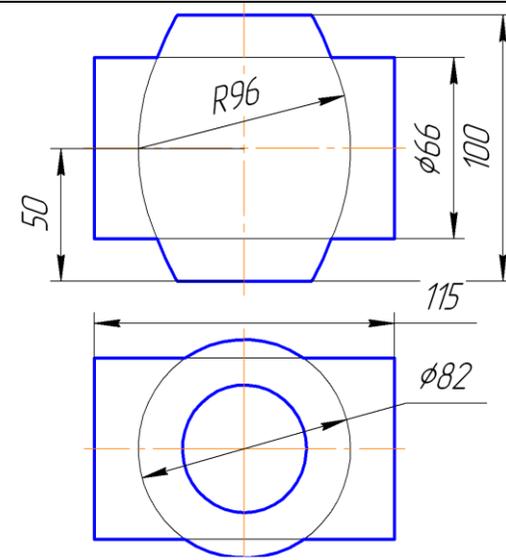
Малюнок	Умова завдання 001	Малюнок	Умова завдання 002
<b>01</b>		<b>02</b>	
<b>03</b>		<b>04</b>	

<p><b>05</b></p>	<p>Сфера <math>\phi 80</math></p> <p>100</p> <p>45</p> <p><math>\phi 80</math></p> <p>20</p>
<p><b>07</b></p>	<p>100</p> <p>50</p> <p>55</p> <p>40</p> <p>30</p> <p>110</p> <p><math>\phi 100</math></p>
<p><b>06</b></p>	<p>100</p> <p><math>R65</math></p> <p>70</p> <p><math>\phi 65</math></p> <p><math>\phi 100</math></p>
<p><b>08</b></p>	<p><math>\phi 60</math></p> <p>90</p> <p>140</p> <p>Сфера <math>\phi 120</math></p>

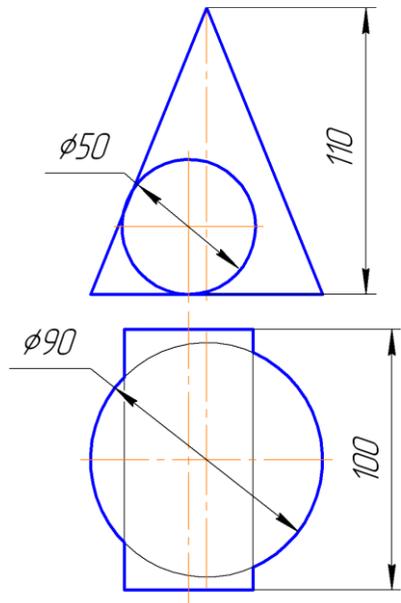
09



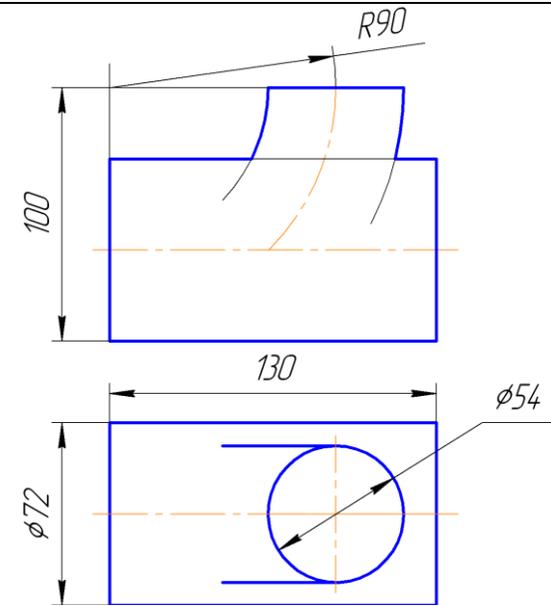
10



11

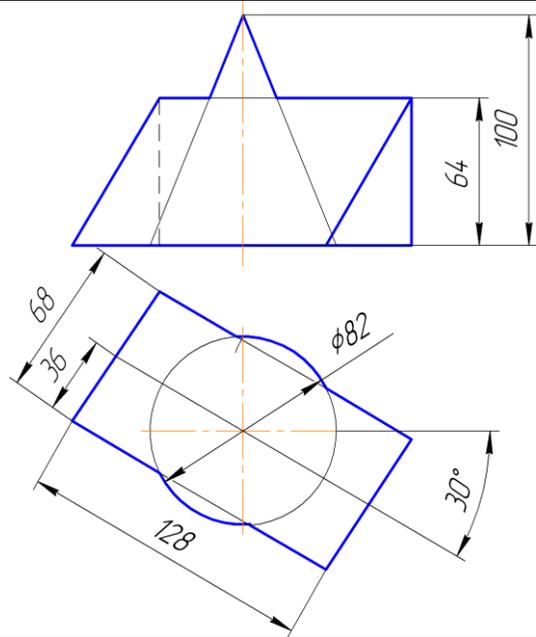


12

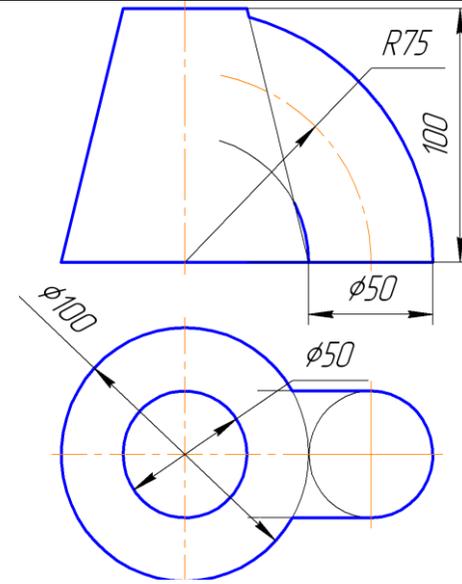


<p><b>13</b></p>	
<p><b>14</b></p>	
<p><b>15</b></p>	
<p><b>16</b></p>	

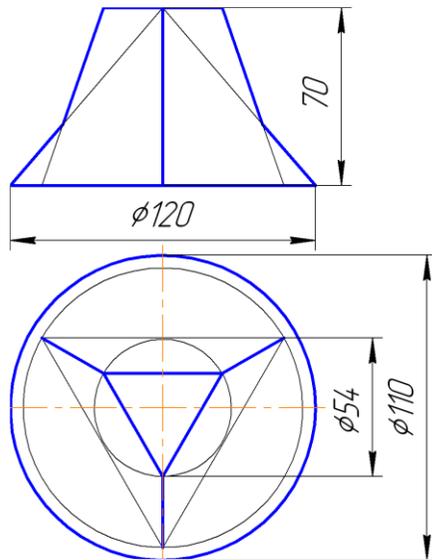
17



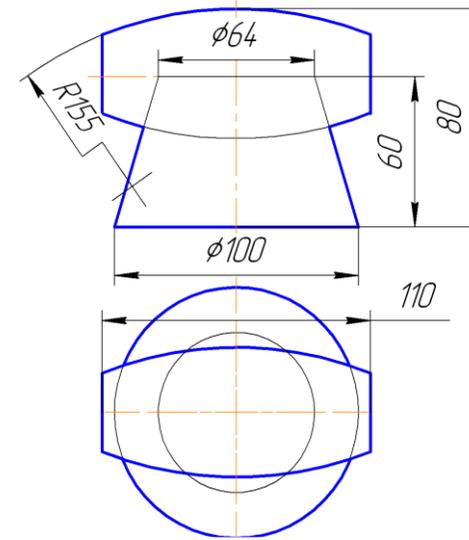
18



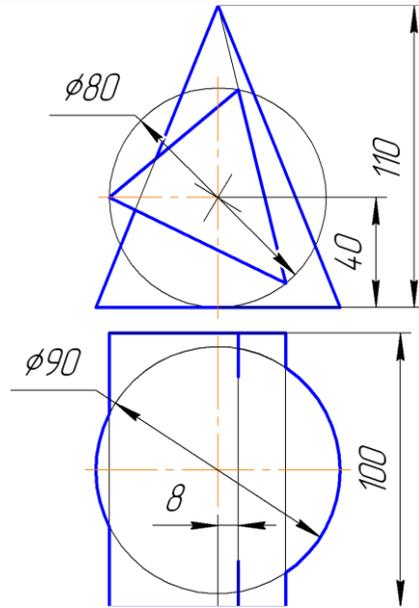
19



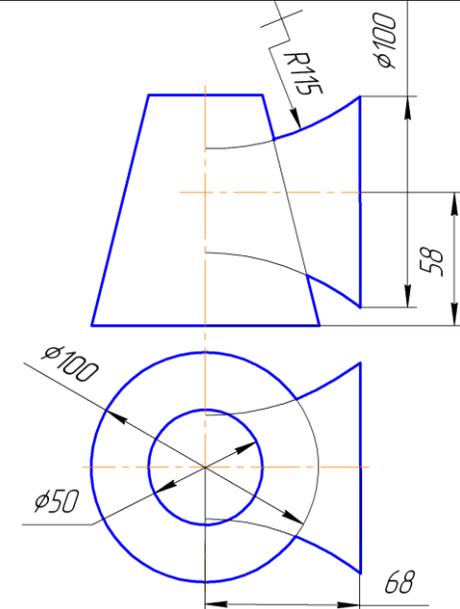
20



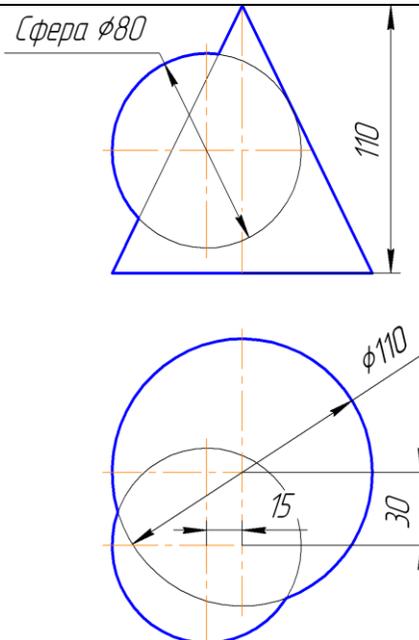
21



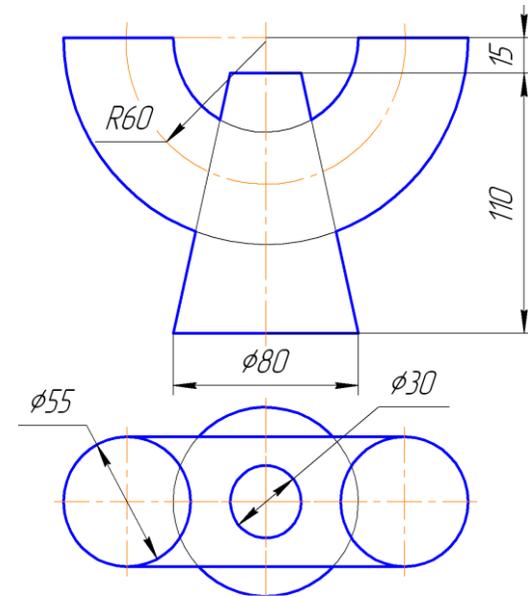
22



23



24



202 ІМТ. 442 007. 005-26

001

002

202 ІМТ. 442 007. 005-26								
Ізм.	Лист	№ док.	Підп.	Дата	Перетин поверхонь	Лист	Маса	Масштаб
Разроб.	Кліменко					Лист	Листів	1
Проб.	Ражабська					ЖДТУ, гр. МБ-1		
Т.контр.								
Н.контр.								
Утв.								

Копіював \_\_\_\_\_ Формат А3

Рис. 156. Приклад завдання № 5 – «Перетин поверхонь»

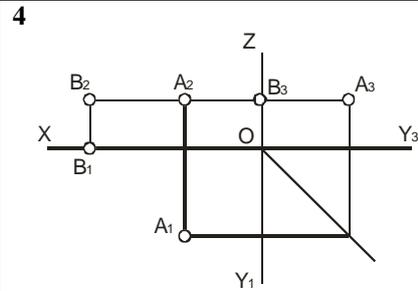
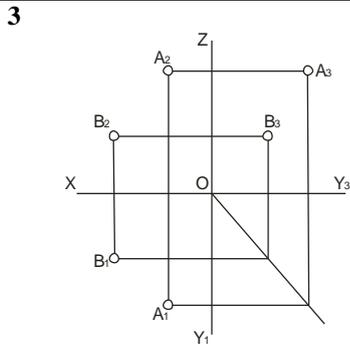
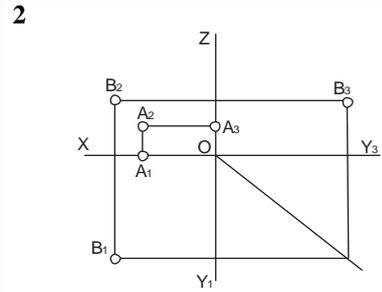
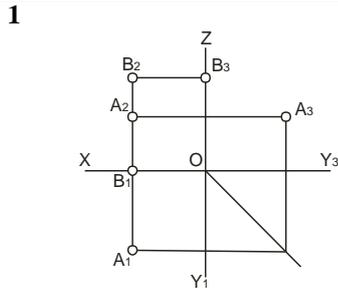
# РОЗДІЛ 5

## ТЕСТ-КОНТРОЛЬ

№ з/п	Запитання	Відповідь
<b>I рівень (50 балів, коефіцієнти: * <math>P_{ск.} - 0,5</math>; ** <math>P_{зн.} - 0,6</math>)</b>		
1	Що ми розуміємо під плоскою фігурою? 1 – будь-який багатокутник; 2 – оригінал предмета, в плоскому зображенні; 3 – будь-яку множину точок; 4 – точки простору, що з'єднанні між собою прямими лініями; 5 – зображення просторового предмета, яке складається з точок, ліній розташованих таким чином, якщо дивитись на нього виникає уявлення про зображений предмет.	<input type="checkbox"/>
2	Що означає спроекціювати предмет? 1 – виконати його кресленик; 2 – зобразити його на площині; 3 – «відкинути» його на площину; 4 – виконати просторове зображення предмета; 5 – усі відповіді правильні.	<input type="checkbox"/>
3	Положення точки у просторі можна задати за допомогою: 1 – широти; 2 – глибини; 3 – висоти; 4 – широти, глибини і висоти; 5 – усі відповіді правильні.	<input type="checkbox"/>
4	По якій осі перетинаються горизонтальна $\Pi_1$ і фронтальна $\Pi_2$ площини проекцій? 1 – по осі $OZ$ 2 – по осі $OY_1$ 3 – по осі $OX$ 4 – по осі $OY_3$ 5 – по осі $OY$	<input type="checkbox"/>
5	По якій осі відкладається відстань від точки до профільної площини проекцій? 1 – по осі $OZ$ 2 – по осі $OY_1$ 3 – по осі $OX$ 4 – по осі $OY_3$ 5 – по осі $OY$	<input type="checkbox"/>
6	Де розташована точка відносно площин проекцій з координатами – $X \neq 0$ ; $Y \neq 0$ ; $Z = 0$ ? 1 – у площині $\Pi_1$ ; 2 – у площині $\Pi_2$ ; 3 – у площині $\Pi_3$ ; 4 – у просторі; 5 – на осі $OX$ ;	<input type="checkbox"/>
7	Де розташована точка відносно площин проекцій з координатами – $X \neq 0$ ; $Y = 0$ ; $Z = 0$ ? 1 – у площині $\Pi_1$ ; 2 – у площині $\Pi_2$ ; 3 – на осі $OX$ ; 4 – на осі $OY$ ; 5 – на початку осей проекцій;	<input type="checkbox"/>
8	Якими координатами визначається фронтальна проекція точки на епюрі? 1 – $X$ і $Z$ ; 2 – $X$ і $Y$ ; 3 – $Y$ і $Z$ ; 4 – тільки $X$ ; 5 – тільки $Z$ ;	<input type="checkbox"/>

Примітка. \*  $P_{ск.}$  – коефіцієнт складності завдання;  
\*\*  $P_{зн.}$  – коефіцієнт рівня знань.

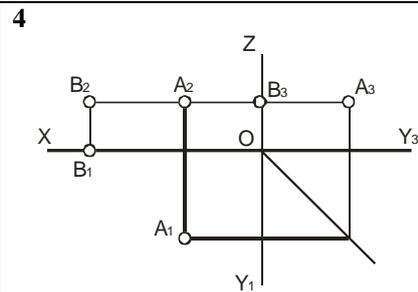
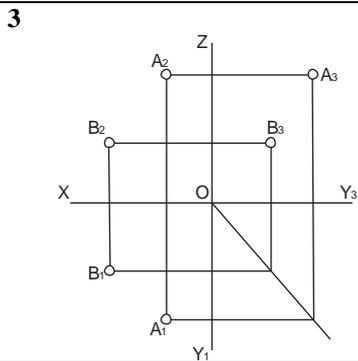
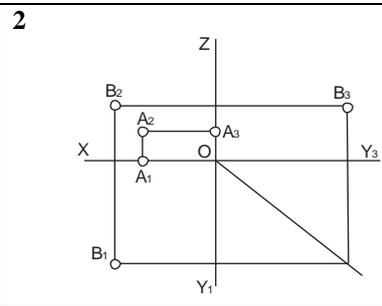
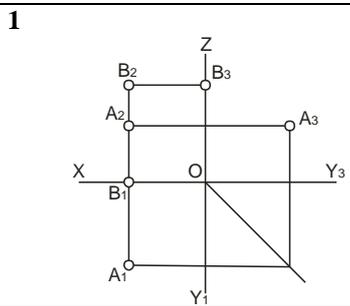
На якому рисунку точка  $A$  належить горизонтальній площині проєкцій?



9

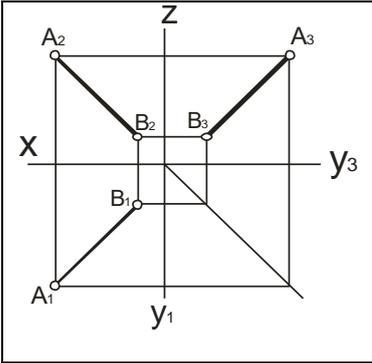
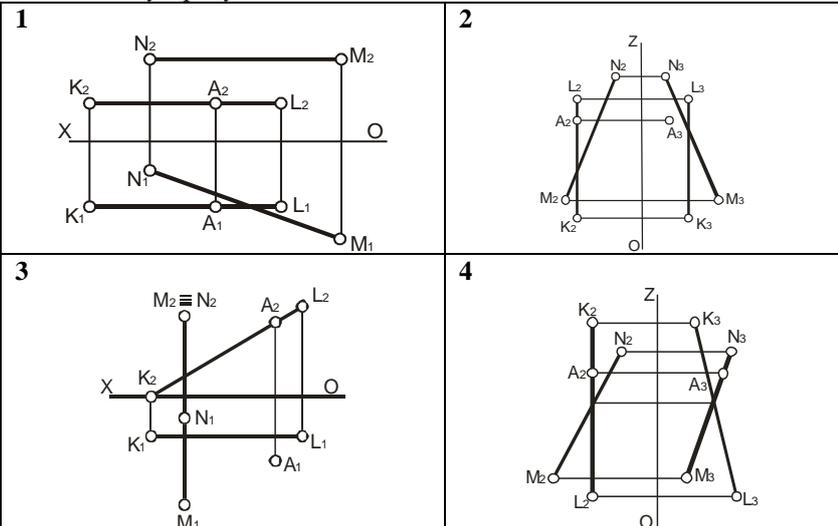
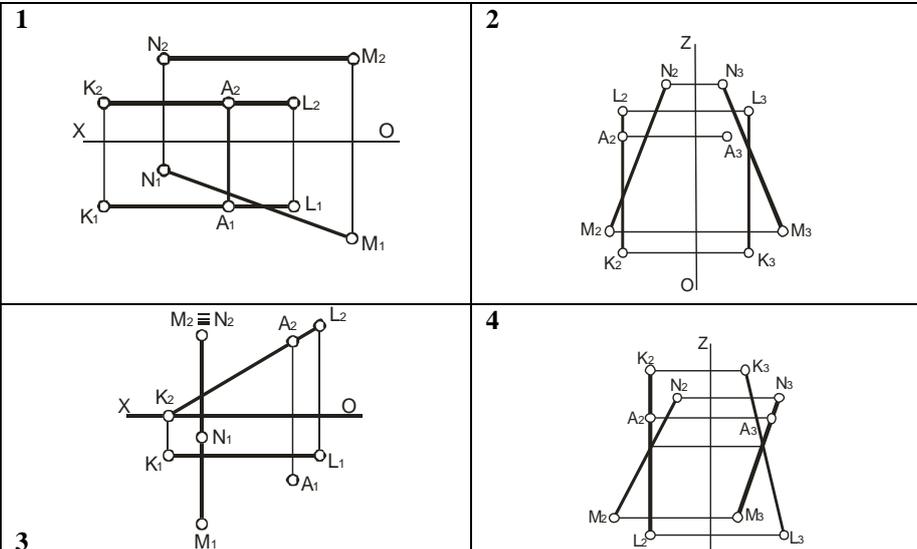
- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

На якому рисунку точка  $A$  знаходиться найближче до профільної площини проєкцій?



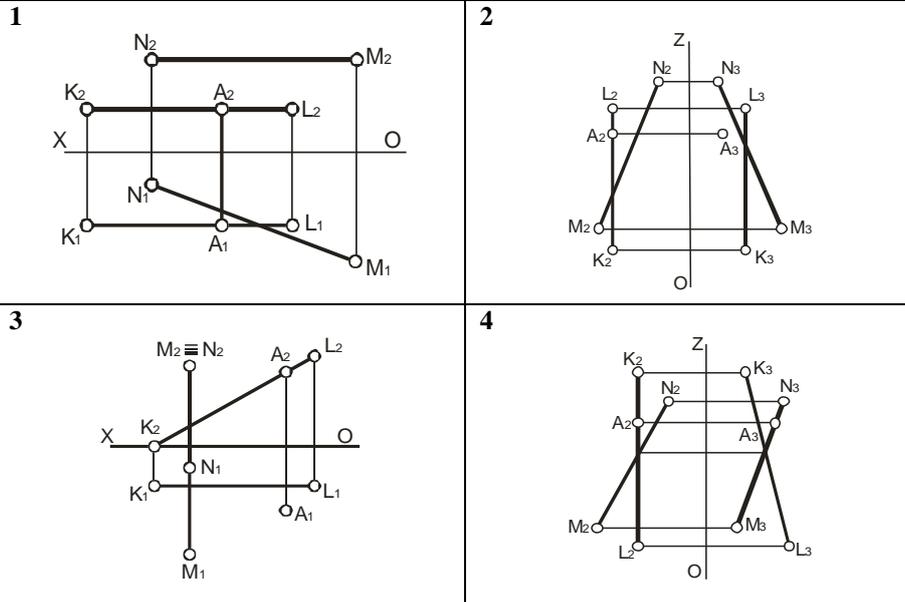
10

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – на всіх рисунках однаково.

11	<p>Яким способом визначено профільну проекцію прямої <math>AB</math>?</p>  <p>1 – координатним;  2 – за допомогою постійної прямої;  3 – проекційним;  4 – змішаним;  5 – перенесенням.</p>	<input type="checkbox"/>
12	<p>На якому рисунку відрізок <math>KL</math> є профільною прямою?</p> <p>1 – на першому;  2 – на другому;  3 – на третьому;  4 – на четвертому;  5 – ні на жодному з рисунків.</p> 	<input type="checkbox"/>
13	<p>На якому рисунку точка <math>A</math> знаходиться перед відрізком <math>KL</math>?</p> 	<input type="checkbox"/>

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

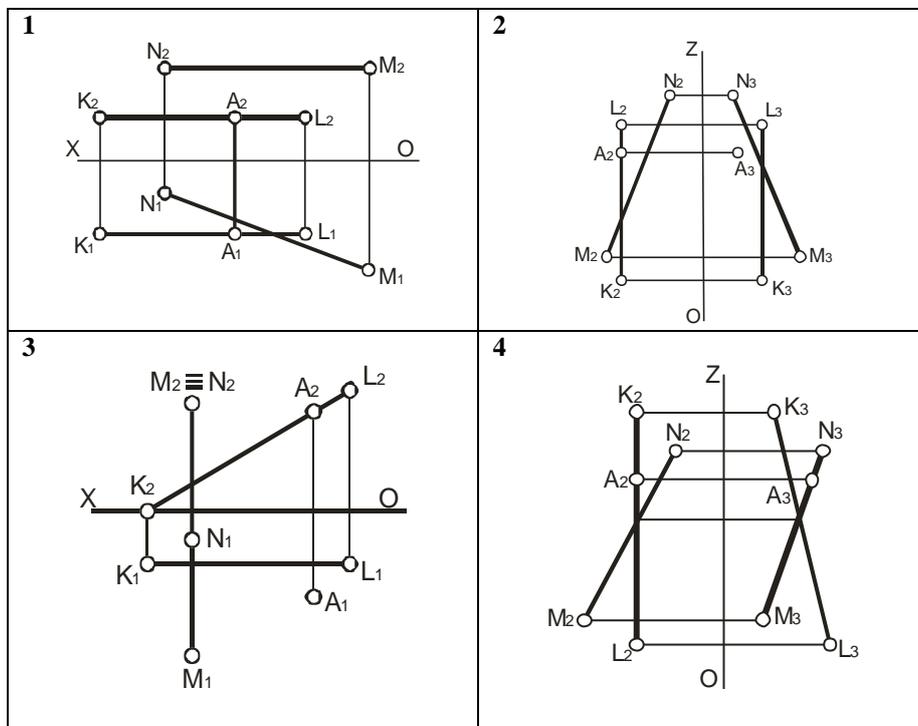
На якому рисунку задані відрізки  $KL$  і  $MN$  перетинаються ?



14

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

На якому рисунку відрізок  $MN$  є горизонтальною прямою?

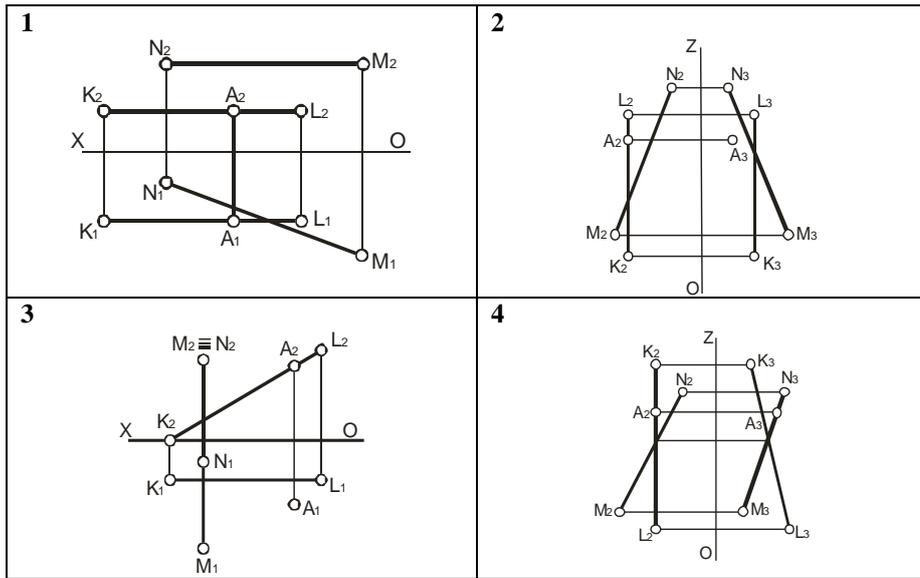


15

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

На якому рисунку точка  $A$  належить відрітку  $KL$ ?

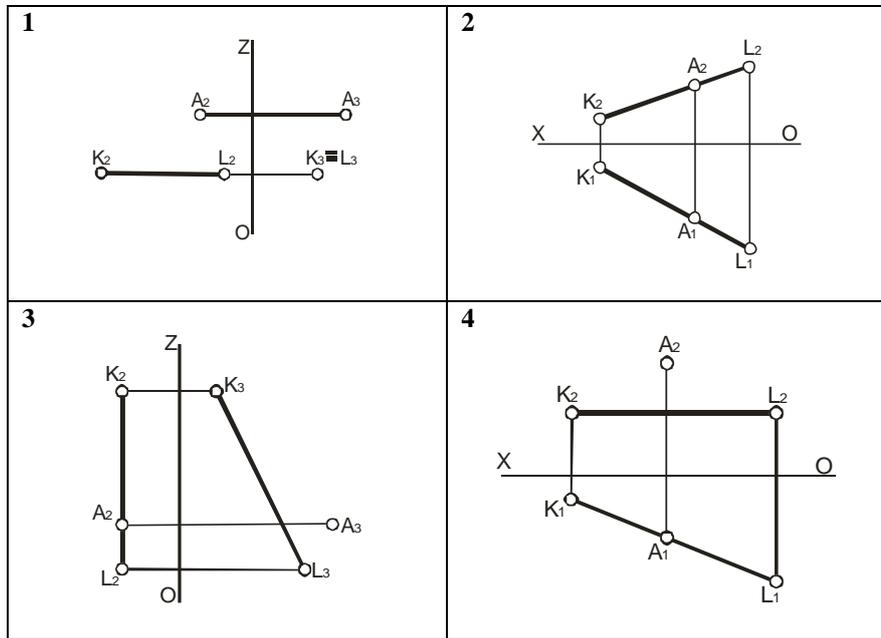
16



- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

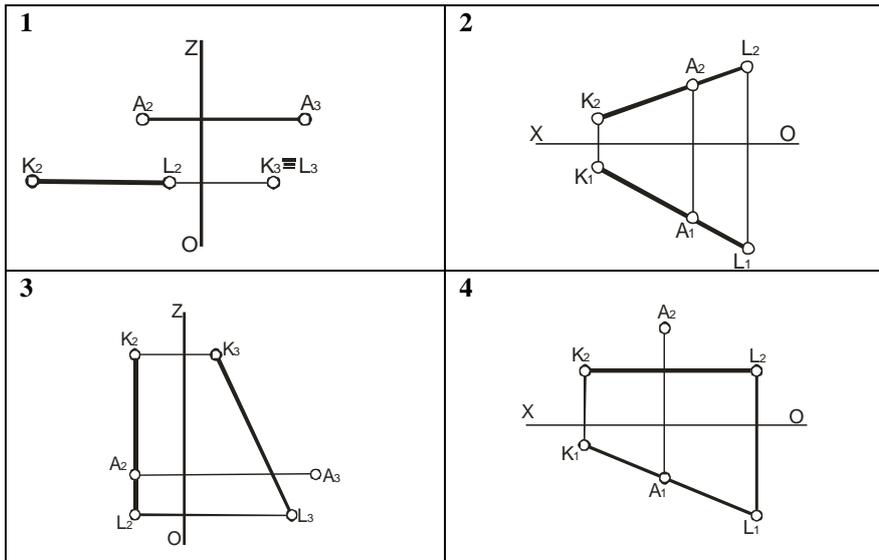
На якому рисунку зображено відрізок загального положення?

17



- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

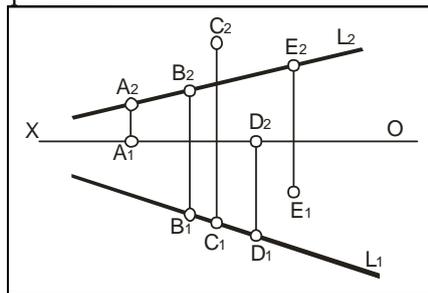
На якому рисунку зображено профільно-проекційвальний відрізок  $KL$ ?



18

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

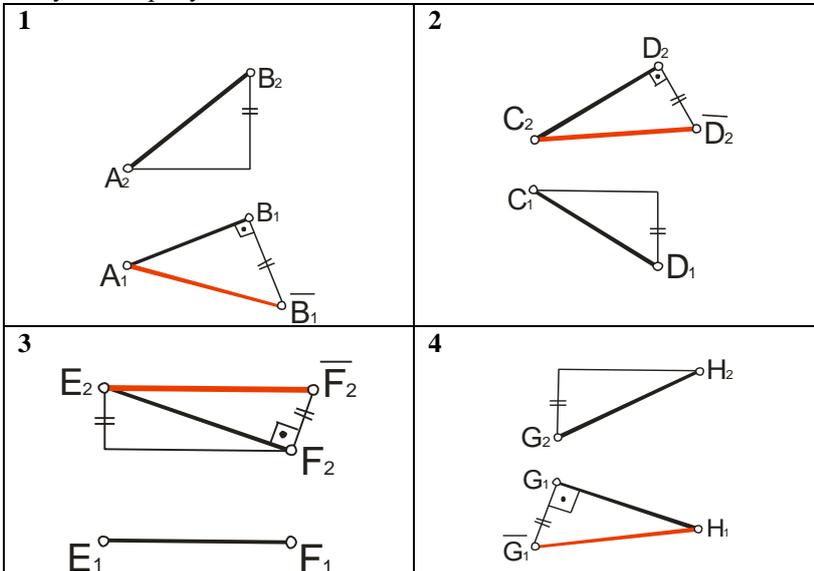
Яка точка належить прямій  $L$ ?



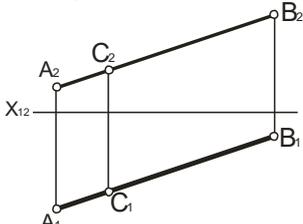
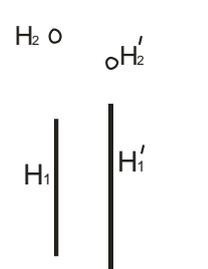
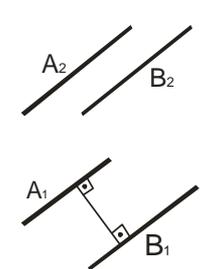
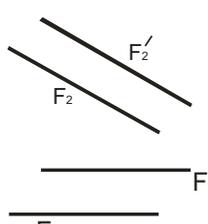
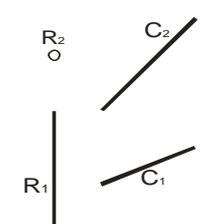
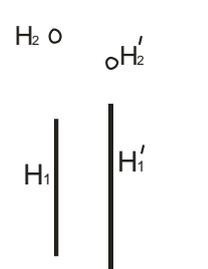
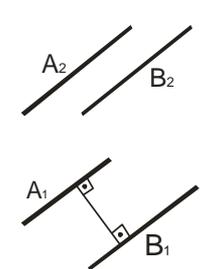
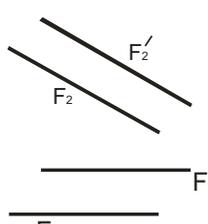
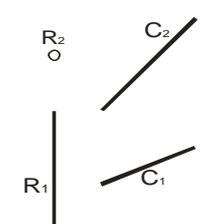
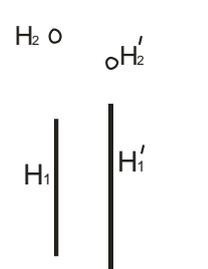
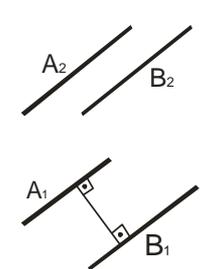
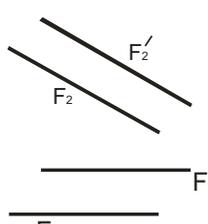
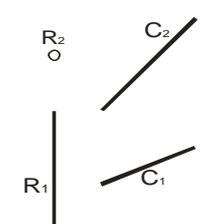
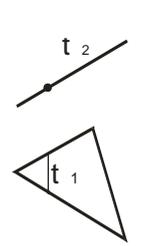
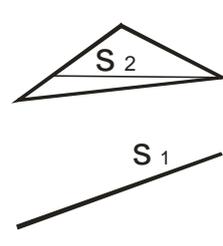
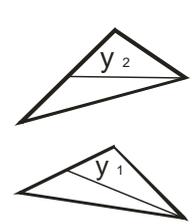
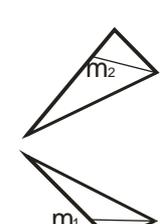
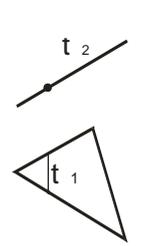
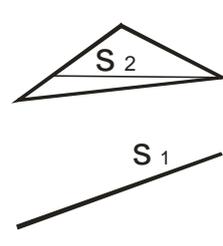
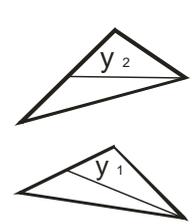
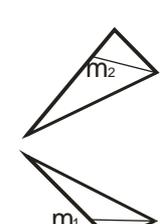
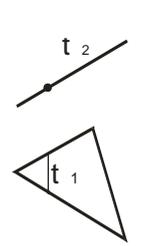
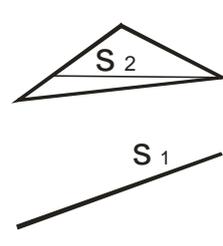
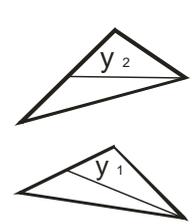
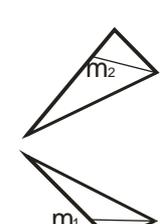
19

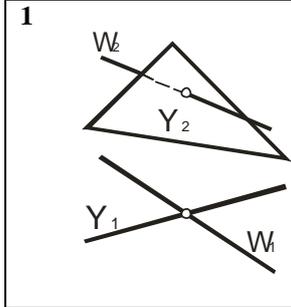
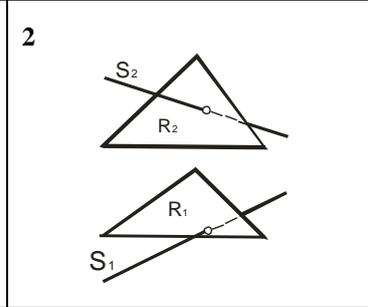
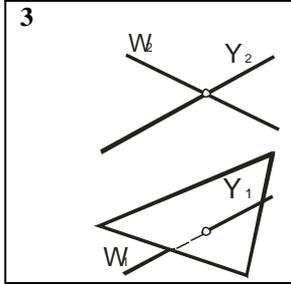
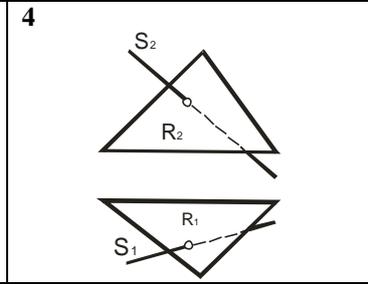
- 1 – A;
- 2 – B;
- 3 – C;
- 4 – D;
- 5 – E.

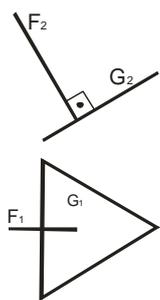
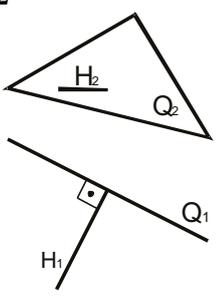
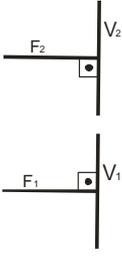
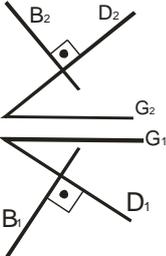
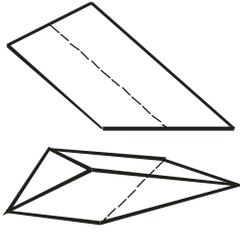
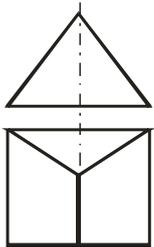
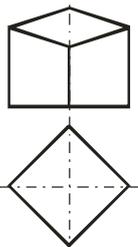
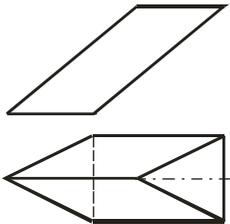
В якій задачі допущено помилку при визначенні дійсної величини прямої способом прямокутного трикутника?

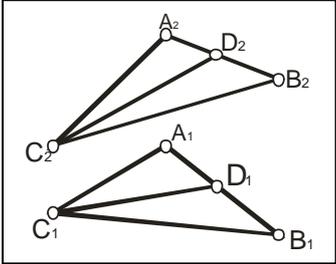
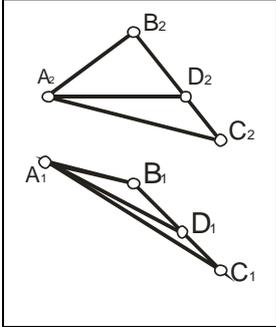
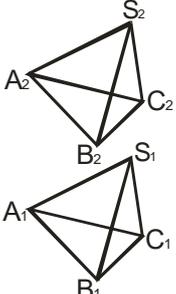
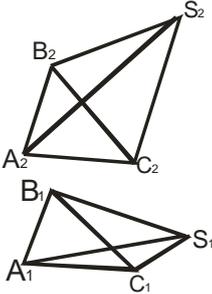


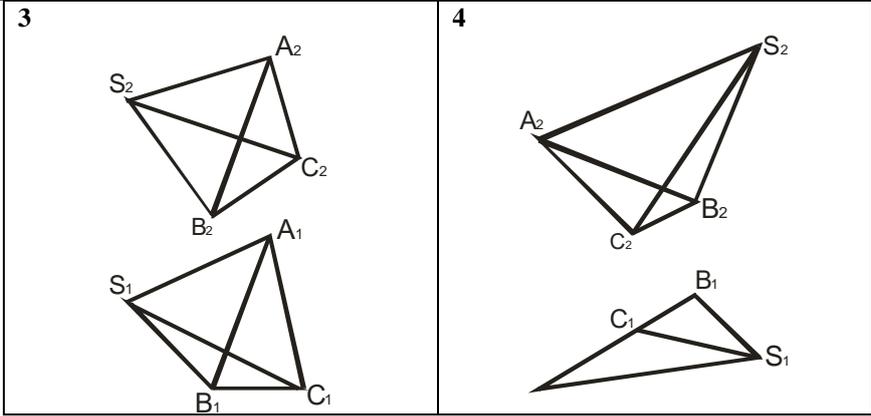
20

	<p>1 – в першій;  2 – в другій;  3 – в третій;  4 – в четвертій;  5 – усі задачі розв’язано правильно.</p>					
21	<p>В якому відношенні точка <math>C</math> поділяє відрізок <math>AB</math>?</p>  <p>1 – 1:4;  2 – 1:3;  3 – 3:1;  4 – 4:1;  5 – немає правильної відповіді.</p>	<input type="checkbox"/>				
22	<p>На якому рисунку відстань між двома прямими проєціюється спотворено?</p> <table border="1" data-bbox="462 739 1149 1276"> <tr> <td> <p><b>1</b></p>  </td> <td> <p><b>2</b></p>  </td> </tr> <tr> <td> <p><b>3</b></p>  </td> <td> <p><b>4</b></p>  </td> </tr> </table> <p>1 – на першому;  2 – на другому;  3 – на третьому;  4 – на четвертому;  5 – ні на жодному з рисунків.</p>	<p><b>1</b></p> 	<p><b>2</b></p> 	<p><b>3</b></p> 	<p><b>4</b></p> 	<input type="checkbox"/>
<p><b>1</b></p> 	<p><b>2</b></p> 					
<p><b>3</b></p> 	<p><b>4</b></p> 					
23	<p>На якому рисунку побудовано горизонталь площини загального положення?</p> <table border="1" data-bbox="430 1500 1069 2038"> <tr> <td> <p><b>1</b></p>  </td> <td> <p><b>2</b></p>  </td> </tr> <tr> <td> <p><b>3</b></p>  </td> <td> <p><b>4</b></p>  </td> </tr> </table>	<p><b>1</b></p> 	<p><b>2</b></p> 	<p><b>3</b></p> 	<p><b>4</b></p> 	<input type="checkbox"/>
<p><b>1</b></p> 	<p><b>2</b></p> 					
<p><b>3</b></p> 	<p><b>4</b></p> 					

	<p>1 – на першому;  2 – на другому;  3 – на третьому;  4 – на четвертому;  5 – ні на жодному з рисунків.</p>	
24	<p>Які лінії називаються лініями найбільшого нахилу?</p> <p>1 – горизонталь і фронталь даної площини;  2 – лінії які лежать в даній площині і перпендикулярні до головних ліній площини;  3 – головні лінії площини – горизонталь, фронталь і профільна пряма;  4 – за направленням цих ліній скотилась би куля;  5 – немає правильної відповіді.</p>	
25	<p>Які задачі нарисної геометрії належать до позиційних задач?</p> <p>1 – задачі на належність одних геометричних елементів іншим;  2 – на перетин;  3 – побудова точки перетину прямої і площини, двох прямих;  4 – визначення лінії перетину площин;  5 – усі вище перераховані задачі.</p>	
26	<p>На якому рисунку неправильно показано видимість прямої, що перетинає площину?</p> <div style="display: flex; flex-wrap: wrap;"> <div style="width: 50%; padding: 5px;"> <p><b>1</b></p>  </div> <div style="width: 50%; padding: 5px;"> <p><b>2</b></p>  </div> <div style="width: 50%; padding: 5px;"> <p><b>3</b></p>  </div> <div style="width: 50%; padding: 5px;"> <p><b>4</b></p>  </div> </div> <p>1 – на першому;  2 – на другому;  3 – на третьому;  4 – на четвертому;  5 – скрізь правильно.</p>	
27	<p>В якому випадку пряма буде паралельна площині?</p> <p>1 – якщо вона проходить через точку, що лежить в даній площині;  2 – якщо вона належить даній площині;  3 – якщо вона паралельна будь-якій прямій, яка лежить в цій площині;  4 – якщо вона не перпендикулярна до даної площини;  5 – усі відповіді правильні.</p>	
28	<p>На якому рисунку пряма не перпендикулярна до заданої площини?</p>	

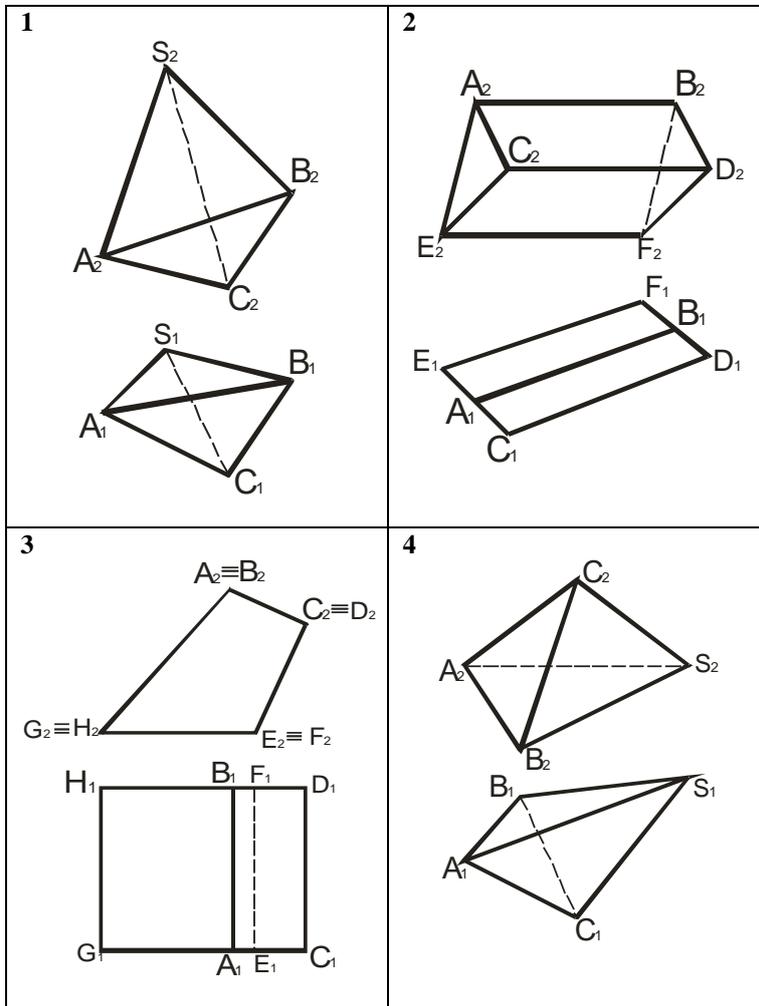
	<div style="display: flex; flex-wrap: wrap;"> <div style="width: 50%; text-align: center;"> <p><b>1</b></p>  </div> <div style="width: 50%; text-align: center;"> <p><b>2</b></p>  </div> <div style="width: 50%; text-align: center;"> <p><b>3</b></p>  </div> <div style="width: 50%; text-align: center;"> <p><b>4</b></p>  </div> </div> <p>1 – на першому;  2 – на другому;  3 – на третьому;  4 – на четвертому;  5 – на всіх рисунках вона перпендикулярна.</p>	
29	<p>На якому рисунку зображено багатогранник з паралельними гранями?</p> <div style="display: flex; flex-wrap: wrap;"> <div style="width: 50%; text-align: center;"> <p><b>1</b></p>  </div> <div style="width: 50%; text-align: center;"> <p><b>2</b></p>  </div> <div style="width: 50%; text-align: center;"> <p><b>3</b></p>  </div> <div style="width: 50%; text-align: center;"> <p><b>4</b></p>  </div> </div> <p>1 – на першому;  2 – на другому;  3 – на третьому;  4 – на четвертому;  5 – на всіх рисунках.</p>	<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; margin: 0 auto;"></div>
30	<p>В якому випадку прямий кут спроекціюється у вигляді прямого кута?</p> <p>1 – якщо обидві сторони кута паралельні до будь-якої площини проєкцій;  2 – якщо сторони кута паралельні до площини <math>\Pi_1</math>;  3 – якщо сторони кута паралельні до площини <math>\Pi_2</math>;  4 – якщо хоча б одна з його сторін паралельна площині проєкцій, а друга – не перпендикулярна до цієї ж площини;  5 – якщо хоча б одна з його сторін паралельна площині проєкцій, а друга – перпендикулярна до цієї ж площини.</p>	<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; margin: 0 auto;"></div>

31	<p>Коли дві площини будуть паралельні між собою?</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1 – якщо хоча б одна пряма однієї площини відповідно паралельна прямій, яка належить іншій площині;</li> <li>2 – якщо усі прямі однієї площини відповідно паралельні всім прямим іншої площини;</li> <li>3 – якщо дві прямі, що перетинаються однієї площини, відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються іншої площини;</li> <li>4 – якщо задані площини відповідно паралельні одній і тій ж самій площині проєкцій;</li> <li>5 – якщо будь-які дві прямі однієї площини відповідно паралельні будь-яким двом прямим іншої площини.</li> </ol>	
32	<p>До метричних задач відносяться задачі на визначення:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1 – кута між прямими, що перетинаються, між площинами;</li> <li>2 – вимірювання відрізків, відстаней між геометричними елементами;</li> <li>3 – на побудову перпендикулярів;</li> <li>4 – визначення дійсної величини геометричних елементарних фігур;</li> <li>5 – усі вище перераховані задачі</li> </ol>	
33	<p>Яку пряму необхідно перемістити у проєкціовальне положення з тим, що б площина <math>ABC</math> стала горизонтально-проєкціовальною?</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1 – <math>CD</math>;</li> <li>2 – <math>AB</math>;</li> <li>3 – <math>BC</math>;</li> <li>4 – <math>AC</math>;</li> <li>5 – будь-яку пряму.</li> </ol> 	
34	<p>Перпендикулярно до якої прямої необхідно розмістити нову площину проєкцій з тим, щоб задана площина <math>ABC</math> стала в новій системі проєкціовальною?</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1 – <math>AB</math>;</li> <li>2 – <math>AC</math>;</li> <li>3 – <math>BC</math>;</li> <li>4 – <math>AD</math>;</li> <li>5 – до будь-якої прямої.</li> </ol> 	
35	<p>На якому рисунку ребро <math>AB</math> багатогранника ми не будемо бачити при проєкціюванні на горизонтальну площину проєкцій <math>\Pi_1</math> (видимість ребер на креслениках не показано)?</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="360 1682 794 2009"> <p><b>1</b></p>  </div> <div data-bbox="794 1682 1228 2009"> <p><b>2</b></p>  </div> </div>	



1 – на першому;  
 2 – на другому;  
 3 – на третьому;  
 4 – на четвертому;  
 5 – на всіх рисунках ми будемо бачити.

На якому рисунку видимість ребер визначено неправильно?

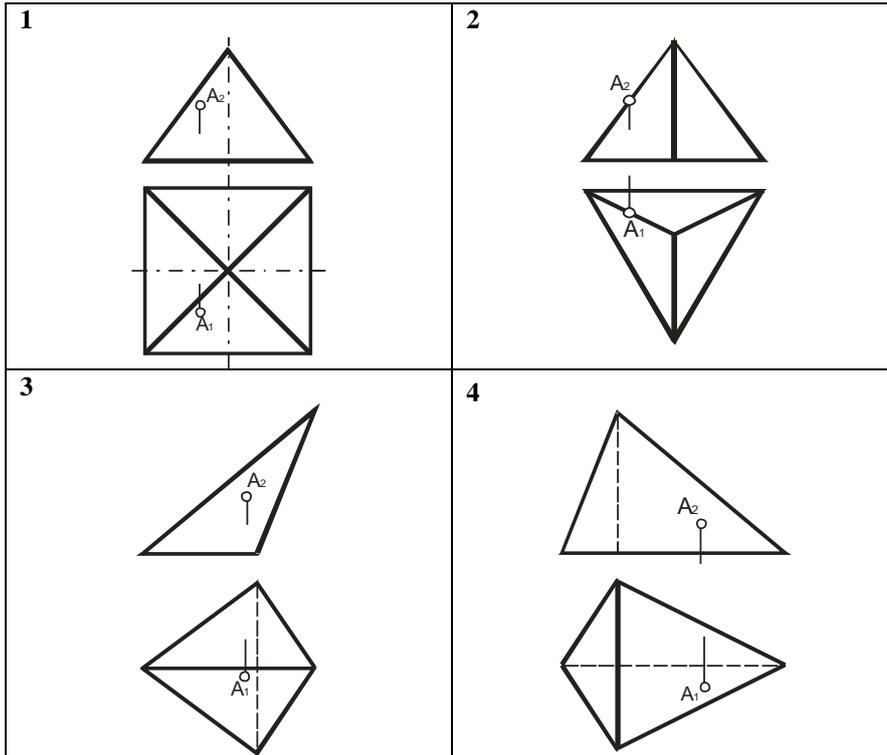


1 – на першому;  
 2 – на другому;  
 3 – на третьому;  
 4 – на четвертому;  
 5 – на всіх правильно.

36



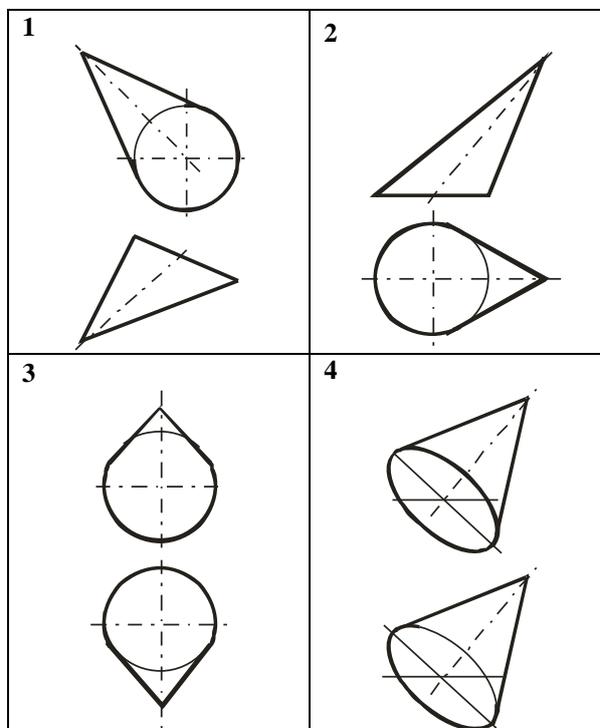
На якому рисунку неправильно побудовані проєкції точки  $A$ , яка належить поверхні піраміди?



37

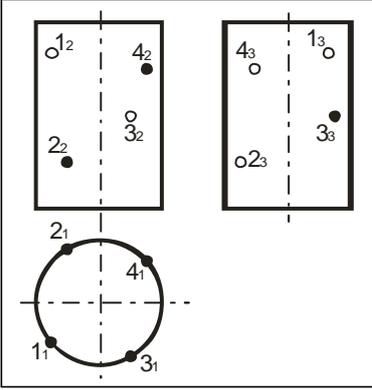
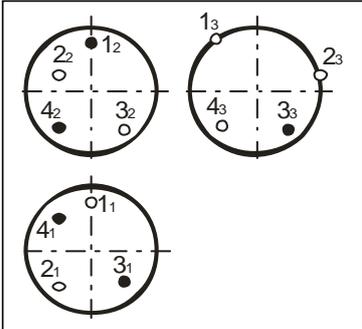
- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – на всіх правильно.

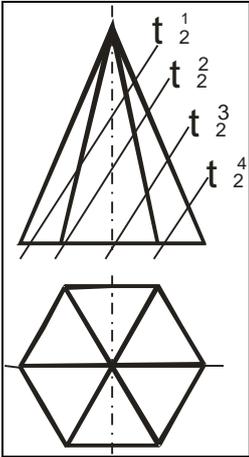
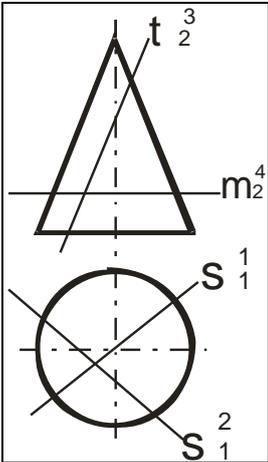
На якому рисунку зображено конус обернання?



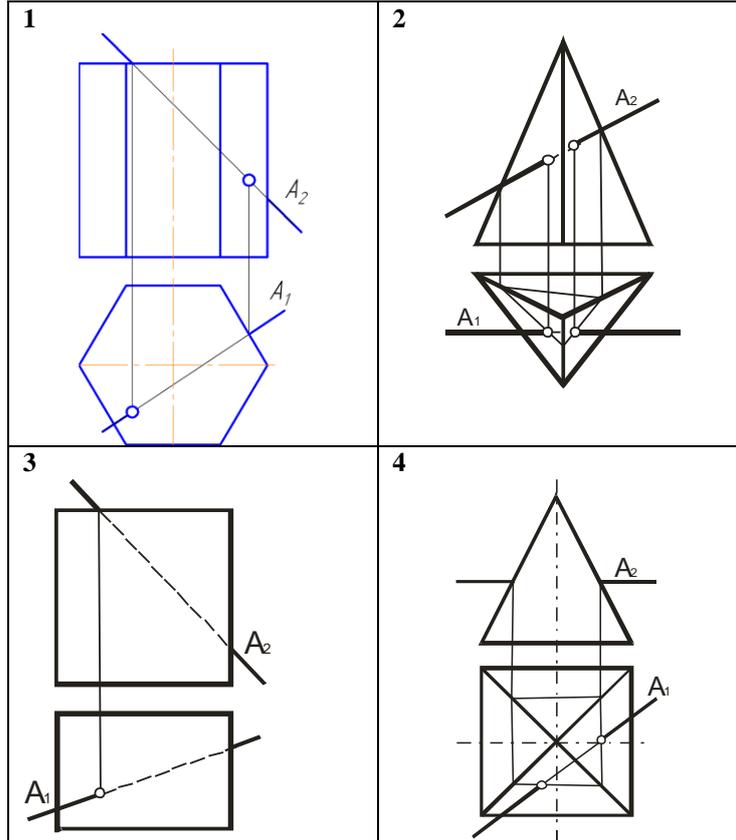
38

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – на всіх рисунках.

39	<p>Прозорими кружечками на кресленіку циліндра позначені видимі проєкції точок, темними – невидимі. Визначити, яка з трьох проєкцій точок побудована неправильно.</p>  <p>1 – 1<sub>3</sub>;  2 – 2<sub>3</sub>;  3 – 3<sub>3</sub>;  4 – 4<sub>3</sub>;  5 – усі правильно.</p>	<input type="checkbox"/>
40	<p>Прозорими кружечками кресленіку кулі позначені видимі проєкції точок, темними – невидимі. Визначити, яка з трьох проєкцій точок побудована неправильно.</p>  <p>1 – 1<sub>3</sub>;  2 – 2<sub>3</sub>;  3 – 3<sub>2</sub>;  4 – 4<sub>1</sub>;  5 – усі правильно.</p>	<input type="checkbox"/>
41	<p>Яку форму має розгортка бічної поверхні прямого конуса обертання з основою, що перпендикулярна до осі конуса?</p> <p>1 – сектор;  2 – трикутник;  3 – сегмент;  4 – прямокутник;  5 – немає правильної відповіді.</p>	<input type="checkbox"/>
42	<p>Чому дорівнює кут сектора розгортки бічної поверхні конуса обертання, якщо радіус основи конуса <math>R</math>, а довжина твірної <math>l</math>?</p> <p>1 – <math>180^\circ R/l</math>;  2 – <math>360^\circ R/l</math>;  3 – <math>360^\circ l/R</math>;  4 – <math>180^\circ l/R</math>;  5 – немає правильної відповіді.</p>	<input type="checkbox"/>

43	<p>Яку найбільшу кількість ребер куба може перетнути одна площина?</p> <p>1 – чотири;  2 – п'ять;  3 – шість;  4 – сім;  5 – немає правильної відповіді.</p>	<input type="checkbox"/>
44	<p>Яка з розтинальних площин утворює в перерізі багатокутник з найбільшою кількістю вершин?</p>  <p>1 – <math>\tau^1</math>;  2 – <math>\tau^2</math>;  3 – <math>\tau^3</math>;  4 – <math>\tau^4</math>;  5 – усі площини утворюють багатокутники з однаковою кількістю вершин.</p>	<input type="checkbox"/>
45	<p>Яка площина перетинає конус по гіперболі?</p>  <p>1 – <math>\sigma^1</math>;  2 – <math>\sigma^2</math>;  3 – <math>\tau^3</math>;  4 – <math>\mu^4</math>;  5 – жодна з них.</p>	<input type="checkbox"/>

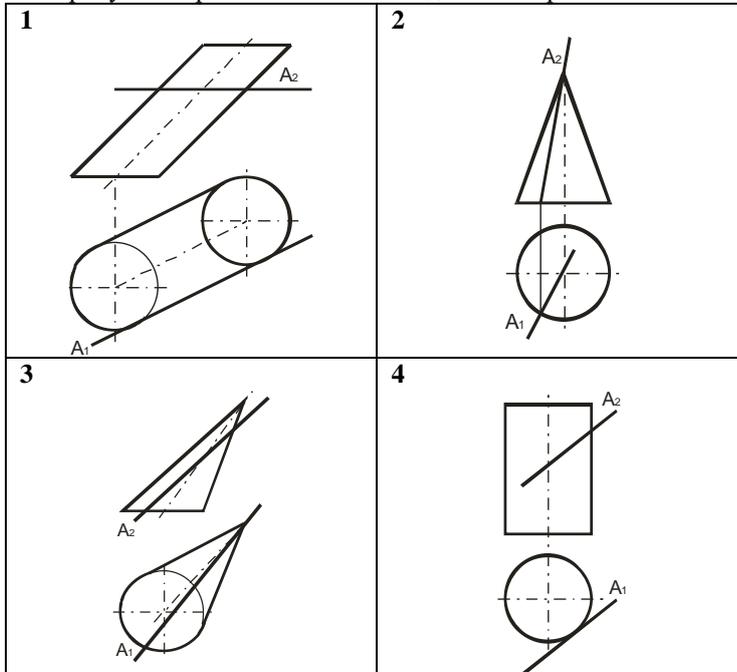
На якому рисунку неправильно визначено точку перетину прямої  $A$  з поверхнею багатогранника?



46

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – на всіх рисунках правильно.

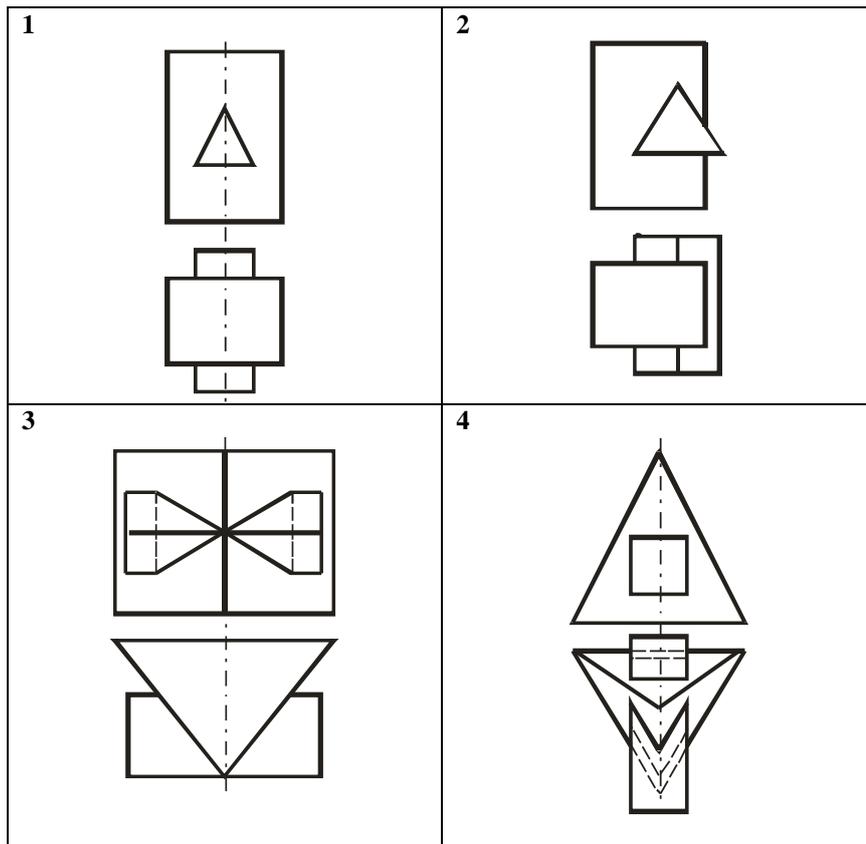
На яких рисунках пряма  $A$  лежить на заданій поверхні?



47

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з них.

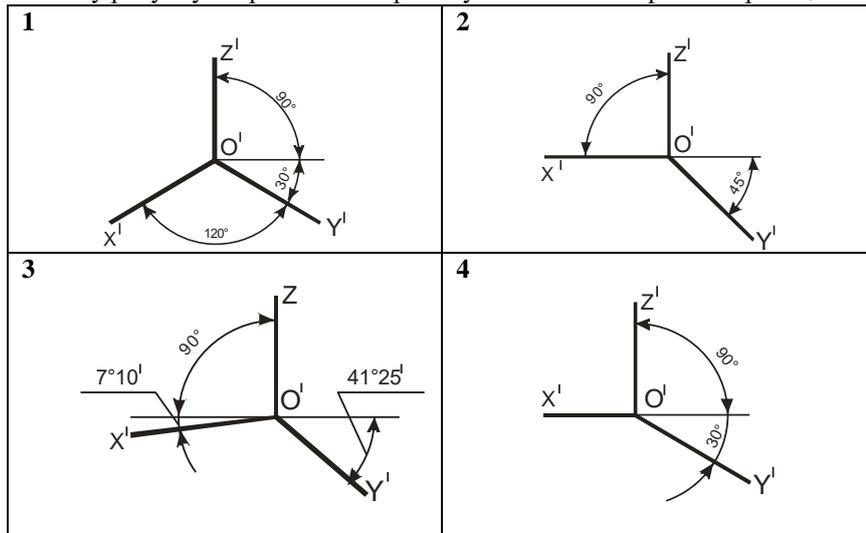
На якому рисунку зображені багатогранники, що перетинаються по одній замкненій лінії?



48

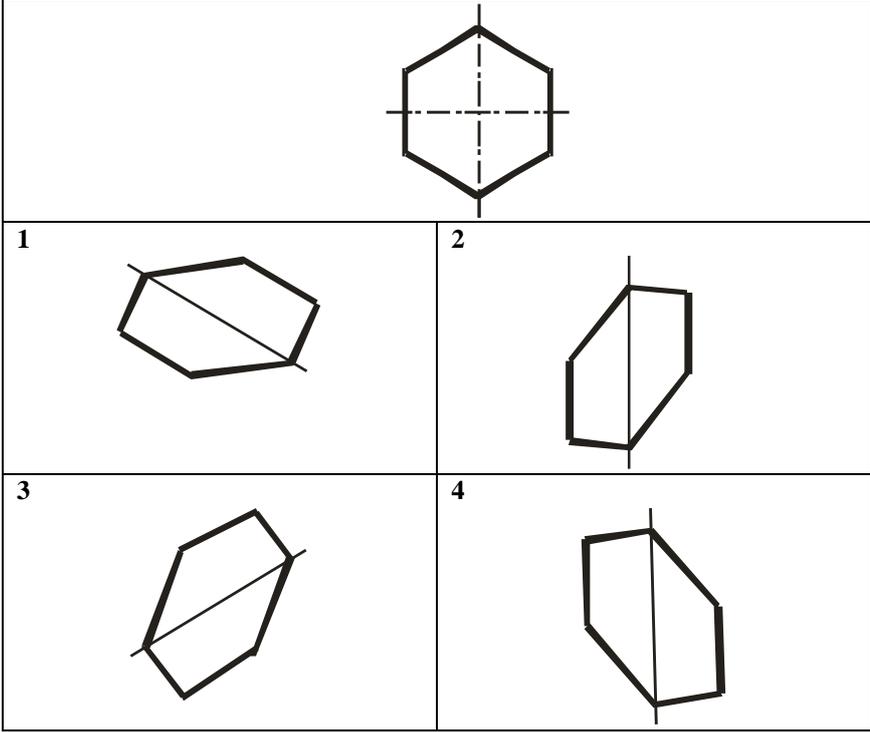
- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з них.

На якому рисунку зображені вісі прямокутної аксонометричної проєкції?

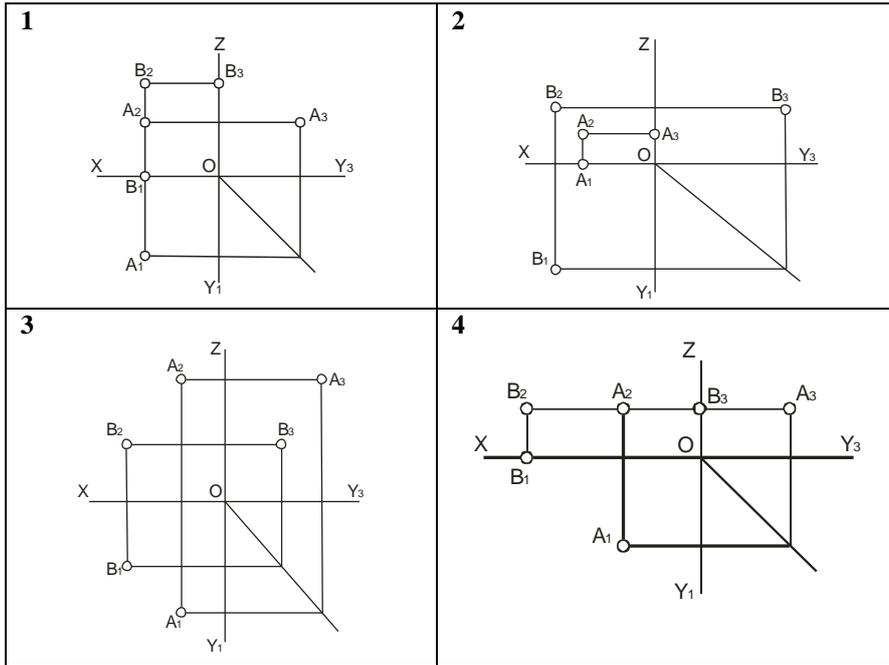


49

- 1 – на першому;
- 2 – на другому і четвертому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на першому і третьому;
- 5 – на всіх.

50	<p>Яке ізометричне зображення багатокутника відповідає заданому в ортогональній проекції при розташуванні його паралельно площині <math>\Pi_2</math>?</p>  <p>1 – перше; 2 – друге; 3 – третє; 4 – четверте; 5 – жодне з них.</p>	
<b>II рівень</b> (75 балів, коефіцієнти: $P_{ск.} - 1,0$ ; $P_{зн.} - 0,8$ )		
51	<p>Який октант симетричний першому відносно горизонтальної площини проєкцій?</p> <p>1 – другий; 2 – третій; 3 – четвертий; 4 – п'ятий; 5 – шостий;</p>	
52	<p>Де розташована точка відносно площин проєкцій з координатами – <math>X \neq 0</math>; <math>Y = 0</math>; <math>Z \neq 0</math>?</p> <p>1 – у площині <math>\Pi_1</math>; 2 – у площині <math>\Pi_2</math>; 3 – у площині <math>\Pi_3</math>; 4 – у просторі; 5 – на осі <math>OX</math>;</p>	
53	<p>В яких октантах простору координата <math>Z</math> точки позитивна?</p> <p>1 – в першому – другому – п'ятому – шостому; 2 – в другому – третьому – четвертому – п'ятому; 3 – в першому – другому – четвертому – п'ятому; 4 – в третьому – четвертому – п'ятому – шостому; 5 – в першому – другому – четвертому – шостому;</p>	

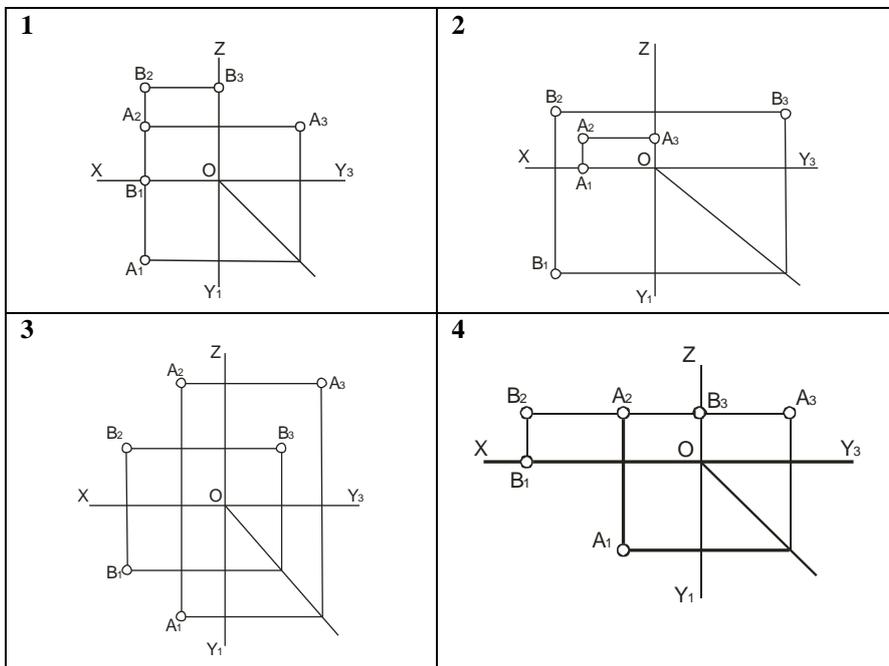
На якому рисунку в точки  $A$  і  $B$  однакова координата  $X$ ?



54

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

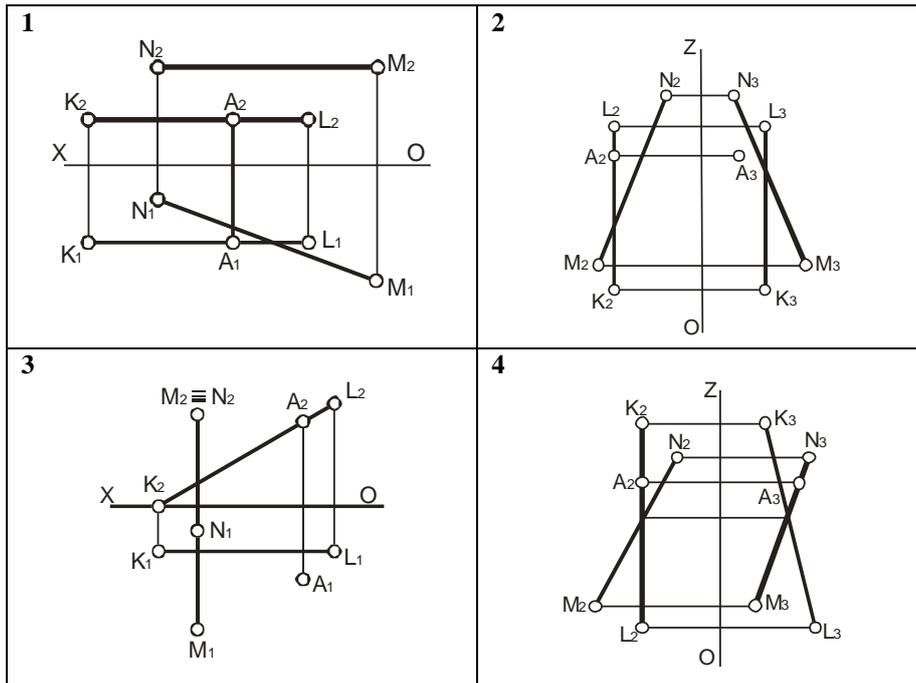
На якому рисунку координата  $Y$  точки  $A$  дорівнює нулю?



55

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

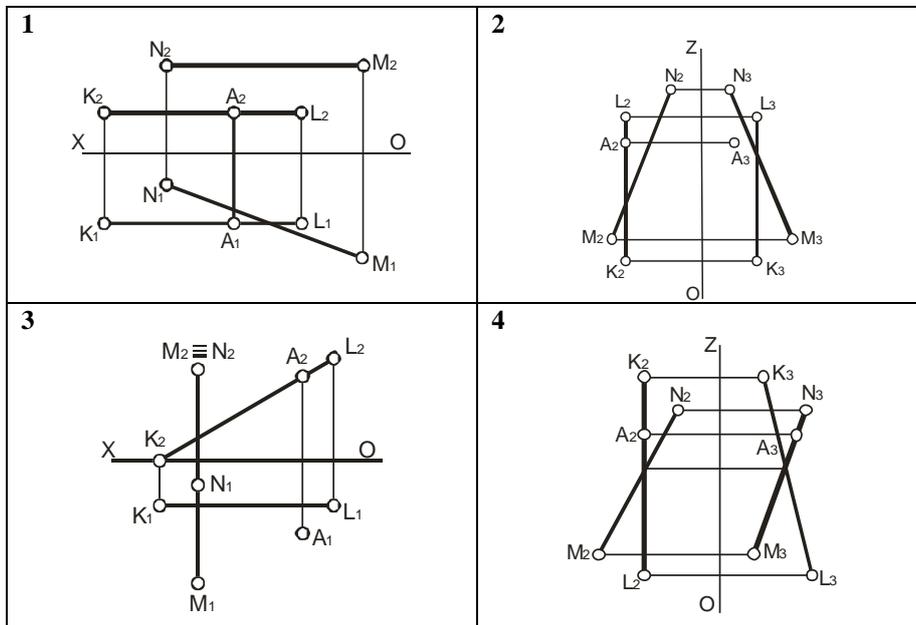
На якому рисунку зображено відрізок фронтально-проеційвального положення?



56

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

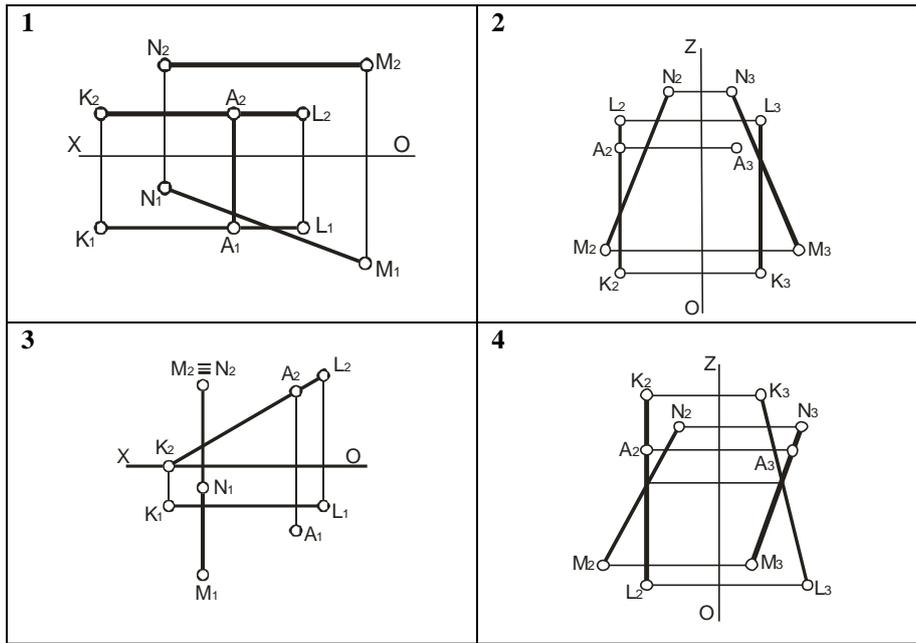
На якому рисунку відрізок *KL* є фронтальною прямою?



57

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

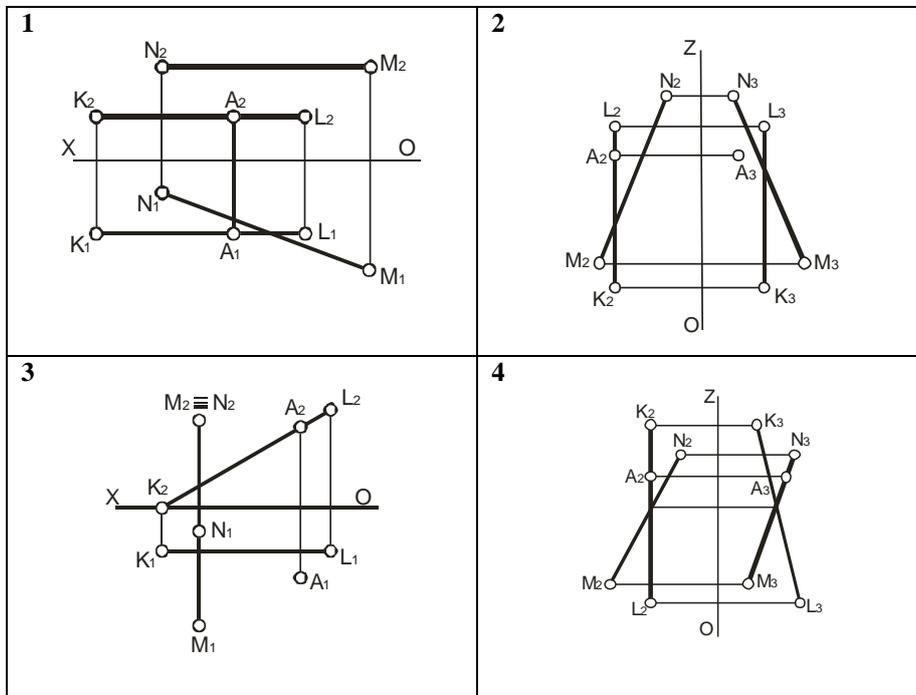
На якому рисунку відрізок *KL* є профільно-проекційвального положення?



58

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

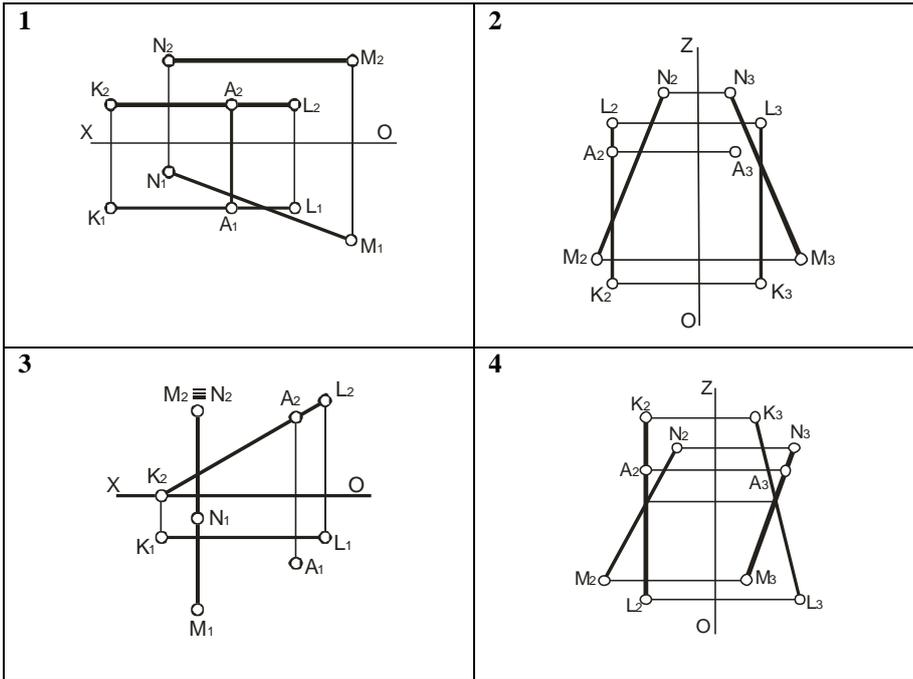
На якому рисунку відрізок *KL* торкається горизонтальної площини проєкцій?



59

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

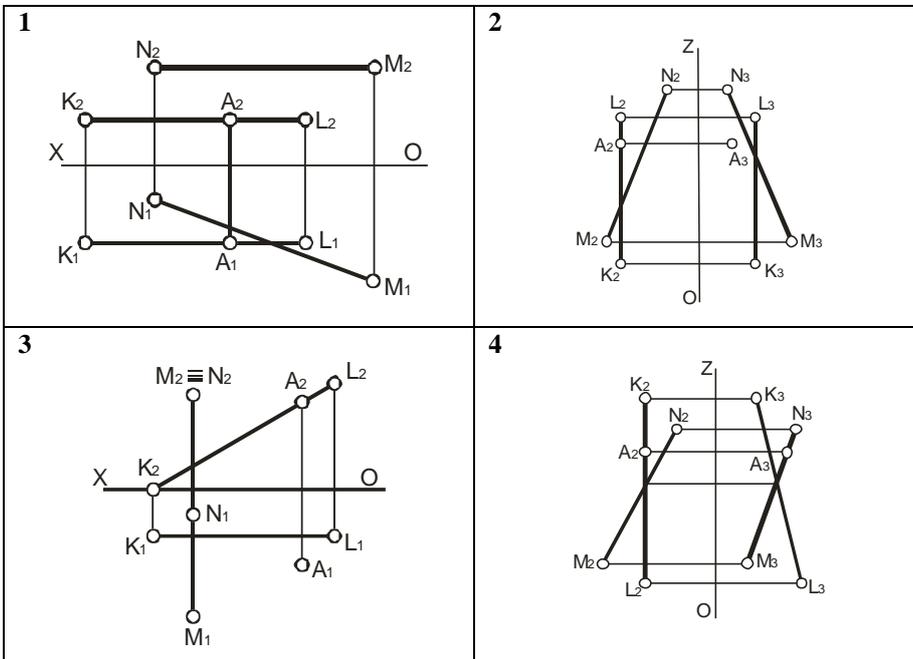
На якому рисунку точка  $A$  знаходиться перед відрізком  $KL$ ?



60

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

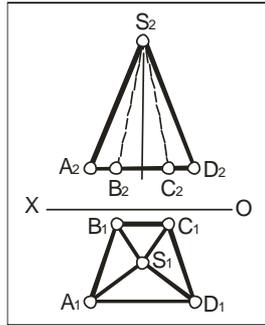
На якому рисунку точка  $A$  належить відрізку  $KL$  ?



61

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

Скільки ребер піраміди є ребрами загального положення?

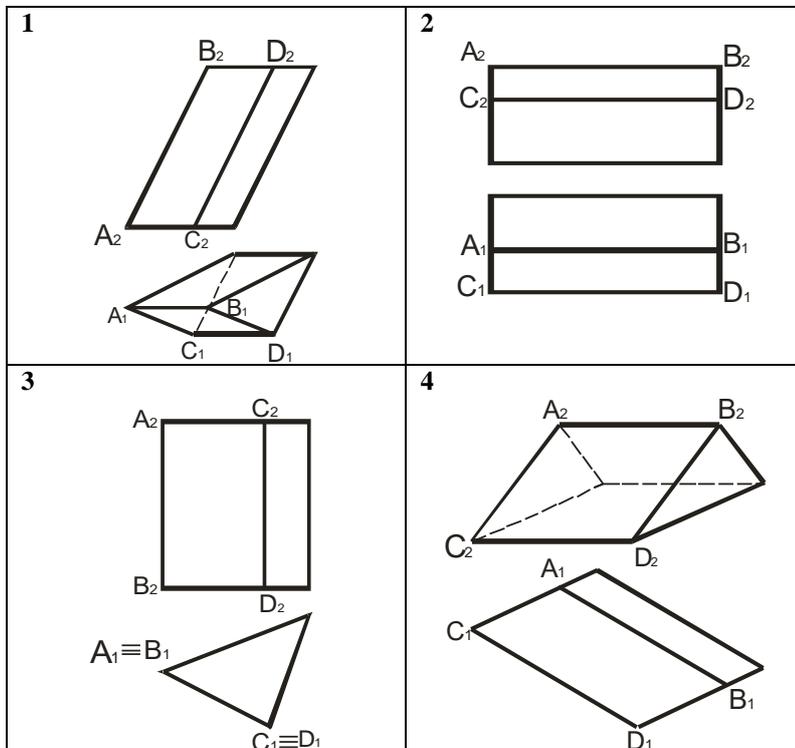


62

- 1 – 3;
- 2 – 4;
- 3 – 5;
- 4 – 6;
- 5 – 8.



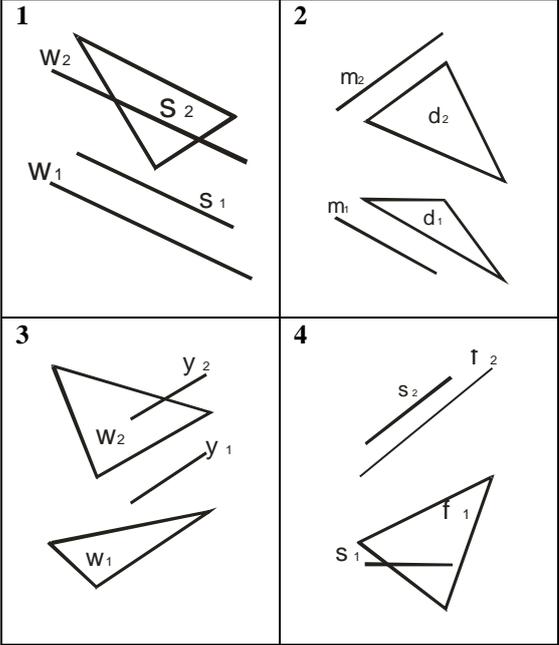
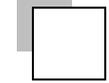
На якому рисунку відстань між паралельними ребрами призми  $AB$  і  $CD$  спроектувалась в дійсну величину?



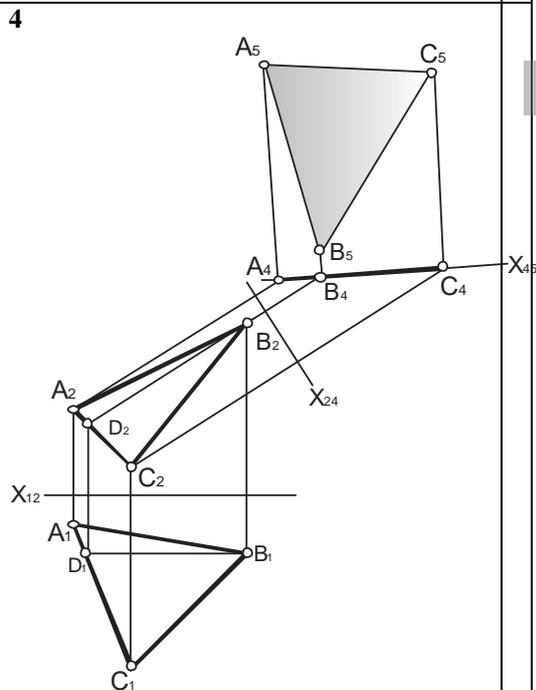
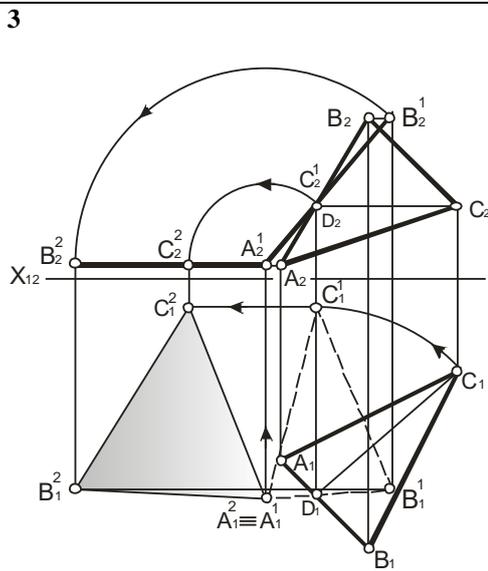
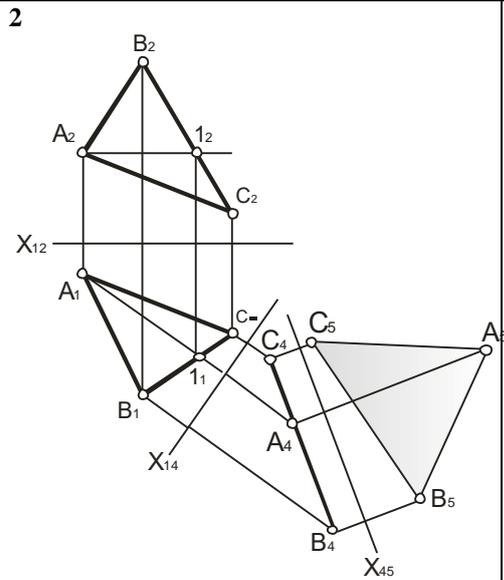
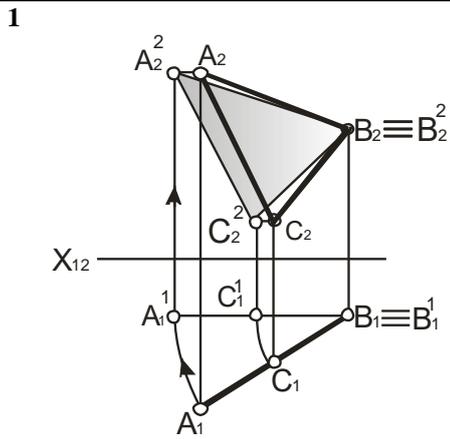
63

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.



64	<p>На якому рисунку задана пряма не паралельна площині?</p>  <p>1 – на першому;  2 – на другому;  3 – на третьому;  4 – на четвертому;  5 – на всіх рисунках.</p>	
65	<p>Які побудови необхідно виконати щоб визначити лінію перетину двох площин загального положення?</p> <p>1 – необхідно побудувати будь-які дві точки, кожна з яких належить обом площинам;  2 – необхідно взяти на одній з площин дві будь-які прямі і побудувати точки перетину їх з іншою площиною;  3 – необхідно побудувати сліди прямих, однієї площини з іншою площиною;  4 – необхідно визначити точки перетину сторін однієї площини з іншою площиною за допомогою допоміжної площини;  5 – необхідно узяти на одній з площин дві будь-які прямі і побудувати точки перетину їх з іншою площиною за допомогою допоміжних площин.</p>	
66	<p>Які побудови необхідно здійснити щоб побудувати пряму, яка б була перпендикулярна до заданої площини?</p> <p>1 – необхідно побудувати в даній площині прямі рівня і провести до них будь-які прямі;  2 – необхідно взяти в цій площині прямі, які паралельні площинам проєкцій і провести перпендикуляри до цих прямих;  3 – необхідно побудувати в даній площині прямі рівня (горизонталь, фронталь) і провести прямі так, щоб горизонтальна проєкція прямої була перпендикулярна до горизонталі, а фронтальна проєкція прямої до фронталі;  4 – необхідно побудувати в даній площині горизонталь і фронталь, а потім провести до них перпендикуляри;  5 – необхідно спроекціювати прямий кут в дійсну величину на одну з площин проєкцій.</p>	

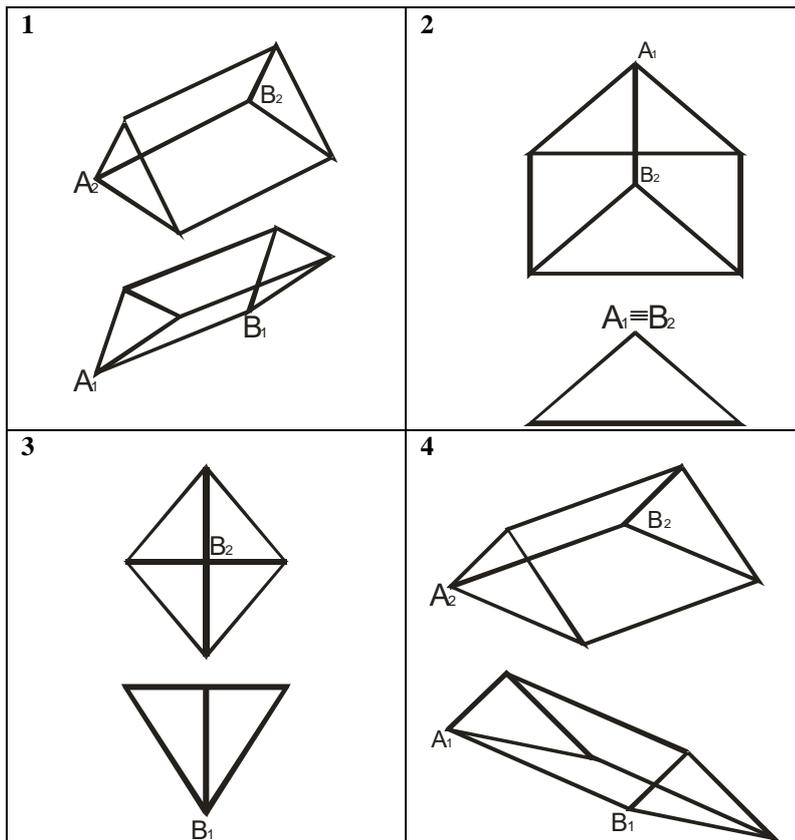
Встановити якими методами розв'язано задачі на рисунках – 1–4?



67

- 1 – 1 – методом обертання; 2 – методом заміни площин проєкцій; 3 – методом плоскопаралельного переміщення; 4 – методом заміни площин проєкцій;  
 2 – 1 – методом обертання; 2 – методом плоскопаралельного переміщення; 3 – методом обертання; 4 – методом заміни площин проєкцій;  
 3 – 1 – методом суміщення; 2 – методом плоскопаралельного переміщення; 3 – методом обертання; 4 – методом заміни площин проєкцій;  
 4 – 1 – методом обертання; 2 – методом заміни площин проєкцій; 3 – методом обертання; 4 – методом заміни площин проєкцій;  
 5 – 1 – методом суміщення; 2 – методом заміни площин проєкцій; 3 – методом обертання; 4 – методом плоскопаралельного переміщення.

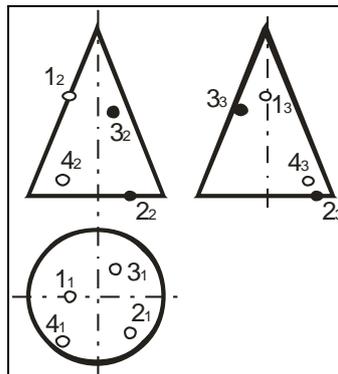
На якому рисунку вершина  $B$  багатогранника невидима при проєкціюванні на фронтальну площину проєкцій  $\Pi_2$  (видимість ребер на креслениках не показано)?



- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – на всіх видима.

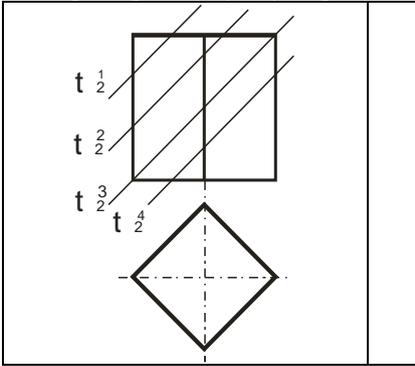
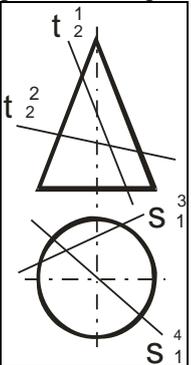
68

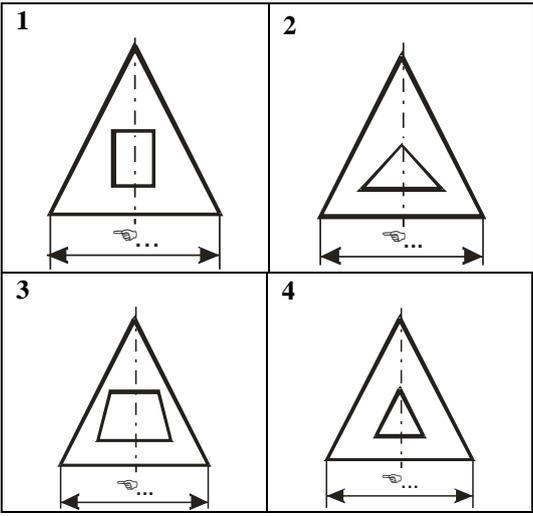
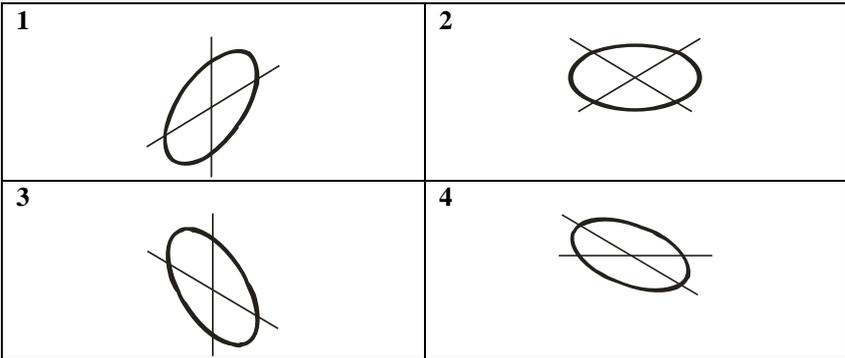
Прозорими кружечками на кресленику конуса позначені видимі проєкції точок, темними – невидимі. Визначити, яка з трьох проєкцій точок побудована неправильно.



- 1 – 1<sub>1</sub>;
- 2 – 2<sub>1</sub>;
- 3 – 3<sub>1</sub>;
- 4 – 4<sub>1</sub>;
- 5 – усі правильно.

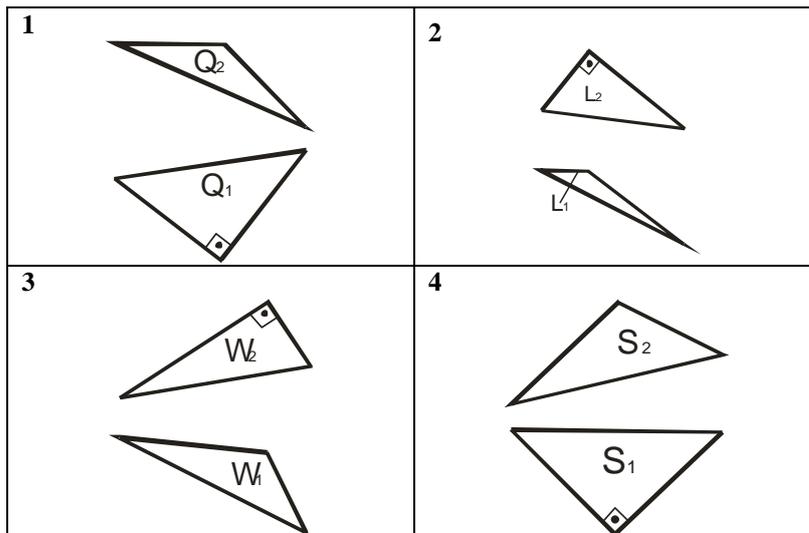
69

70	<p>Яка фігура утворюється в перерізі трикутної призми розтинальною площиною, яка перетинає два бічних ребра і трикутник основи?</p> <p>1 – прямокутник;  2 – трикутник;  3 – чотирикутник;  4 – шестикутник;  5 – немає правильної відповіді.</p>	
71	<p>Яка зі зазначених площин при перетині куба утворює чотирикутник?</p>  <p>1 – <math>\tau^1</math>;  2 – <math>\tau^2</math>;  3 – <math>\tau^3</math>;  4 – <math>\tau^4</math>;  5 – усі площини.</p>	
72	<p>Яка площина перетинає конус обертання по параболі?</p>  <p>1 – <math>\tau^1</math>;  2 – <math>\tau^2</math>;  3 – <math>\sigma^3</math>;  4 – <math>\sigma^4</math>;  5 – жодна з них.</p>	
73	<p>Яка форма перерізу утвориться, якщо конус обертання перетнути площиною, що перетинає усі твірні конуса?</p> <p>1 – трикутник;  2 – парабола;  3 – еліпс;  4 – гіпербола;  5 – немає правильної відповіді</p>	

74	<p>На якому рисунку лінії перетину конуса з фронтально-проекціовальною призмою утворюються з частин гіперболи і кола?</p>  <p>1 – на першому; 2 – на другому; 3 – на третьому; 4 – на четвертому; 5 – ні на жодному з них.</p>	<input type="checkbox"/>
75	<p>Встановити яке ізометричне зображення кола відповідає розташуванню його в площині <math>\Pi_2</math>?</p>  <p>1 – перше 2 – друге; 3 – третє; 4 – четверте; 5 – жодне з них.</p>	<input type="checkbox"/>
<b>III рівень (100 балів, коефіцієнти: <math>P_{ск.} - 1,25; P_{зн.} - 1,0</math>)</b>		
76	<p>Які октанти розташовані над горизонтальною площиною проєкцій?</p> <p>1 – перший – другий – п'ятий – шостий; 2 – перший – третій – четвертий – п'ятий; 3 – перший – другий – четвертий – п'ятий; 4 – перший – четвертий – п'ятий – шостий; 5 – перший – другий – четвертий – шостий;</p>	<input type="checkbox"/>
77	<p>В яких октантах простору координата <math>Y</math> точки відмінна?</p> <p>1 – в першому – другому – п'ятому – шостому; 2 – в другому – третьому – шостому – сьомому; 3 – в третьому – четвертому – п'ятому – шостому; 4 – в третьому – четвертому – сьомому – восьмому; 5 – в першому – другому – четвертому – шостому.</p>	<input type="checkbox"/>

78	<p>На якому рисунку відрізок <b>KL</b> спроекціється на фронтальну площину в натуральну величину?</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 45%;"> <p><b>1</b></p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 45%;"> <p><b>2</b></p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 45%;"> <p><b>3</b></p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 45%;"> <p><b>4</b></p> </div> </div> <p>1 – на першому;  2 – на другому;  3 – на третьому;  4 – на четвертому;  5 – ні на жодному з рисунків.</p>	<input style="width: 50px; height: 50px; border: 1px solid gray;" type="checkbox"/>
79	<p>Які побудови необхідно здійснити щоб визначити горизонтальний слід прямої?</p> <p>1 – необхідно продовжити пряму до перетину з площиною <math>\Pi_1</math>;  2 – необхідно продовжити пряму до перетину з площиною <math>\Pi_2</math>;  3 – необхідно продовжити горизонтальну проекцію прямої до перетину з віссю <math>OX</math> і опустити перпендикуляр на продовження фронтальної проекції прямої;  4 – необхідно продовжити фронтальну проекцію прямої до перетину з продовженням горизонтальної проекції;  5 – необхідно продовжити фронтальну проекцію прямої до перетину з віссю <math>OX</math> і опустити перпендикуляр на продовження горизонтальної проекції прямої.</p>	<input style="width: 50px; height: 50px; border: 1px solid gray;" type="checkbox"/>
80	<p>На якому плоскому відсіку є найбільше число сторін, що спроекціювались у дійсну величину?</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 45%;"> <p><b>1</b></p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 45%;"> <p><b>2</b></p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 45%;"> <p><b>3</b></p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 45%;"> <p><b>4</b></p> </div> </div> <p>1 – на першому;  2 – на другому;  3 – на третьому;  4 – на четвертому;  5 – на всіх однаково.</p>	<input style="width: 50px; height: 50px; border: 1px solid gray;" type="checkbox"/>

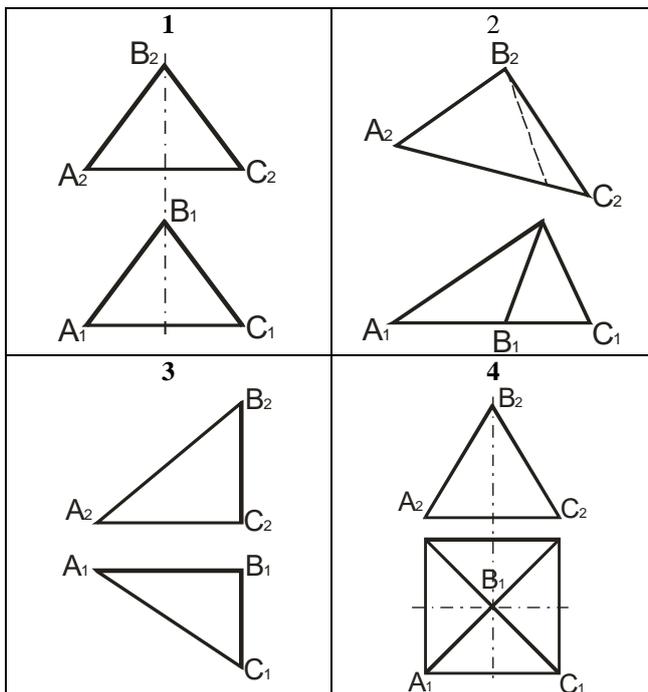
На якому рисунку є лінія найбільшого скату площини?



81

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

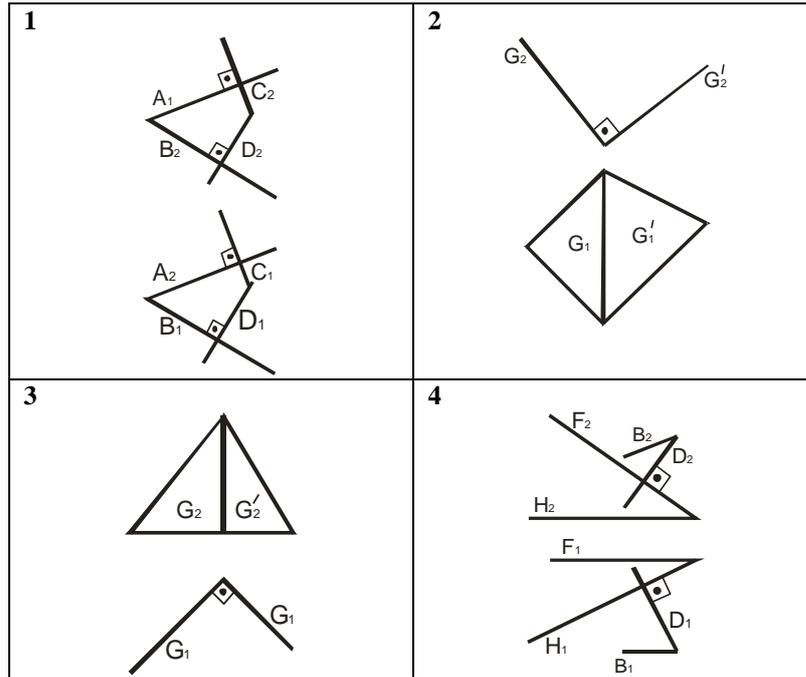
На якому рисунку кут між ребрами  $AB$  і  $BC$ , що перетинаються буде проєкціюватись у дійсну величину?



82

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

На якому рисунку задані площини не перпендикулярні між собою?

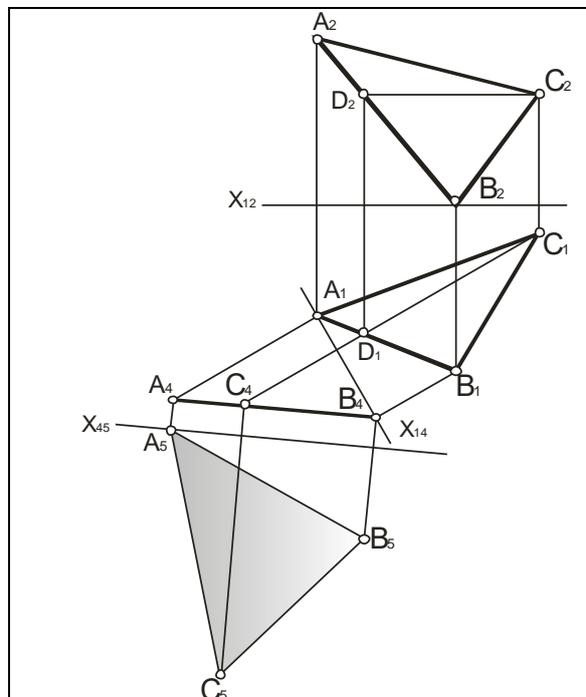


- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з рисунків.

83



Як розв'язана задача, що зображена на рисунку?



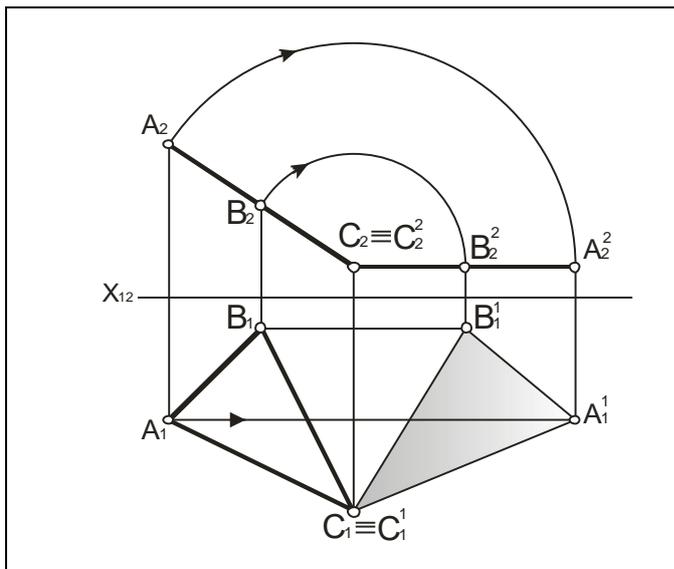
- 1 – заміною площини проєкцій  $\Pi_2$ ;
- 2 – заміною площини проєкцій  $\Pi_1$ ;
- 3 – послідовною заміною площини  $\Pi_1$ , а потім  $\Pi_2$ ;
- 4 – послідовною заміною площини  $\Pi_2$ , а потім  $\Pi_4$ ;
- 5 – немає правильної відповіді.

84



Як розв'язана задача, що зображена на рисунку?

85

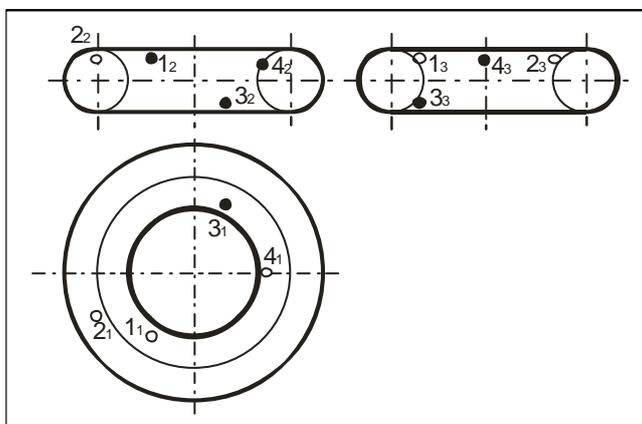


- 1 – обертанням трикутника ABC навколо осі  $\perp \Pi_2$ ;
- 2 – обертанням трикутника ABC навколо осі  $\perp \Pi_1$ ;
- 3 – послідовним обертанням трикутника навколо осі  $\perp \Pi_1$ , а потім – навколо осі  $\perp \Pi_2$ ;
- 4 – послідовним обертанням трикутника навколо осі  $\perp \Pi_2$ , а потім – навколо осі  $\perp \Pi_1$ ;
- 5 – обертанням площини  $\Pi_1$  навколо площини  $\Pi_2$ .



Прозорими кружечками на кресленку відкритого тора (кільце) позначені видимі проєкції точок, темними – невидимі. Визначити, яка з трьох проєкцій точок побудована неправильно.

86



- 1 – 1<sub>1</sub>;
- 2 – 2<sub>3</sub>;
- 3 – 3<sub>2</sub>;
- 4 – 4<sub>1</sub>;
- 5 – усі правильно.



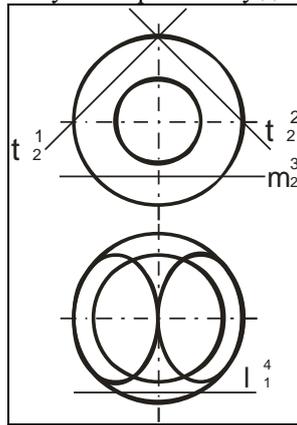
Суцільними основними лініями на кресленку похилого конуса позначені видимі проєкції ліній, штриховими – невидимі. Визначити, яка з трьох проєкцій ліній побудована неправильно.

87



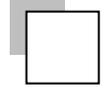
	<p>1 – 1<sub>3</sub>; 2 – 2<sub>3</sub>; 3 – 3<sub>1</sub>; 4 – 4<sub>1</sub>; 5 – усі правильно.</p>	
88	<p>Яка фігура утворюється в перерізі чотирикутної піраміди розтинальною площиною, яка перетинає три бічних ребра і чотирикутник основи?</p> <p>1 – трикутник; 2 – чотирикутник; 3 – п'ятикутник; 4 – шестикутник; 5 – немає правильної відповіді.</p>	
89	<p>Яка точка розташована до спостерігача ближче за всі при протилежному проєкціюванні фігури перерізу на фронтальну площину проєкцій <math>\Pi_2</math>, при вигляді спереду?</p> <p>1 – 1; 2 – 2; 3 – 3; 4 – 4; 5 – усі однаково.</p>	
90	<p>Яка фігура перерізу утворюється в тому випадку, коли циліндр обертання буде перетинати площина, яка похила до його осі та всі твірні циліндра приймають участь в перерізі?</p> <p>1 – коло; 2 – прямокутник; 3 – частина еліпсу, обмеженого прямою; 4 – еліпс; 5 – немає правильної відповіді.</p>	

Якою площиною, при перетині кулі на кресленку допустились помилки?

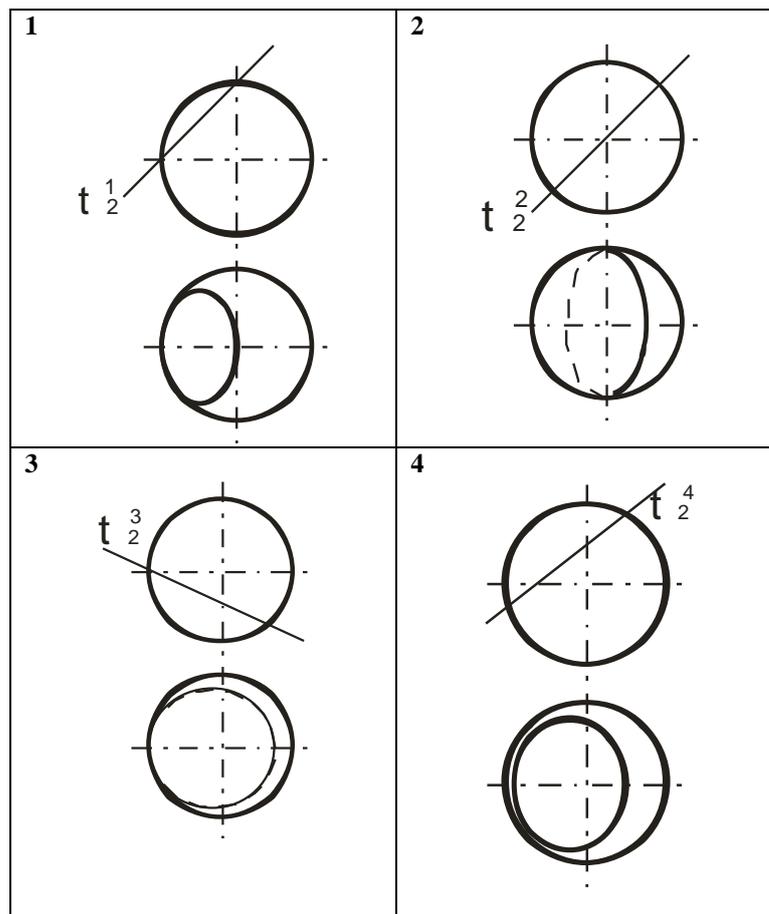


91

- 1 –  $\tau^1$ ;
- 2 –  $\tau^2$ ;
- 3 –  $\mu^3$ ;
- 4 –  $\lambda^4$ ;
- 5 – усі побудовано правильно

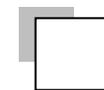


На якому рисунку переріз кулі побудовано неправильно?

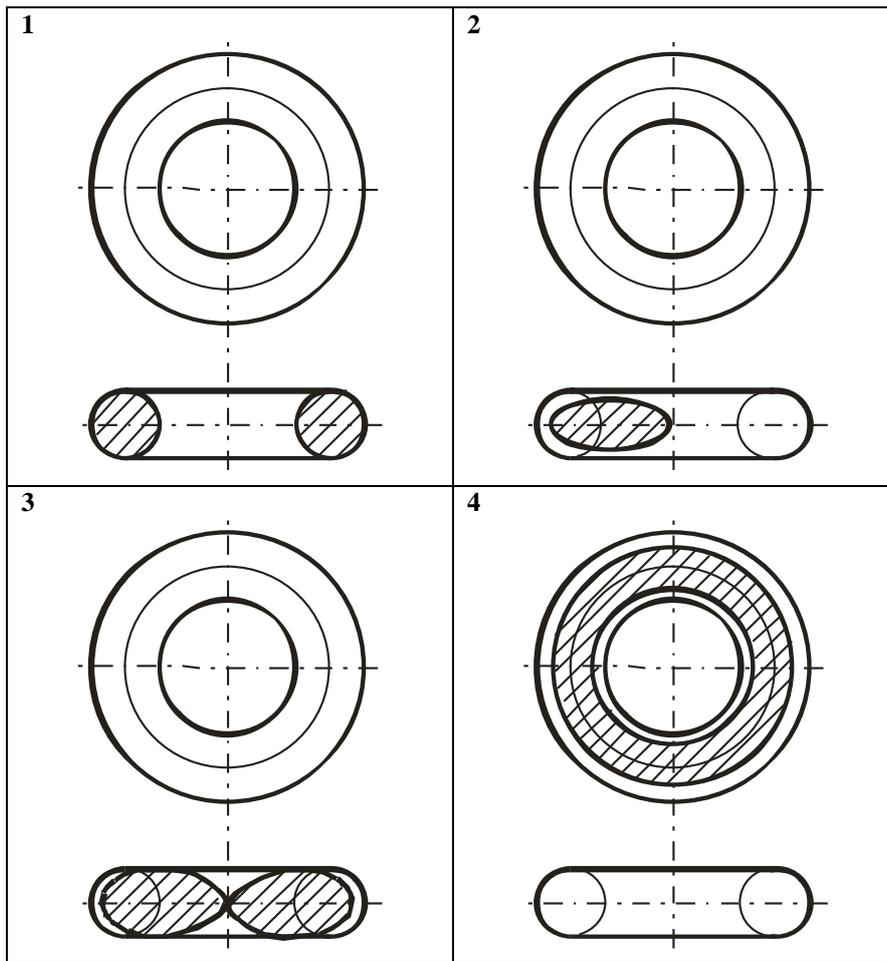


92

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – на всіх рисунках правильно



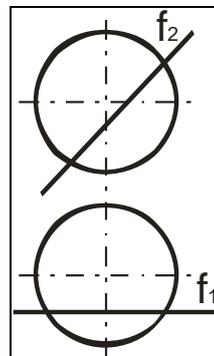
На якому рисунку виконано переріз тора похилою фронтально-проекціовальною площиною (проекції розтинальних площин не показані)?



- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з них.

93

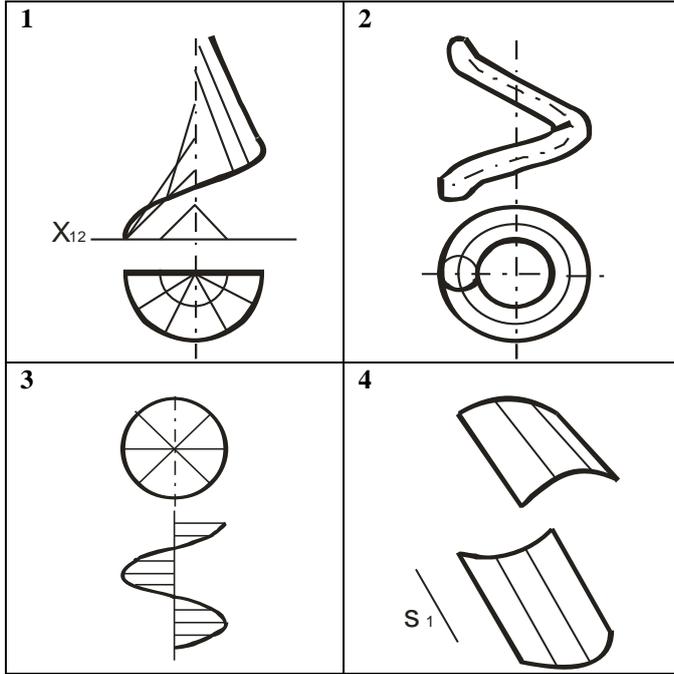
За допомогою якої розтинальної площини необхідно розв'язати задачу на перетин фронтальної прямої з поверхнею кулі?



- 1 – загального положення;
- 2 – горизонтальної;
- 3 – фронтальної;
- 4 – профільної;
- 5 – немає значення, будь-якою.

94

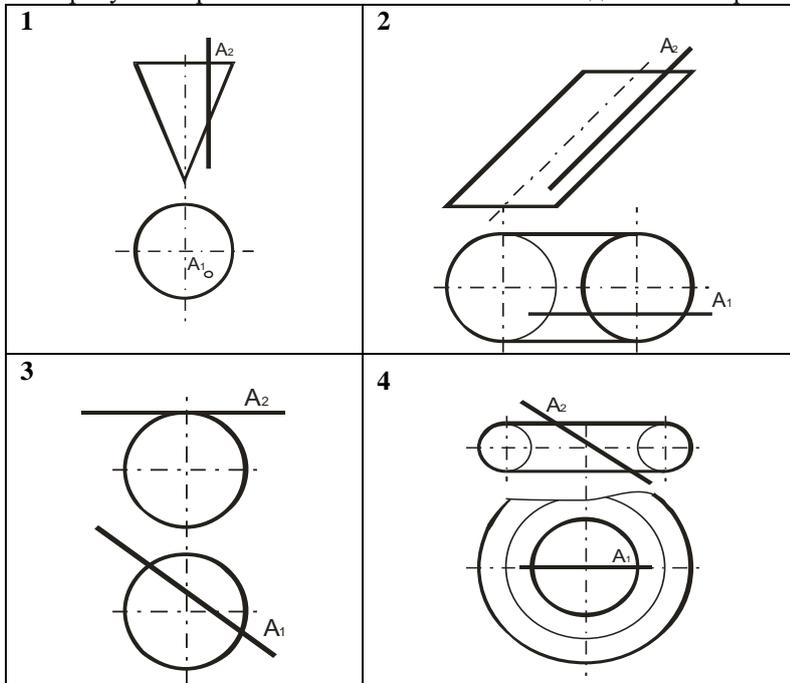
Які криві поверхні зображені на рисунках?



95

- 1 – 1 – гвинтовий циліндроїд 2 – еліпсоїд; 3 – косий гелікоїд, 4 – циліндрична поверхня;  
 2 – 1 – гвинтовий коноїд, гелікоїдальний циліндр, 3 – циліндрична гвинтова, 4 – коса площина;  
 3 – 1 – косий гелікоїд, 2 – гелікоїдальний циліндр, 3 – циліндрична гвинтова, 4 – лінійчата поверхня;  
 4 – 1 – прямий гелікоїд, 2 – гіперболоїд, 3 – циліндрична гвинтова, 4 – лінійчата поверхня;;  
 5 – 1 – гвинтова, 2 – гелікоїдальний циліндр, 3 – прямий гелікоїд, 4 – циліндрична.

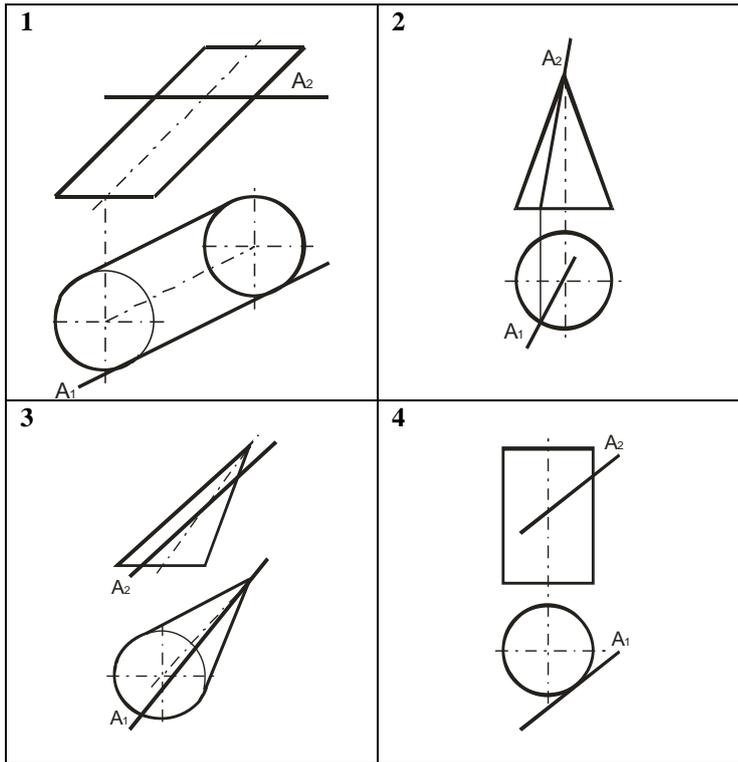
На яких рисунках пряма  $A$  не має спільних точок із заданими поверхнями?



96

- 1 – на першому;  
 2 – на другому;  
 3 – на третьому;  
 4 – на четвертому;  
 5 – ні на жодному з рисунків.

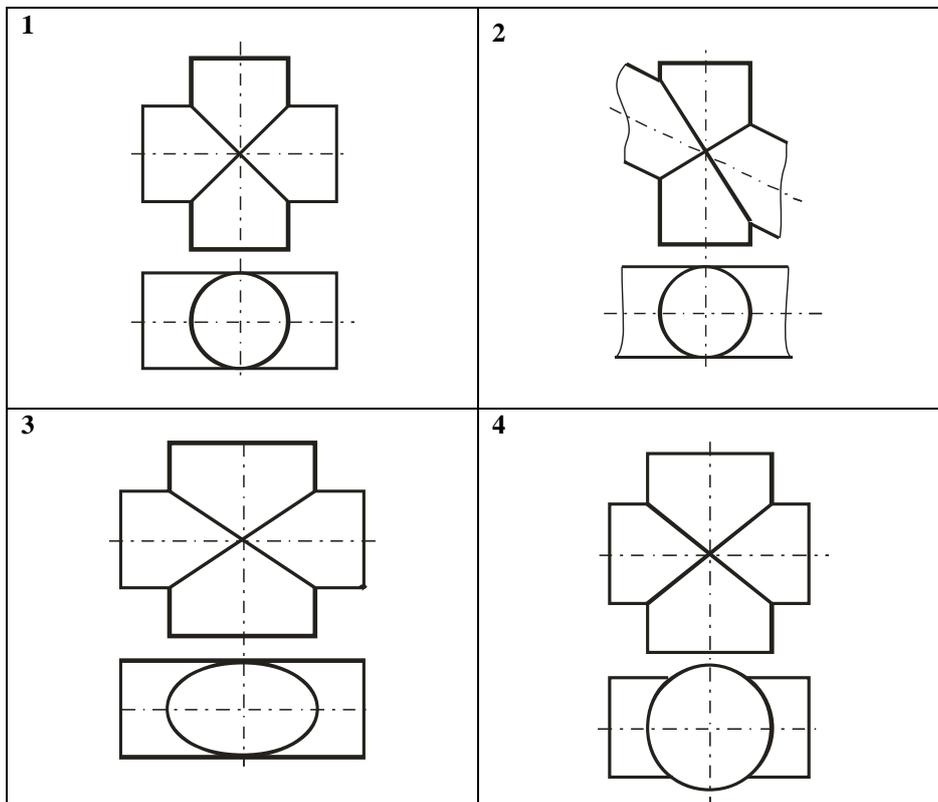
На якому рисунку пряма  $A$  перетинає задану поверхню?



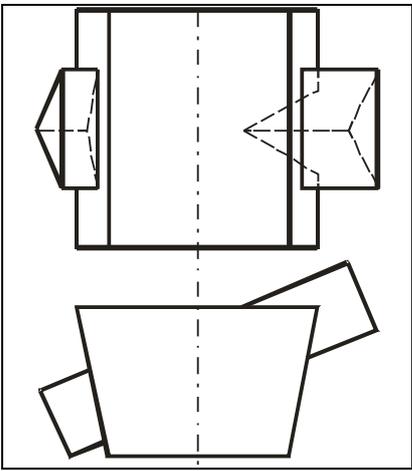
97

- 1 – на першому;
- 2 – на другому;
- 3 – на третьому;
- 4 – на четвертому;
- 5 – ні на жодному з них.

При розв'язуванні якої задачі помилково використано теорему Г.Монжа, про перетин поверхонь другого порядку по плоским кривим?



98

	<p>1 – на першому;  2 – на другому;  3 – на третьому;  4 – на четвертому;  5 – ні на жодному з них.</p>	
99	<p>Скільки окремих ділянок лінії взаємного перетину призм буде невидимими при проєкціюванні на площину <math>\Pi_2</math>?</p>  <p>1 – чотири;  2 – шість;  3 – дві;  4 – п'ять;  5 – немає правильної відповіді.</p>	<input type="checkbox"/>
100	<p>Який з приведених коефіцієнтів є показником спотворення в прямокутній ізометричній проєкції?</p> <p>1 – 0,94;  2 – 0,5;  3 – 0,47;  4 – 0,82;  5 – немає правильної відповіді.</p>	<input type="checkbox"/>

### Рекомендована література

1. Арустамов Х. А. Сборник задач по начертательной геометрии / Х. А. Арустамов. – М. : Машиностроение, 1971. – 376 с.
2. Бубенников А. В. Начертательная геометрия : учеб. для вузов. – / А. В. Бубенников, М. Я. Громов. – [изд. 2-е]. – М. : Высшая школа, 1973. – 412 с.
3. Гордон В. О. Курс начертательной геометрии / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский. – М. : Наука, 1988. – 272 с.
4. Збірник задач з інженерної та комп'ютерної графіки: навч. посіб. / [В. Є. Михайленко, В. М. Найдиш, А. М. Підкоритов, І. А. Скидан]; за ред. В. Є. Михайленка. – К. : Вища шк., 2003. – 159 с.
5. Локтев О. В. Задачник по начертательной геометрии: учеб. пос. для втузов / О. В. Локтев, П. А. Числов. – [3-е изд., испр.]. – М.: Высш. шк., 1999. – 104 с.
6. Нарисна геометрія: Підручник / В. Є. Михайленко, М. Ф. Євстіфеев, С. М. Ковальов, О. В. Кашенко; за ред. В. Є. Михайленка. – [2-ге вид., перероб.]. – К. : Вища шк., 2004. – 303 с.
7. Нарисна геометрія: навч. посібник / [Антонович Є. А., Василичин Я. В., Фольта О. В. та ін.]; за ред. проф. Є.А. Антоновича. – Львів: Світ, 2004. – 528 с.
8. Начертательная геометрия: учеб. для вузов; под ред. Н. Н. Крылова. – М. : Высшая школа, 1990. – 240 с.
9. Пеклич В. А. Задачи по начертательной геометрии: учеб. пособие для втузов / В. А. Пеклич, С. Н. Павленко. – М. : Высш. шк., 1999. – 139 с.
10. Райковська Г. О. Нарисна геометрія та інженерна графіка : навч. посібник / Г. О. Райковська. – Житомир : ЖДТУ, 2008. – 292 с.
11. Фролов С. А. Начертательная геометрия / С. А. Фролов. – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.
12. Чекмарев А. А. Начертательная геометрия и черчение / А. А. Чекмарев. – М. : Просвещение, 1987. – 400 с.

## ПОКАЖЧИК

### А

АксонOMETричні проєкції 80

### Б

Багатогранники 66

### В

Взаємне положення двох прямих 29

Визначення довжини відрізка прямої 30

Визначення довжини просторової кривої лінії 56

Визначення кутів нахилу відрізка до площин проєкцій 30

Відсік площини 33

### Г

Гвинтові лінії 59

Геометричні об'єкти 15

Головні лінії площини 37

### Д

Ділення відрізка в заданому відношенні 29

### К

Конічні перерізи 69

Конкуруючі точки 42

Криві лінії 55

Криві поверхні 60

Кут між:

- прямою і площиною 47
- між площинами 47

### Л

Лінії кресленика 11

Лінії найбільшого нахилу площини до площин проєкцій 37

Лінії і точки на площині 37

### М

Масштаби 10

Методи проєкціювання:

- центральне проєкціювання 16
- паралельне проєкціювання 18

Метричні властивості прямокутних проєкцій прямокутних фігур 39

### Н

Напис основний 9

### О

Об'єкти геометричні 15

Ортогональне проєкціювання: 19

- точка 21
- пряма 25

- площина 31

## **П**

Паралельність:

- прямої і площини 44
- площин 44

Перпендикулярність:

- прямої і площини 44
- площин 46

Перетин:

- площин, заданих слідами 40
- прямої з площиною 41
- двох площин довільного положення 43
- поверхонь проєкціювальними площинами 67
- поверхні прямою лінією 71
- поверхонь площинами загального положення 72

Перерізи плоскі:

- багатогранників 68
- кривих поверхонь 68

Плоска крива лінія 56

Площини:

- загального положення 35
- рівня 35
- проєкціювальні 36

Побудова лінії перетину поверхонь:

- спосіб допоміжних розгинальних площин 77
- спосіб концентричних сфер 78
- спосіб ексцентричних сфер 79
- Положення точки і прямої 28

Поверхні:

- кінематичні 62
- обертання 63
- гвинтові 65

Позиційні властивості прямокутних проєкцій геометричних фігур 39

## **Р**

Розгортки поверхонь:

- спосіб нормальних перерізів 74
- спосіб розклатки 75
- спосіб трикутників (триангуляції) 76

## **С**

Слід прямої 27

Способи задання площини на кресленнику 32

- спосіб слідів 32

Способи задання поверхні:

- аналітичний 61
- каркасний 61

- кінематичний 62

Способи перетворення проєкційного кресленника:

- заміни площин проєкцій 49
- спосіб паралельного переміщення 50
- обертання навколо проєкціювальної осі 51
- обертання навколо осі, що паралельна площині проєкцій 53
- плоско-паралельне переміщення 53

**Ф**

Формати 7

**Ш**

Шрифт креслярський 12

Навчальне видання

**РАЙКОВСЬКА Галина Олексіївна**

**Нарисна геометрія.  
Практикум**

Навчальний посібник

Редактор *Л.С. Глембоцька*  
Технічний редактор *Г.О. Райковська*  
Комп'ютерний дизайн та верстка *Г.О. Райковська*  
Макетування *В.В. Кондратенко*

Підп. до друку \_\_\_\_\_  
Формат 60x84 1/8. Папір офс. Гарнітура Times Nev Roman/  
Ум. друк. арк. 21,62 . Наклад 300 пр. Зам. № \_\_\_\_\_

Видавець і виготовлювач  
Житомирський державний технологічний університет  
вул. Черняхівського, 103, Житомир, 10005

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
суб'єктів видавничої справи  
Серія ЖТ № 08 від 26. 03. 2004 р.