

Тема 3. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ НЕПЕРЕРВНОГО СИГНАЛУ

Лекція №3.

3.1. Періодична дискретизація

Звичайним методом отримання дискретного представлення безперервного сигналу служить періодична, або рівномірна, дискретизація, коли послідовність відліків $x[n]$ з'являється по безперервному сигналу $x_c(t)$ згідно з формулою:

$$x[n] = x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty.$$

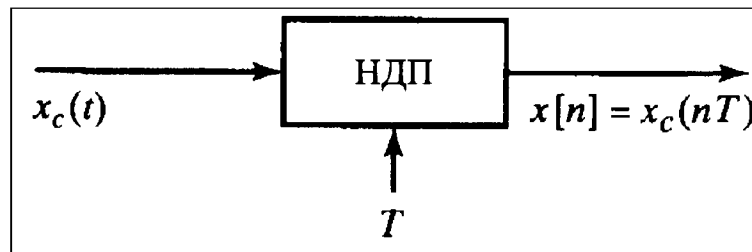
Параметр T тут називається кроком дискретизації, а зворотна до нього величина

$f_s = \frac{1}{T}$ - частотою дискретизації, вимірюваної числом відліків за секунду. Якщо

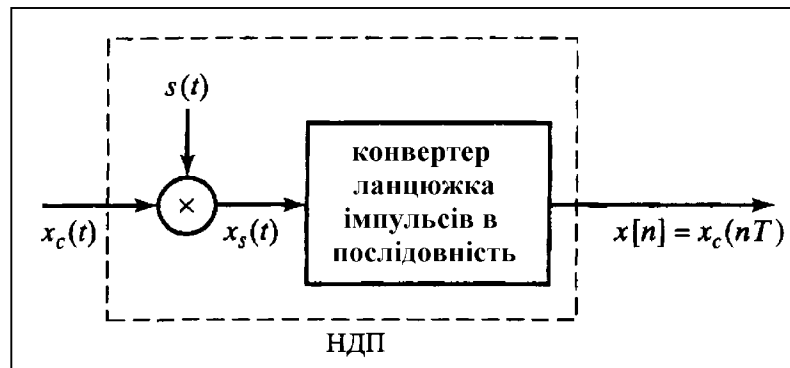
ми вважаємо за краще вимірювати частоту в радіанах за секунду, частоту дискре-

тизації можна перерахувати як $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

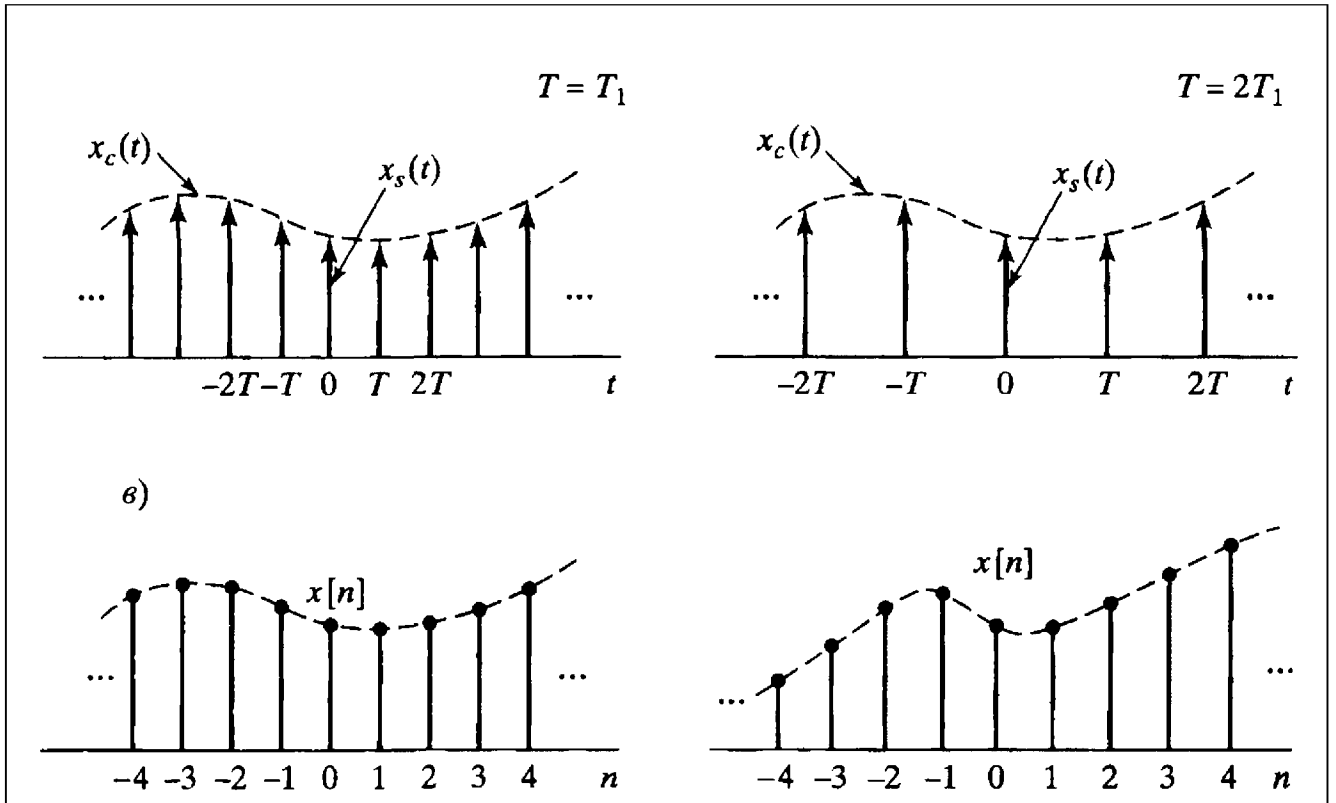
Систему, що здійснює цю операцію називатимемо ідеальним неперервно-дискретним перетворювачем (НДП), а на схемах її зображуватимемо:



Фізичний зміст процедури дискретизації можна представити, як модуляцію періодичної серії імпульсів $s(t)$ неперервним сигналом $x_c(t)$:



Як приклад результату застосування НДП представлені безперервний мовний сигнал $x_c(t)$ і відповідна послідовність відліків $x[n]$.



3.2. Частотне представлення дискретизації

Для виведення частотного співвідношення між вхідним і вихідним сигналами ідеального НДП розглянемо процедуру перетворення $x_c(t)$ в $x_s(t)$ за допомогою модуляції періодичного ланцюжка імпульсів:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

де $\delta(t)$ – δ -функція Дірака. Модулюючи сигнал $x_c(t)$ функцією $s(t)$, отримуємо:

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(t)\delta(t - nT),$$

виходячи з фільтруючих властивостей δ -функції остаточно маємо:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

Тепер розглянемо Фур'є-образ функції $x_s(t)$. Оскільки вона рівна добутку функцій $x_c(t)$ і $s(t)$, її перетворення є згорткою Фур'є-образів $X_c(j\Omega)$ і $S(j\Omega)$. Відомо, що перетворення Фур'є періодичного ланцюжка імпульсів знову періодичний ланцюжок імпульсів, тобто:

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

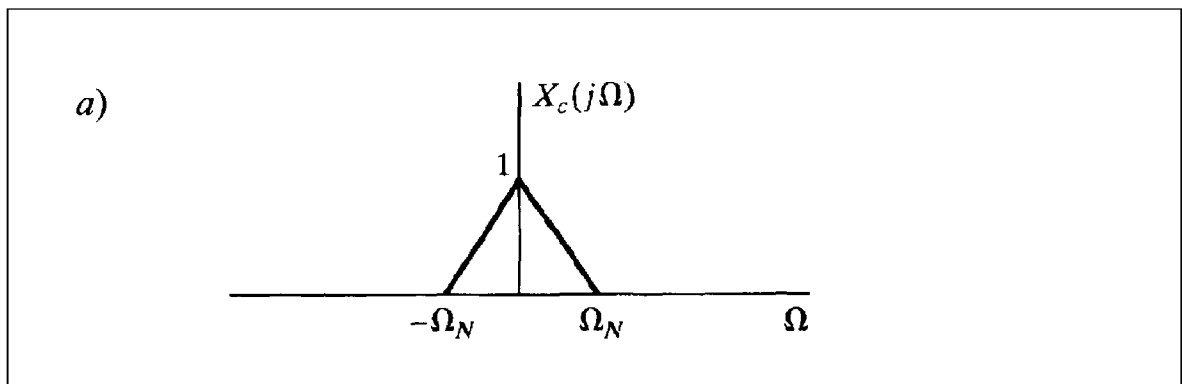
де $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$ – частота дискретизації, вимірювана в рад/с. Оскільки

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega)$$

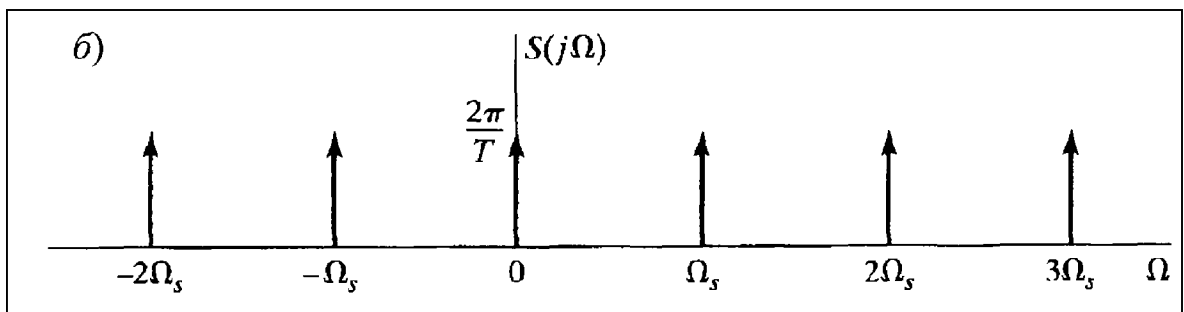
де * означає згортку по безперервній змінній, то

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

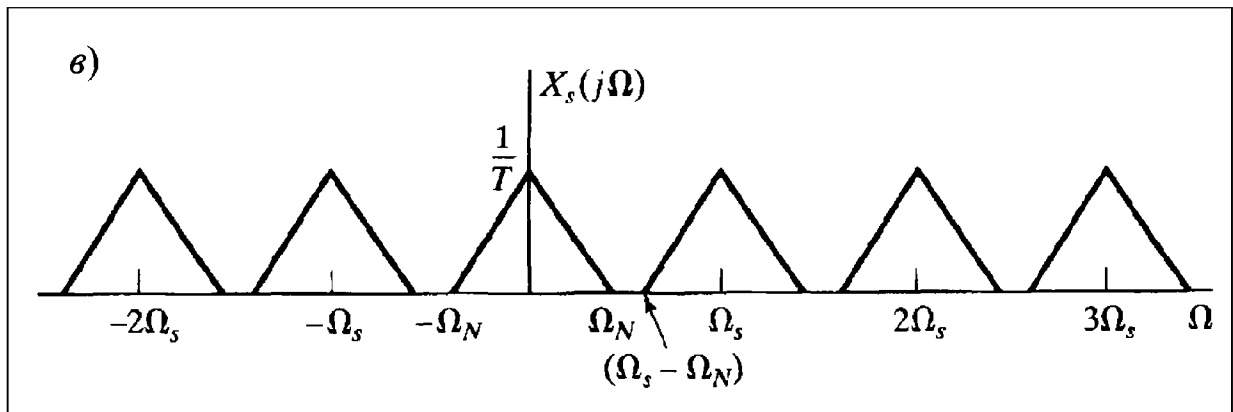
Розглянемо вузькосмуговий неперервний сигнал з максимальної ненульовою гармонікою Ω_N . Його Фур'є-образ має вигляд:



Фур'є-образ періодичної серії імпульсів:



Фур'є-образ серії імпульсів модульованої вузькосмуговим сигналом:



Очевидно, що, коли

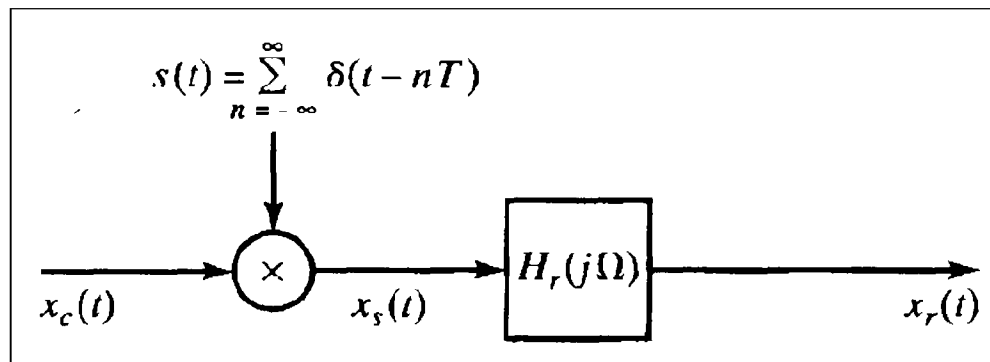
$$\Omega_s - \Omega_N > \Omega_N, \text{ тобто } \Omega_s > 2\Omega_N$$

дублікати $X_c(j\Omega)$ не перекриваються і, отже, при їх підсумовуванні виходить

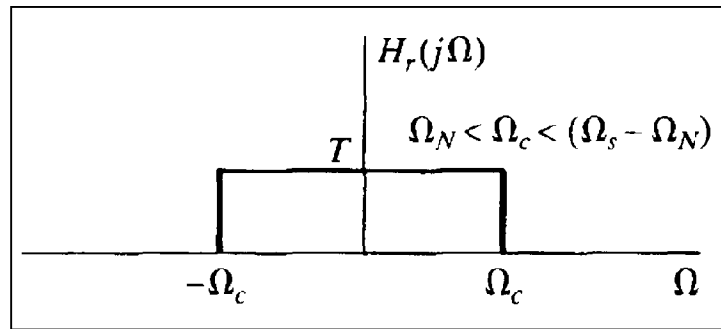
періодичне (з точністю до множника $\frac{1}{T}$) продовження функції $X_c(j\Omega)$. Отже,

$x_c(t)$ відновлюється по $x_s(t)$ за допомогою ідеального фільтру нижніх частот.

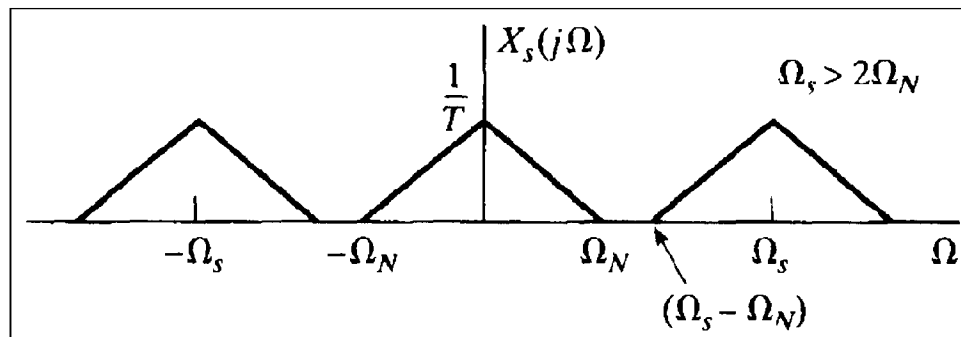
Розглянемо модулятор ланцюжка імпульсів, за яким стоїть ЛС-система



із спектральною характеристикою $H_r(j\Omega)$

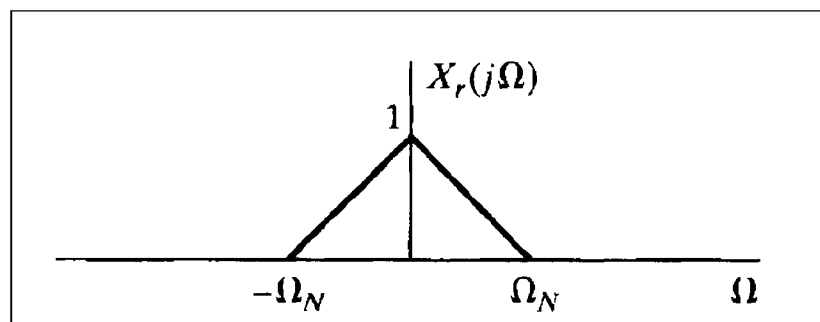


де Ω_c – частота відсічки та коефіцієнтом підсилення T (ідеальний фільтр нижніх частот що задовольняє умові $\Omega_N < \Omega_c < (\Omega_s - \Omega_N)$), то з модульованого сигналу:

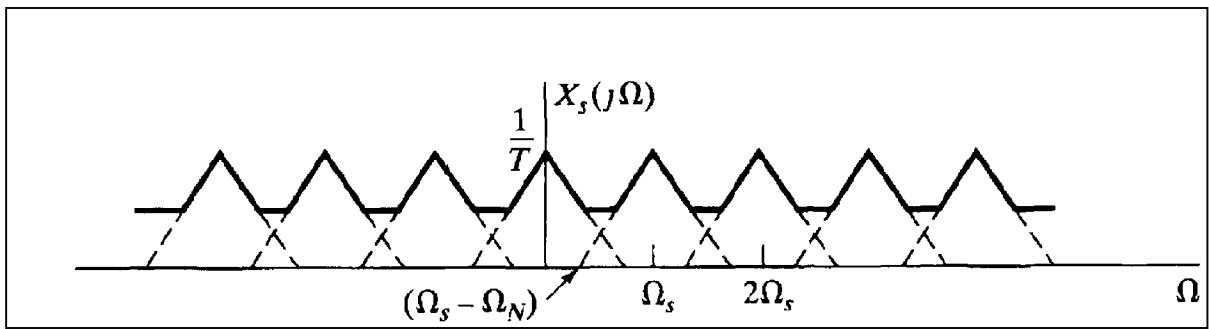


відповідно до правила каскадного включення ЛС він утворить Фур'є-образ:

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_s(j\Omega) = X_c(j\Omega)$$



Якщо $\Omega_s \leq 2\Omega_N$, копії графіків функції $X_c(j\Omega)$ накладаються один на одного. Тому функцію $X_c(j\Omega)$ вже неможливо відновити за допомогою фільтру нижніх частот:



В цьому випадку відновлений вихідний сигнал $x_r(t)$ пов'язаний з оригінальним безперервним сигналом через спотворення, яке має назву спотворенням із-за накладення спектрів, або просто накладенням спектрів, або хибними частотами.

Теорема Котельникова-Найквіста про дискретизацію:

Нехай $x_c(t)$ – вузькосмуговий сигнал з $X_c(j\Omega) = 0$, при $|\Omega| > \Omega_N$.

Тоді $x_c(t)$ однозначно визначається своєю дискретизацією

$$x[n] = x_c(nT) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \text{ якщо } \Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N$$

Частоту Ω_N зазвичай називають частотою Найквіста, а частоту $2\Omega_N$, яка обмежує частоту дискретизації знизу, – мінімально допустимою частотою дискретизації.

Кінцева мета математичного представлення процесу дискретизації – виразити $X(e^{j\omega})$ (дискретне Фур'є-представлення послідовності $x[n]$) в термінах $X_s(j\Omega)$ і $X_c(j\Omega)$, для чого перепишемо $X_s(j\Omega)$ в іншому виді. Застосовуючи безперервне перетворення Фур'є до рівності

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT), \text{ отримуємо}$$

$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega nT}$$

Із врахуванням $x[n] = x_c(nT)$ та $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$ маємо:

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T})$$

Відповідно до отриманого вище $X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$ отримуємо:

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s)),$$

що еквівалентно:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right)$$

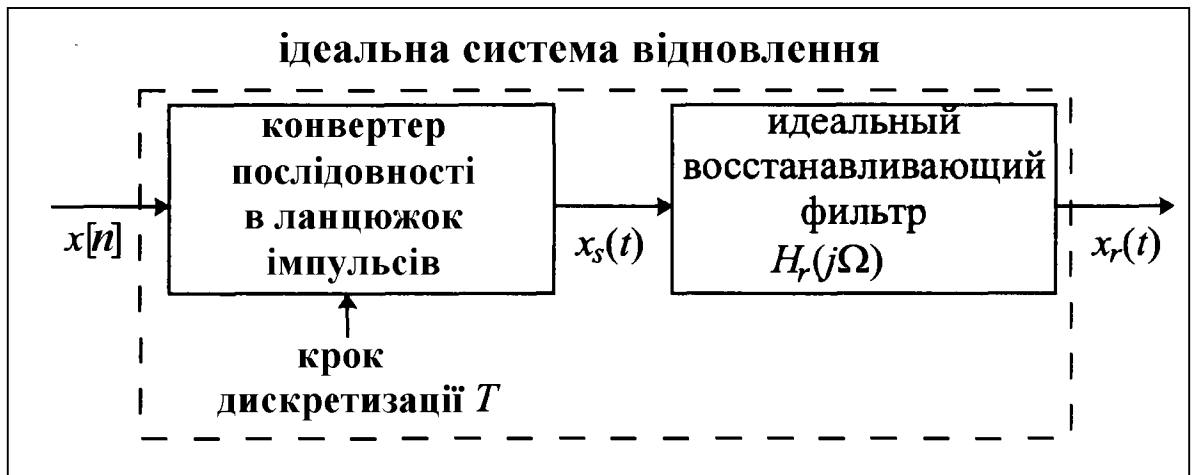
3.3. Відновлення вузькосмугового сигналу за його відліками

Встановлено, що якщо профільтрувати модульований неперервним сигналом $x_c(t)$ ланцюжок імпульсів відповідним фільтром нижніх частот, то Фур'є-образ результату фільтрування співпадатиме з Фур'є-образом неперервного сигналу $x_c(t)$, і тому вихідний з фільтру сигнал виявляється ідентичний сигналу модуляції. По послідовності відліків $x[n]$ можна сформувати серію імпульсів $x_s(t)$, значення яких визначаються формулою:

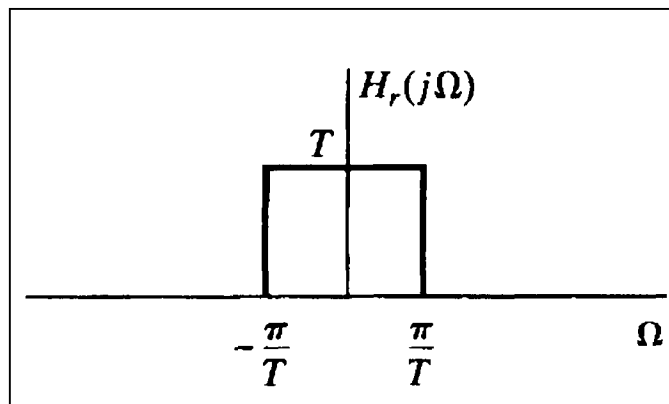
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

Відлік під номером n пов'язаний з імпульсом в точці $t = nT$, де T - крок дискретизації, відповідної послідовності $x[n]$. Якщо цей ланцюжок імпульсів подати на вхід ідеального безперервного фільтру нижніх частот з КЧХ $H_r(j\Omega)$ і імпульсною характеристикою $h_r(t)$, то буде отриманий відгук

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_r(t - nT)$$

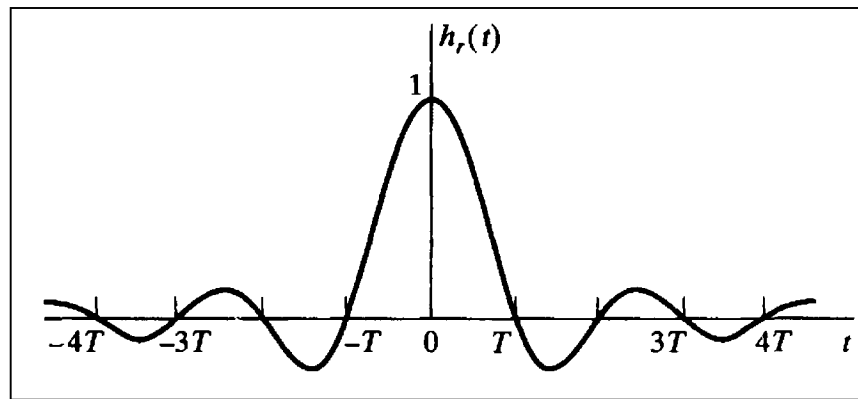


Комплексна частотна характеристика такого фільтра:



Відповідно імпульсна характеристика $h_r(t)$ є зворотним перетворенням Фур'є від функції $H_r(j\Omega)$ і при частоті відсічення $\frac{\pi}{T}$ обчислюється за правилом:

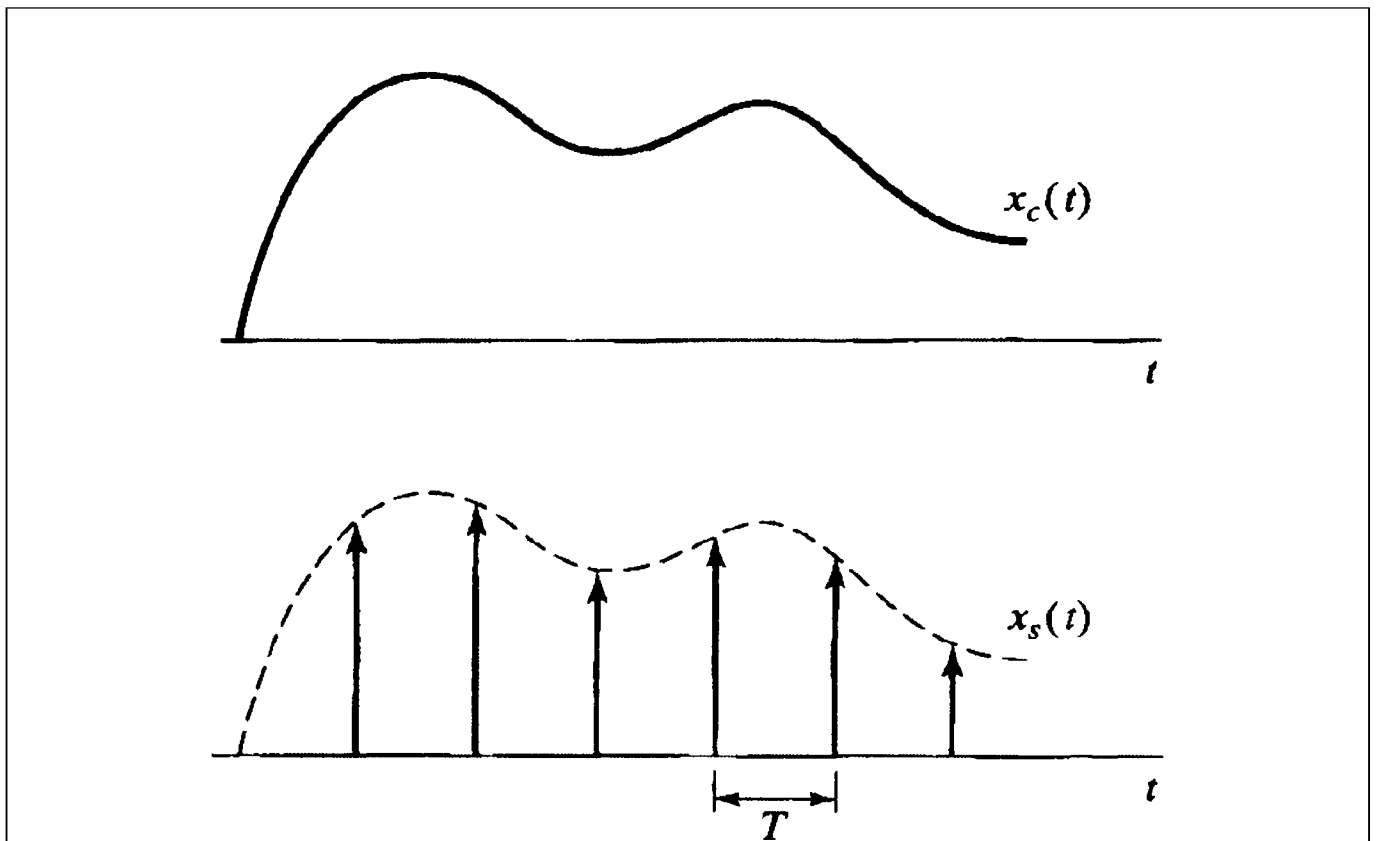
$$h_r(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

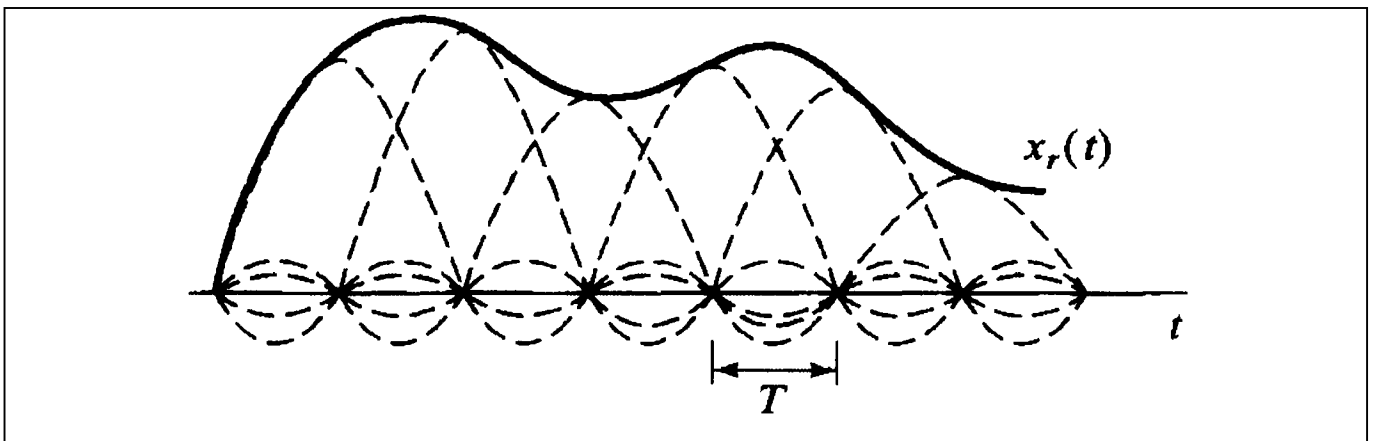


звідки:

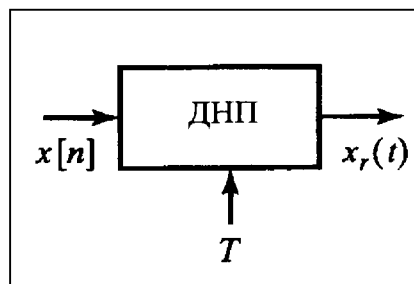
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T}$$

Якщо $x[n] = x_c(nT)$, де $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$, то $x_r(t)$ співпадає з $x_c(t)$.





Операція відновлення вузькосмугового неперервного сигналу за його дискретним аналогом носить назву Дискретно-неперервне перетворення (ДНП) та зображується графічно:



Властивості ідеального ДНП найпростіше досліджувати в частотній області. Для виведення співвідношень між його входом і виходом в цій області до обох частин

формули $x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t-nT)$ застосуємо перетворення Фур'є:

$$X_r(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]H_r(j\Omega)e^{-j\Omega Tn}$$

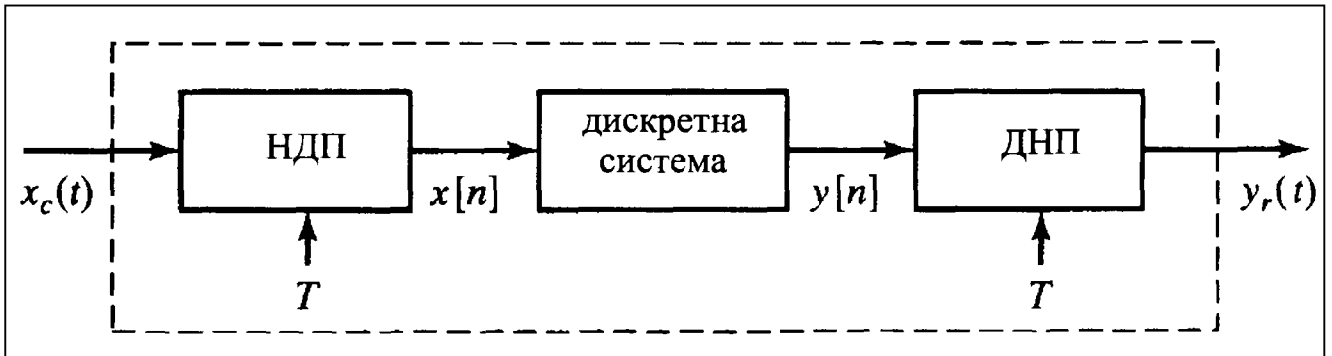
Виносячи множник $H_r(j\Omega)$ з суми, можна записати:

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X(e^{j\Omega T})$$

Лекція №4.

3.4. Дискретна обробка неперервних сигналів

Своє головне застосування дискретні системи знаходять в обробці неперервних сигналів, що досягається за допомогою схеми:



Вона складається з послідовного з'єднання НДП, власне дискретної системи і ДНП.

НДП генерує дискретний сигнал $x[n] = x_c(nT)$. Дискретне Фур'є перетворення цієї послідовності співвідноситься з безперервним перетворенням Фур'є :

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right)$$

ДНП створює на виході неперервний сигнал виду:

$$y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T}$$

де послідовність $y[n]$ є реакцією дискретної системи на послідовність $x[n]$.

$Y_r(j\Omega)$ – неперервне перетворення Фур'є сигналу $y_r(t)$ і $Y(e^{j\omega})$ – Фур'є-образ послідовності $y[n]$ пов'язані співвідношенням:

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\Omega T}) = \begin{cases} Y(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

Для лінійних стаціонарних систем:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$

де $H(e^{j\omega})$ – її КЧХ або, що те ж саме, – Фур'є-образ її імпульсної характеристики, а $X(e^{j\omega})$ і $Y(e^{j\omega})$ – Фур'є-образи вхідного і вихідного сигналів відповідно. Комбінуючи ці рівняння, отримуємо:

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) X(e^{j\Omega T})$$

Підставляючи $\omega = \Omega T$ в суму $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$, знаходимо

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

Якщо $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$, то ідеальний відновлюючий фільтр нижніх

частот з характеристикою $H_r(j\Omega)$ компенсує множник $\frac{1}{T}$ і відбирає в наведеній сумі тільки член з $k = 0$, тобто

$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) X_c(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

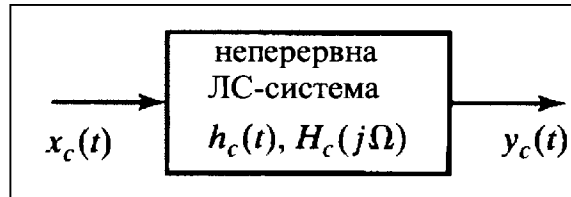
або

$$Y_r(j\Omega) = H_{eff}(j\Omega) X_c(j\Omega),$$

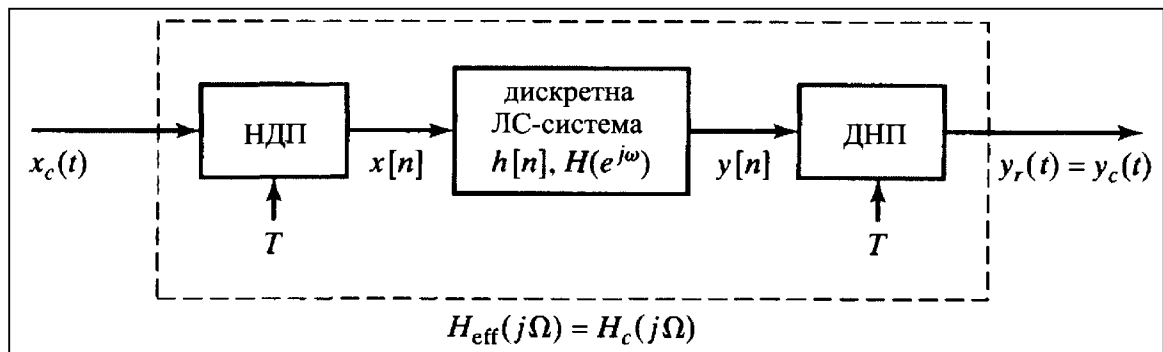
де

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

Розглянемо неперервну ЛС-систему:



та еквівалентну їй систему с вузько смуговим входом:



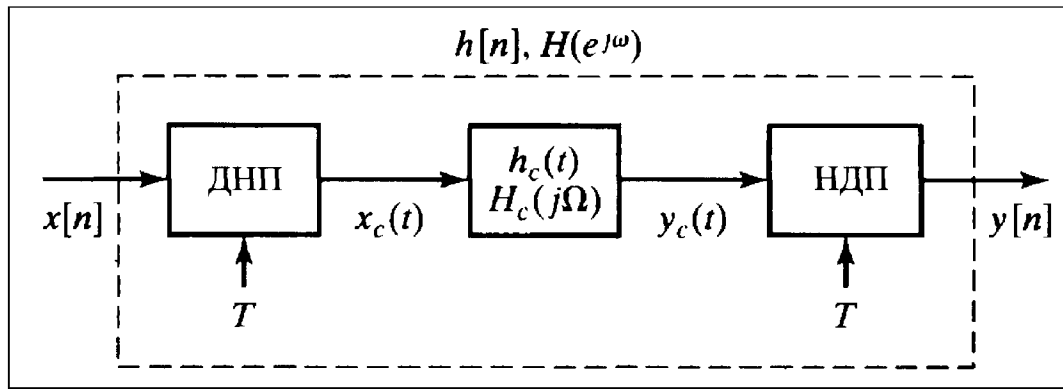
то якщо при виконанні умов:

$$\begin{cases} H(e^{j\omega}) = H_c\left(\frac{j\omega}{T}\right), & |\omega| < \pi \\ H_c(j\Omega) = 0, & |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

здійснюється $h[n] = Th_c(nT)$, кажуть що дискретна система є імпульсно-інваріантною версією неперервної системи.

3.5. Безперервна обробка дискретних сигналів

Розглянемо можливість застосування неперервних методів обробки сигналів до дискретних систем. Цей підхід може бути здійснений за допомогою схеми:



За визначенням ідеального ДНП функція $X_c(j\Omega)$, а значить, і $Y_c(j\Omega)$ повинні набувати нульових значень при $|\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$. У зв'язку з цим НДП дає дискретизацію сигналу $y_c(t)$ без накладення спектрів, і ми можемо записати $x_c(t)$ і $y_c(t)$ як:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T},$$

$$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T},$$

де $x[n] = x_c(nT)$ і $y[n] = y_c(nT)$. Випишемо співвідношення в частотній області для сигналів наведеної системи

$$X_c(j\Omega) = TX(e^{j\Omega T}), \quad |\Omega| < \pi/T,$$

$$Y_c(j\Omega) = H_c(j\Omega) X_c(j\Omega), \quad |\Omega| < \pi/T,$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} Y_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi.$$

Таким чином, можна бачити, що наведена система поводитья, як дискретна система з КЧХ:

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi,$$

Або (еквівалентне твердження) КЧХ наведеної системи буде співпадати з КЧХ дискретної – $H(e^{j\omega})$, якщо КЧХ безперервної системи рівна

$$H_c(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}), \quad |\Omega| < \frac{\pi}{T},$$

3.6. Зміна частоти дискретизації за допомогою дискретної обробки

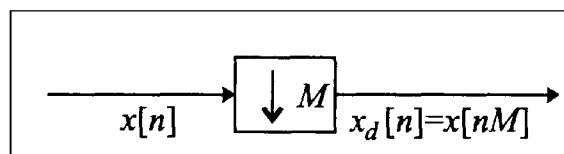
Безперервний сигнал $x_c(t)$ добре представляється дискретним, тобто послідовністю відліків $x[n] = x_c(nT)$. Проте часто постає задача отримати послідовність $x'[n] = x_c(nT')$ де $T' \neq T$ маючи лише $x[n]$.

3.6.1. Зменшення частоти дискретизації в ціле число разів

Зниження частоти дискретизації методами цифрової обробки легко досягається використовуючи компресор, або проріджувач $x_d[n] = x[Mn] \equiv x_c(nMT)$.

Якщо $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \Omega_N$ та $\frac{\pi}{T'} = \frac{\pi}{MT} \geq \Omega_N$, то $x_d[n]$ – точне

представлення сигналу $x_c(t)$. Тобто частота дискретизації може бути зменшена в M разів без накладення спектрів, якщо початкова частота дискретизації рівна принаймні добутку M на мінімально допустиму частоту дискретизації або якщо смуга послідовності в результаті дискретного фільтрування була зменшена в M разів. У загальній ситуації операція зменшення частоти дискретизації (включаючи усі попередні фільтрування) іменуватиметься знижувальною дискретизацією та позначатиметься графічно.



Фур'є-образ послідовності $x[n] = x_c(nT)$ дорівнює

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right).$$

Аналогічно для $x_d[n] = x_c(nT')$

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T'} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{T'} - \frac{2\pi r}{T'} \right) \right) = \frac{1}{MT} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi r}{MT} \right) \right)$$

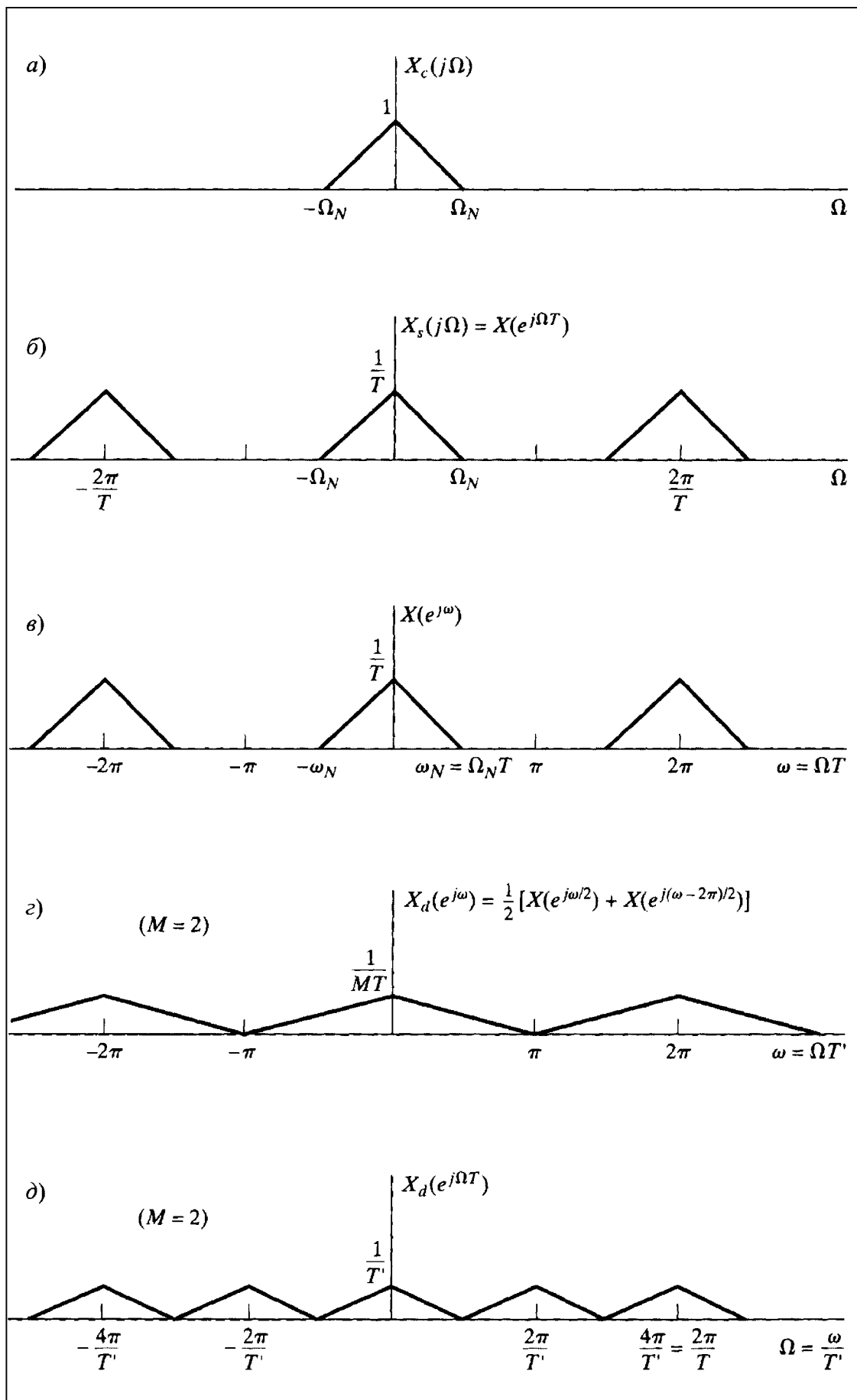
після заміни індексу підсумовування $r = i + kM$, $-\infty < k < \infty$, $0 \leq i \leq M-1$ отримаємо

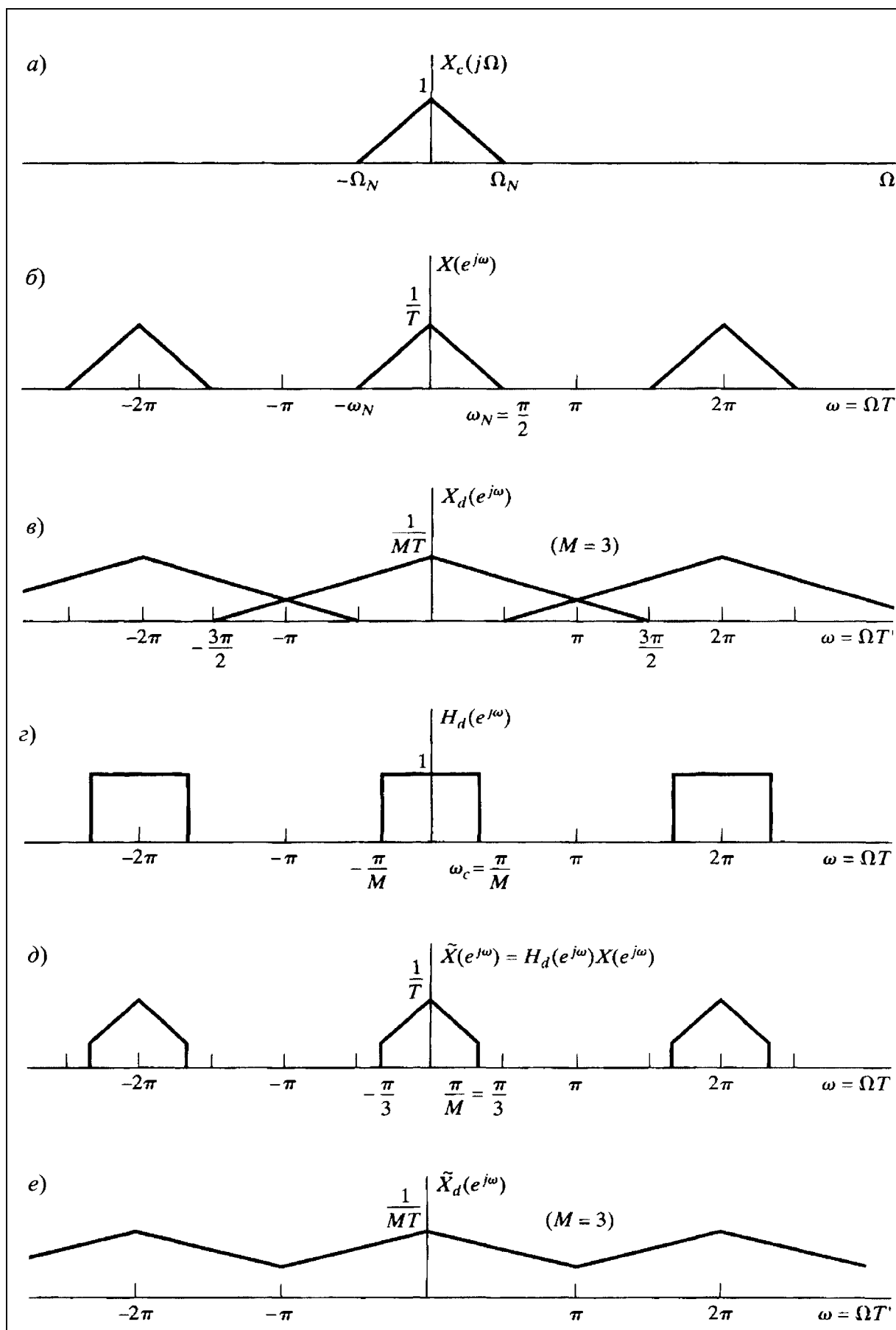
$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi k}{T} - \frac{2\pi i}{MT} \right) \right) \right].$$

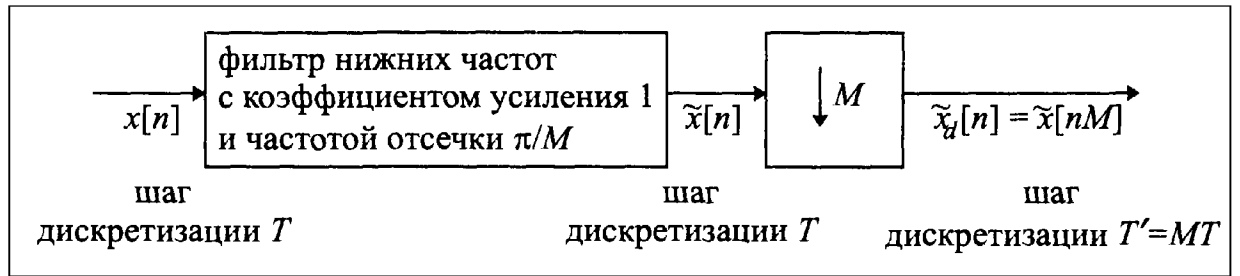
$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi k}{T} - \frac{2\pi i}{MT} \right) \right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega - 2\pi i}{MT} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right) = X \left(e^{j \frac{(\omega - 2\pi i)}{M}} \right).$$

Таким чином

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X \left(e^{j \frac{(\omega - 2\pi i)}{M}} \right).$$

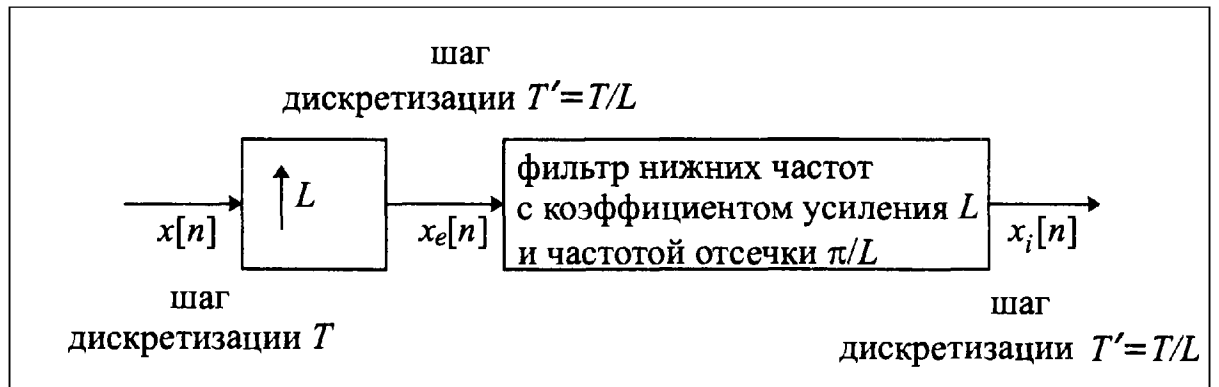






3.6.2. Збільшення частоти дискретизації в ціле число разів

Складнішим є випадок, коли необхідно збільшити частоту дискретизації



Підсистема, розташована на малюнку, називається розширювачем частоти дискретизації або просто розширювачем. Сигнал розширювача, що виходить, описується формулою:

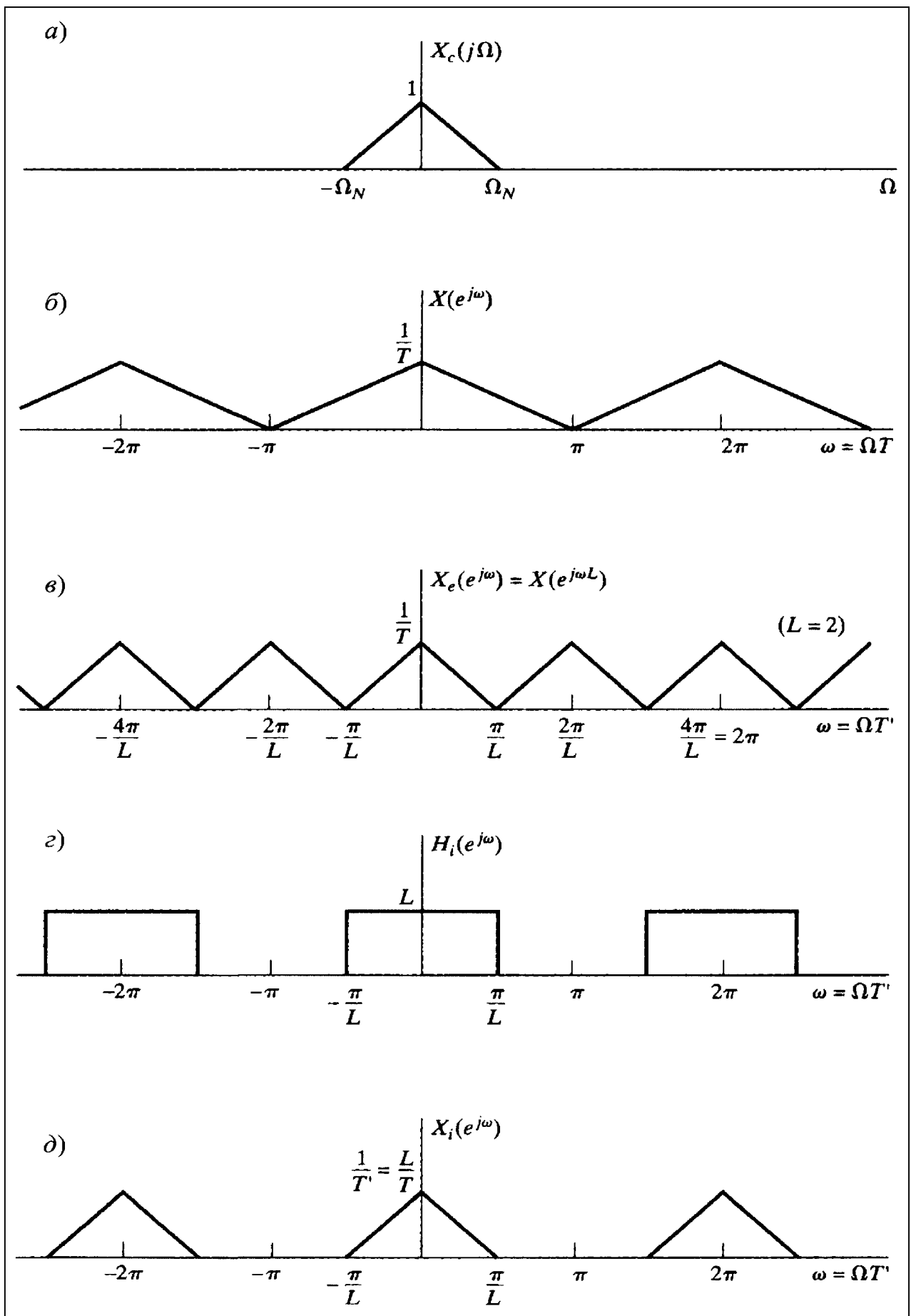
$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots, \\ 0, & n \neq 0, \pm L, \pm 2L, \dots, \end{cases}$$

або

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL].$$

Фур'є-образ послідовності $x_e[n]$ має вигляд:

$$X_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL] \right) e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega Lk} = X(e^{j\omega L}).$$

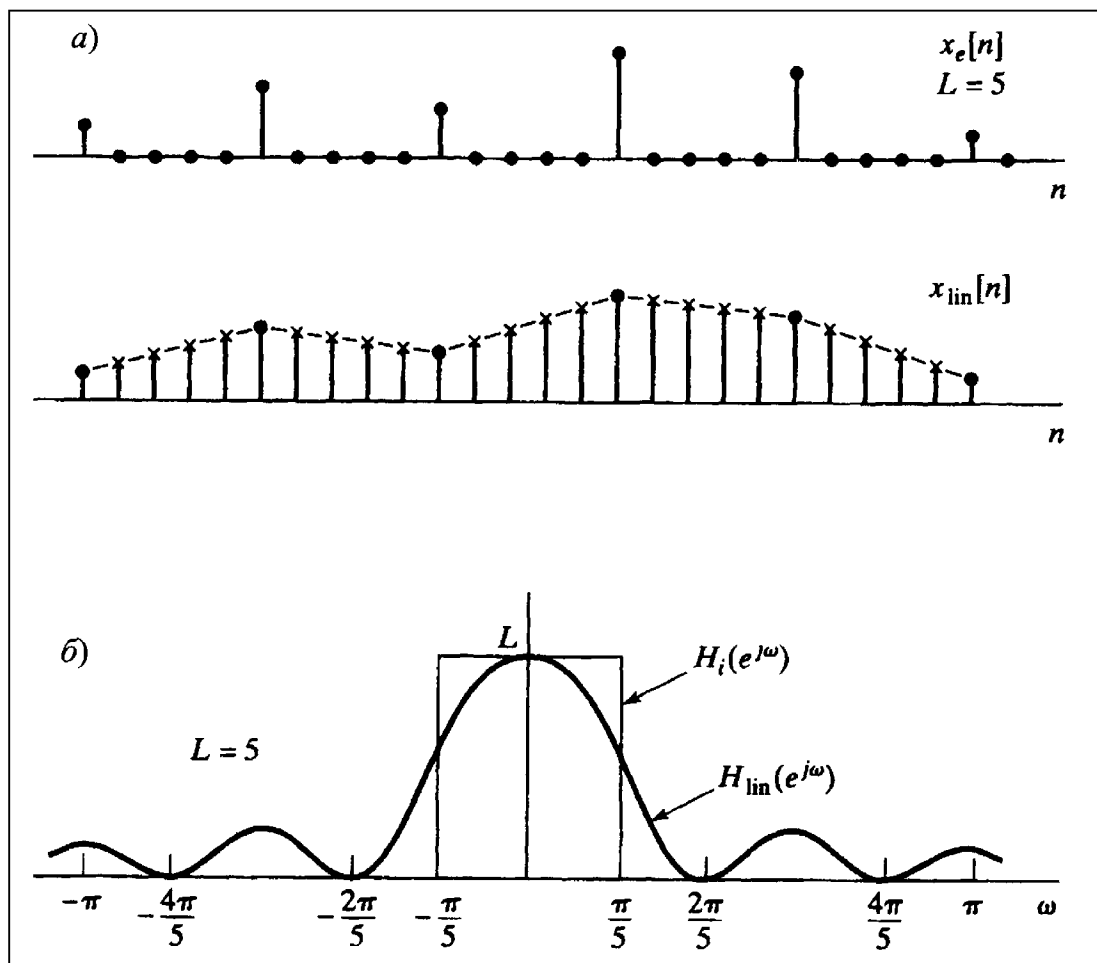


Таку систему прийнято називати інтерполятором, оскільки вона відновлює відсутні відліки. Тому термін «підвищувальна дискретизація», можна розглядати як синонім поняття «інтерполяція». При достатньо високій, по відношенню до частоти Найквіста, вихідній частоті дескритизації, відновлення відсутніх відліків досить точно може бути проведене за допомогою лінійної інтерполяції. Ця процедура може бути здійснена за допомогою дискретної системи з імпульсною характеристикою:

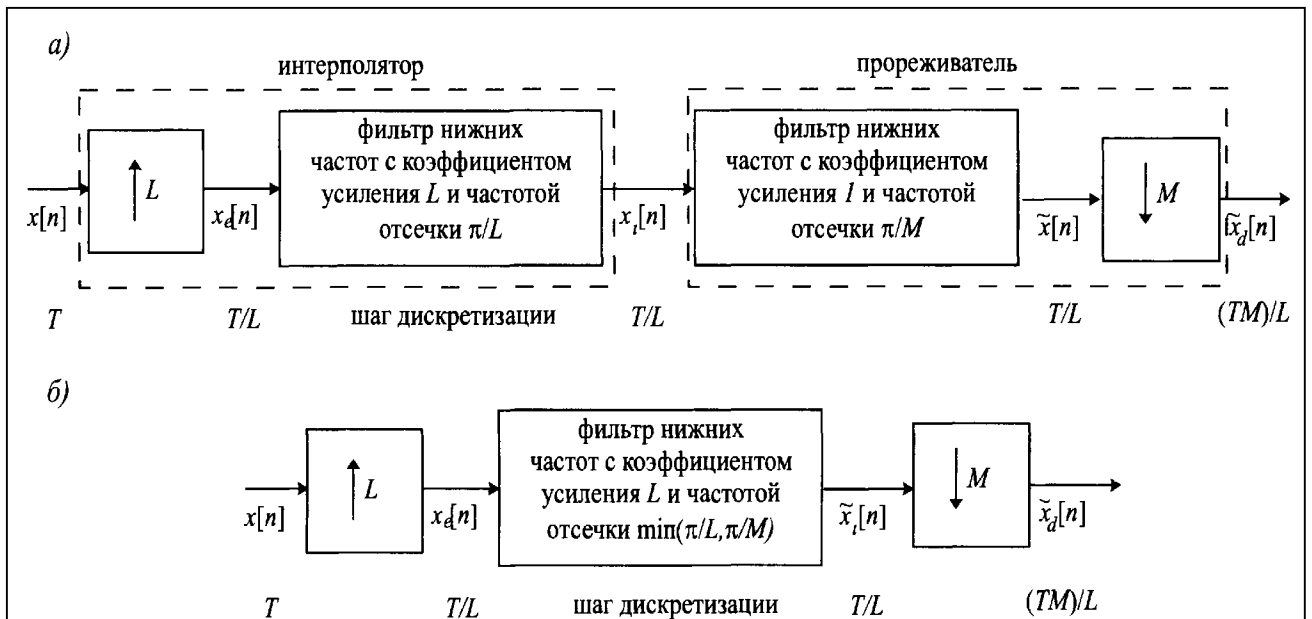
$$h_{lin}[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{L}, & |n| \leq L \\ 0, & |n| > L \end{cases}$$

При такому фільтрі інтерпольований сигнал дорівнює

$$x_{lin}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_e[k]h_{lin}[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_{lin}[n-kL]$$



3.6.3. Зміна частоти дискретизації на раціональний множник



При $M > L$ виходить схема збільшення кроку дискретизації (зменшення частоти дискретизації), а при $M < L$ - протилежна схема. Оскільки фільтри інтерполяції і проріджування об'єднані в каскад, їх можна замінити одним фільтром нижніх частот з коефіцієнтом посилення L і частотою відсічки, рівною найменшому із від-

ношень, $\frac{\pi}{L}$ і $\frac{\pi}{M}$. Якщо $M < L$, то значення частоти відсічки – $\frac{\pi}{M}$ і відбува-

ється зменшення частоти дискретизації. Послідовність $x[n]$, отримана дискретизацією з частотою Найквіста, дає послідовність $x[n]$, що є версією вихідного вузькосмугового сигналу, пропущеного крізь фільтр нижніх частот, якщо відсутні

хвильні частоти. З іншого боку, при $M < L$ значення частоти відсічки – $\frac{\pi}{L}$ і вже не треба обмежувати смугу сигналу частотою Найквіста.

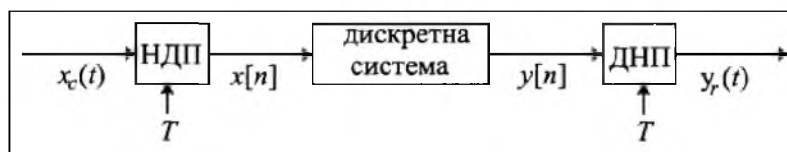
Тема 4. ТЕХНІКА АНАЛОГОВО-ЦИФРОВОГО ТА ЦИФРО-АНАЛОГОВОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

Лекція №5

4.1. Цифрова обробка аналогових сигналів

Попереднє обговорення представлення безперервних сигналів дискретними обмежувалося ідеальними моделями періодичної дискретизації і вузькосмуговій інтерполяції.

Були введені ідеалізовані системи що здійснюють дискретизацію, які ми називали ідеальним неперервно-дискретним перетворювачем (НДП), і вузькосмугові ідеалізовані системи що здійснюють процес інтерполяції (відновлення) називаються ідеальним дискретно-неперервним перетворювачем (ДНП). Ідеальні перетворювачі дозволили нам сконцентрувати свою увагу на математичних співвідношеннях, що зв'язують вузькосмугові сигнали з їх дискретизацією. За допомогою ідеальних НДП і ДНП було показано, як дискретні ЛС-системи використовуються в конфігураціях типу:



для реалізації безперервних ЛС-систем за умови, що вхідний сигнал є вузькосмуговим, а частота дискретизації обмежена знизу частотою Найквіста.

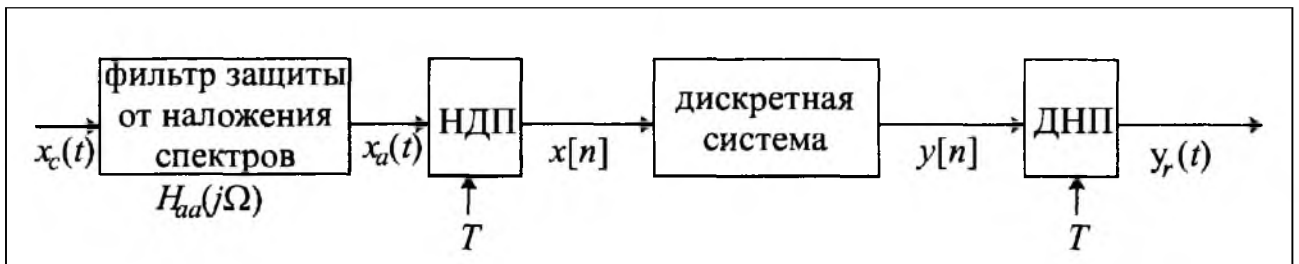
Сигнали, що зустрічаються в практичних застосуваннях, не бувають ідеально вузькосмуговими. Крім того, неможливо утілити ідеальні фільтри у конкретні працюючі пристрої, а ідеальним НДП і ДНП можна лише апроксимувати АЦП і ЦАП. Блок-схема, відображає реалістичнішу модель цифрової обробки безперервних (аналогових) сигналів. Лекція присвячена вивченню властивостей складових частин цієї схеми.



4.1.1. Попереднє фільтрування для усунення ефекту накладення спектрів

При обробці аналогових сигналів дискретними системами стараються мінімізувати частоту дискретизації, що обумовлено бажанням понизити кількість арифметичних операцій, потрібних для реалізації системи, яке пропорційне числу відліків, що піддаються обробці. Якщо вхідний сигнал не є вузькосмуговим або його частота Найквіста занадто висока, потрібне попереднє фільтрування. Типовий приклад такої ситуації виникає при обробці мовного сигналу, коли нижніх частот (3 – 4 кГц) цілком досить для його розпізнавання, незважаючи на

те що сигнал може нести істотну інформацію і в діапазоні частот від 4 до 20 кГц. Навіть при вузькосмуговому сигналі широкосмуговий аддитивний шум може заповнити область верхніх частот, і в результаті дискретизації шумові компоненти внесуть завади в смугу нижніх частот. Щоб позбавитися від накладення спектрів, вхідний сигнал необхідно примусово обмежити по смузі до частот, розташованих нижче половини бажаної частоти дискретизації. Це можна зробити фільтром нижніх частот, застосованим до безперервного сигналу перед НДП.



У цьому контексті фільтр нижніх частот, попередній НДП, називається фільтром захисту від накладення спектрів. У ідеалі КЧХ фільтру захисту від накладення спектрів повинна виглядати як

$$H_{aa}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c. \end{cases}$$

Уся система - від реакції фільтру захисту від накладення спектрів $x_a(t)$ до вихідного сигналу $y_r(t)$ - поводить як ЛС-система, оскільки вхідний в НДП сигнал $x_a(t)$ примусово обмежений частотою $\frac{\pi}{T}$ рад. з фільтром захисту від накладення спектрів. Таким чином, уся ефективна КЧХ системи дорівнюватиме добутку характеристики $H_{aa}(j\Omega)$ і ефективною КЧХ перетворення від $x_a(t)$ до $y_r(t)$.

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c. \end{cases}$$

Отже, при ідеальному фільтрі нижніх частот, що захищає від накладення спектрів, система поводить як ЛС-система з КЧХ, приведеною у формулі для $H_{\text{eff}}(j\Omega)$, навіть у тому випадку, коли функція $X_c(j\Omega)$ не є вузькосмуговою. На практиці КЧХ $H_{aa}(j\Omega)$ не може бути ідеально вузькосмуговою, але її значення можна зробити досить малими при $|\Omega| > \frac{\pi}{T}$, так що накладення спектрів

мінімізується і загальна КЧХ системи задовольнятиме наближеному співвідношенню:

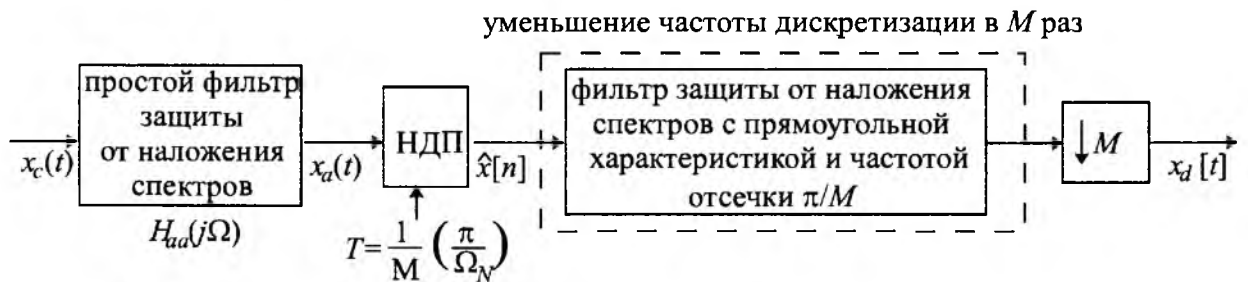
$$H_{\text{eff}}(j\Omega) \approx H_{aa}(j\Omega)H(e^{j\Omega T}).$$

Для досягнення зневажливо малих значень КЧХ при $\omega > \frac{\pi}{T}$ необхідно, щоб

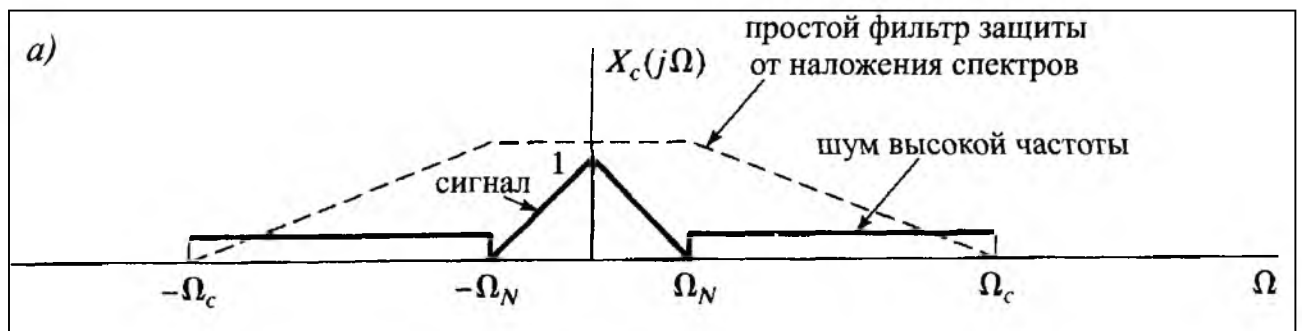
$H_{aa}(j\Omega)$ починала вводити загасання ще в частотах до $\frac{\pi}{T}$. Формула підказує,

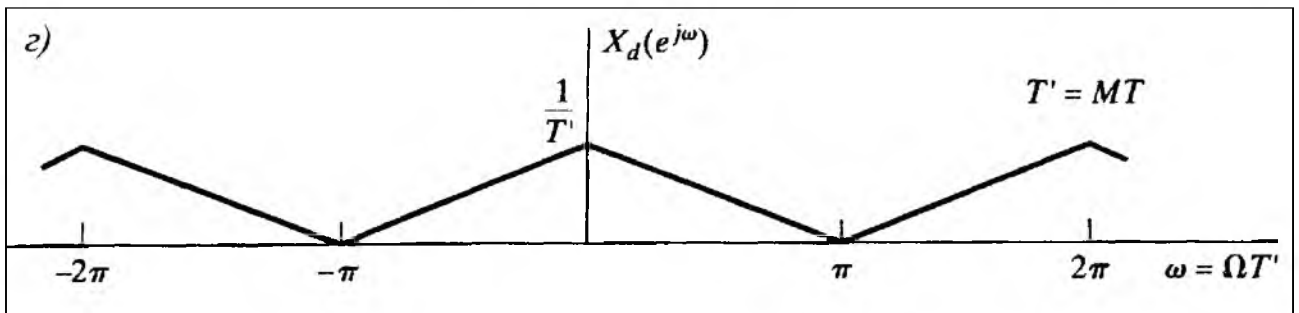
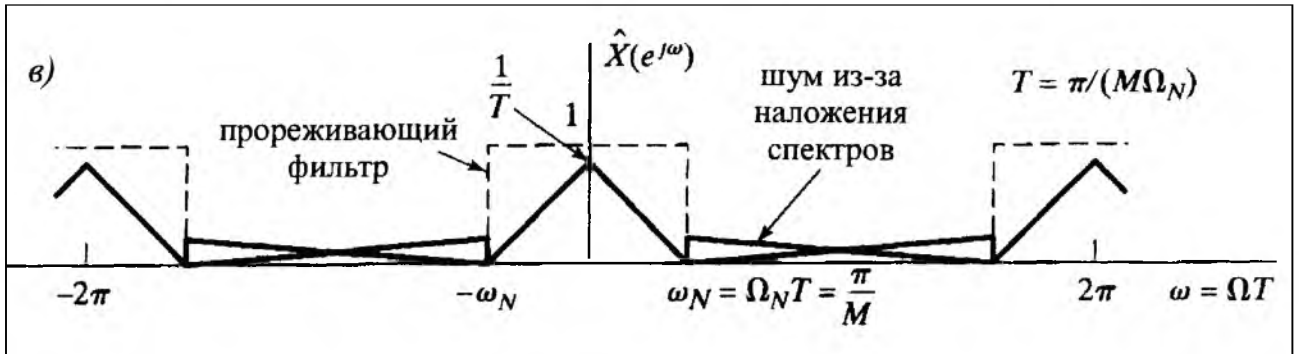
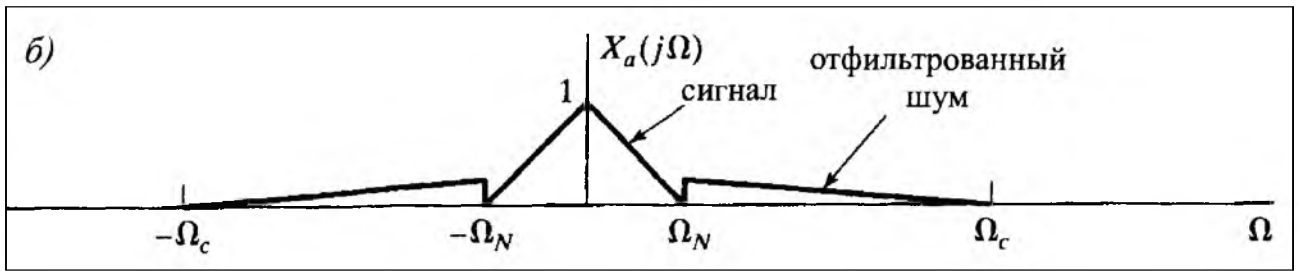
що спад фільтру захисту від накладення спектрів (і інші лінійні стаціонарні спотворення, що обговорюються нижче) міг би принаймні частково компенсуватися, якщо його враховувати при розробке дискретних систем.

Один з підходів до вирішення проблеми уникнення використання дорогого аналогового фільтра з крутим зрізом може полягати в зменшенні частоти дискретизації.



де через Ω_N позначена найвища частотна компонента, яка повинна зберегтися після виконання процедури фільтрування для захисту від накладення спектрів. Спочатку ми застосовуємо дуже простий фільтр, що має плавну частотною відсічення, значно затухаючого поблизу $M\Omega_N$. Далі вставляємо НДП з частотою дискретизації, що значно перевищує $2\Omega_N$, наприклад $2M\Omega_N$. Після цього частота дискретизації зменшується в M разів системою, що містить фільтр захисту від накладення спектрів з крутим зрізом, реалізований в дискретній області. Подальша дискретна обробка для мінімізації розрахунків може бути проведена з низькою частотою дискретизації. Таке використання перетворення частоти дискретизації, що йде за передискретизацією, ілюструється діаграмами:





Фур'є-перетворення сигналу, який займає смугу $|\Omega| < \Omega_N$ та перетворення Фур'є того, що могло б відповідати високочастотному "шуму", або небажаним компонентам, які необхідно подавити за допомогою фільтру захисту від накладення спектрів представлено на діаграмі а). Пунктирною лінією відмічена КЧХ фільтру захисту від накладення спектрів, який відсікає частоту не різко, а плавно зменшує до нуля в точці Ω_c . Діаграма б) демонструє Фур'є-перетворення вихідного сигналу після м'якої фільтрації.

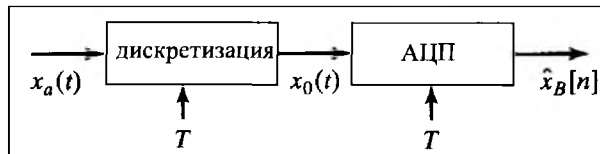
Якщо сигнал $x_a(t)$ дискретизований з кроком T так, що $\left(\frac{2\pi}{T} - \Omega\right) < \Omega_N$, то

ДВПФ послідовності $x[n]$ співпадає із діаграмою в). Вихід дискретного фільтру далі можна піддати знижувчій дискретизації з множником M і отримати послідовність $x_d[n]$, чий Фур'є-образ показаний на діаграмі г).

Уся процедура фільтрування з різкою частотою відсічення може бути проведена дискретною системою. При цьому потрібно лише незначну попередню обробку сигналу безперервним фільтром. Оскільки фаза дискретних КИХ-фільтрів може бути лінійною, прийом передискретизації можна використати для реалізації фільтрування, що захищає від накладення спектрів, практично без спотворення фази. Переваги цього прийому особливо видно, коли важливо зберігати не лише частотний спектр, але і форму сигналу.

4.1.2. Перетворення аналогового сигналу в цифровий

При обробці безперервного сигналу ідеальним яка перетворює безперервний (аналоговий) сигнал на цифровий, тобто послідовність кінцевої точності, або квантовану по рівню послідовність



Обидві системи можна реалізувати фізичними пристроями. АЦП - цей фізичний пристрій, що перетворює амплітуду напругу або сили струму, що подається на вхід, в двійковий код, представляючий квантовані значення амплітуди вхідного сигналу. Під контролем зовнішнього годинника АЦП може обчислювати відлік кожні T с. Проте перетворення відбувається не миттєво, і з цих причин високо-ефективні АЦП зазвичай включають схему дискретизації і запам'ятовування. Ідеальна система дискретизації і запам'ятовування - це система з вихідним сигналом виду

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT),$$

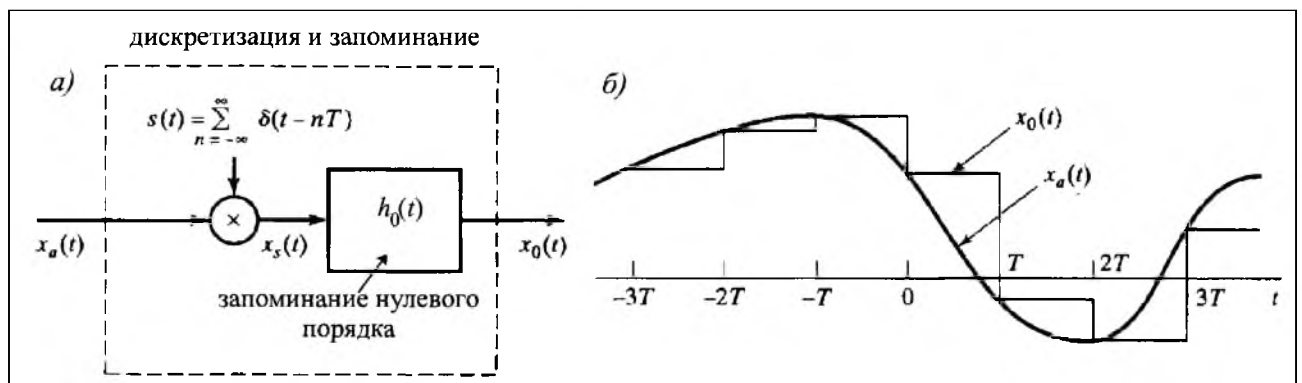
де $x[n] = x_a(nT)$ – ідеальна дискретизація сигналу $x_a(t)$, а $h_0(t)$ – імпульсна характеристика системи запам'ятовування нульового порядку, тобто

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Якщо переписати формулу у вигляді згортки

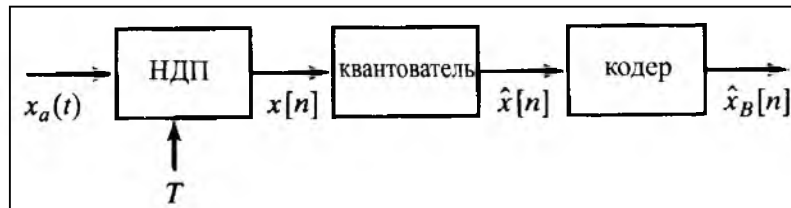
$$x_0(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT),$$

то можна помітити, що ідеальна схема дискретизація і запам'ятовування еквівалентна модулятору ланцюжка імпульсов, за яким йде лінійне фільтрування з системою запам'ятовування нулевого порядку.



Вихід системи запам'ятовування нульового порядку має ступінчасту форму, тобто значення відліків постійні на відрізках завдовжки в T_c , де T - крок дискретизації. Фізичні схеми дискретизації і запам'ятовування розробляються так, щоб дискретизація сигналу відбувалася максимально можливою швидкістю, а відліки запам'ятовувалися з найменшою помилкою. Вся процедура має на меті збереження значення напруги (чи сили струму) на виході, що істотно для АЦП.

Квантуваль - це нелінійна система, чия функція полягає в перетворенні значень кожного відліку вхідного сигналу $x[n]$ у одне з кінцевого безліч заданих величин.

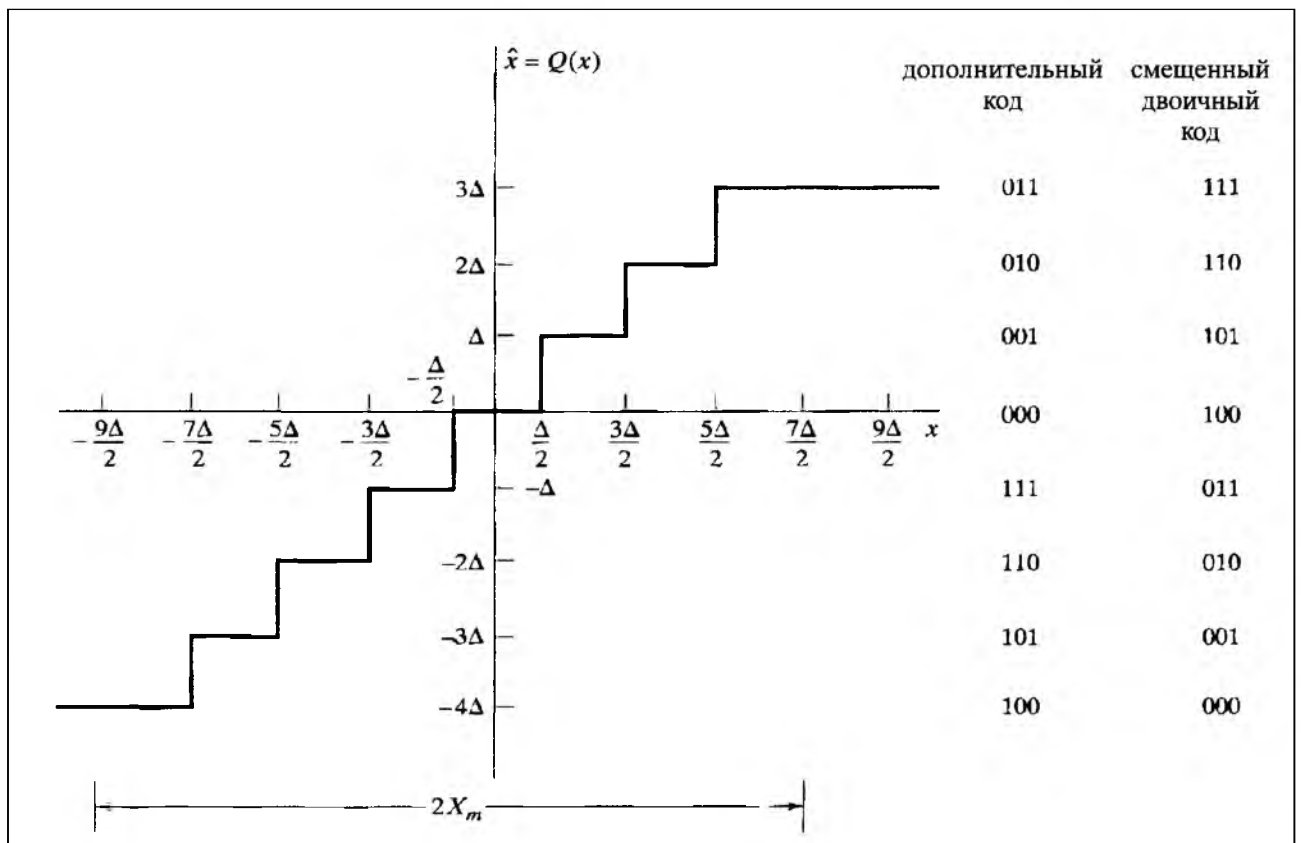


Позначимо цю операцію як

$$\hat{x}[n] = Q(x[n])$$

і називатимемо члени послідовності $\hat{x}[n]$ квантованим відліком. Квантуваль можна визначати з рівномірними або нерівномірними рівнями. Однак, оскільки ми плануємо робити обчислення над відліками, варто вибирати рівномірне квантування.

Типовий рівномірний квантуваль, характеристики в якому закруглені до найбільш близького рівня квантування показаний на діаграмі.



Передусім помітимо, що такий квантователь підходить для сигналів як з позитивними, так і негативними відліками (біполярний). Якщо апріорі відомо, що відліки, що входять, завжди позитивні (чи негативні), то зручніше вибрати інший розподіл рівнів квантування. Наведений квантуватель має парне число рівнів квантування. Але, оскільки один з них зайнятий нулем, виходить різна кількість позитивних і негативних рівнів квантування. Як правило, число рівнів квантування дорівнює мірі двійки і, оскільки ця міра значно більше восьми, відмінністю у кількості негативних і позитивних рівнів можна нехтувати.

У наведеному прикладі – вісім рівнів, і ми можемо позначити їх за допомогою двійкового коду з трьох бітів. (У загальному випадку для кодування 2^{B+1} рів-

нів можна використовувати двійкові $(B+1)$ – значні числа.) В принципі для позначення рівнів можна брати будь-які символи, і існує безліч двійкових схем кодирования, що мають свої переваги і недоліки залежно від конкретного застосування. Наприклад, правий стовпець двійкових чисел ілюструє зміщений двійковий код, в якому рівні нумеруються числами в двійковій системі числення в порядку їх зростання, починаючи з самого негативного. Проте при цифровій обробці сигналу прийнятніше користуватися двійковим кодом, що дозволяє виконувати арифметичні дії безпосередньо з мітками як з числовим представленням квантованих відліків. Лівий стовпець показує розмітку рівнів, що відповідає додатковому двійковому коду. Така система представлення чисел зі знаками використовується у більшості комп'ютерів і мікропроцесорів. Таким чином, це, можливо, найбільш зручний спосіб нумерації рівнів квантування. Замітимо між іншим, що зміщений двійковий код можна перетворити в додатковий код, просто додаючи найбільш значущий біт. У додатковому двійковому коді крайній лівий, або найбільш значущий, біт відповідає за знак числа, а інші представляють або ціле, або дробове абсолютне значення числа. Ми припускаємо, що має місце остання ситуація, тобто вважаємо, що двійкова кома коштує між двома самими лівими знаками. Значення двійкових символів додатко-

вого коду при $B = 2$ вписані в таблиці. У загальній ситуації $(B+1)$ – бітовий дріб, записаний в додатковому двійковому коді вигляду

$$a_0 \diamond a_1 a_2 \dots a_B,$$

представляє число

$$-a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \dots + a_B 2^{-B}.$$

Відмітимо, що символ "o" означає "двійкову точку" числа. Взаємозв'язок між словами коду і рівнями квантування сигналу залежить від параметра X_t з. У загальній ситуації цей параметр називається повномасштабним рівням АЦП. Як правило, його значення коливається від 10 до 1В.

Двоїчний символ	Чисельне значення \hat{x}_B
0 \diamond 11	3/4
0 \diamond 10	1/2
0 \diamond 01	1/4
0 \diamond 00	0
1 \diamond 11	-1/4
1 \diamond 10	-1/2
1 \diamond 01	-3/4
1 \diamond 00	-1

Відстань між сусідніми рівнями квантування складає

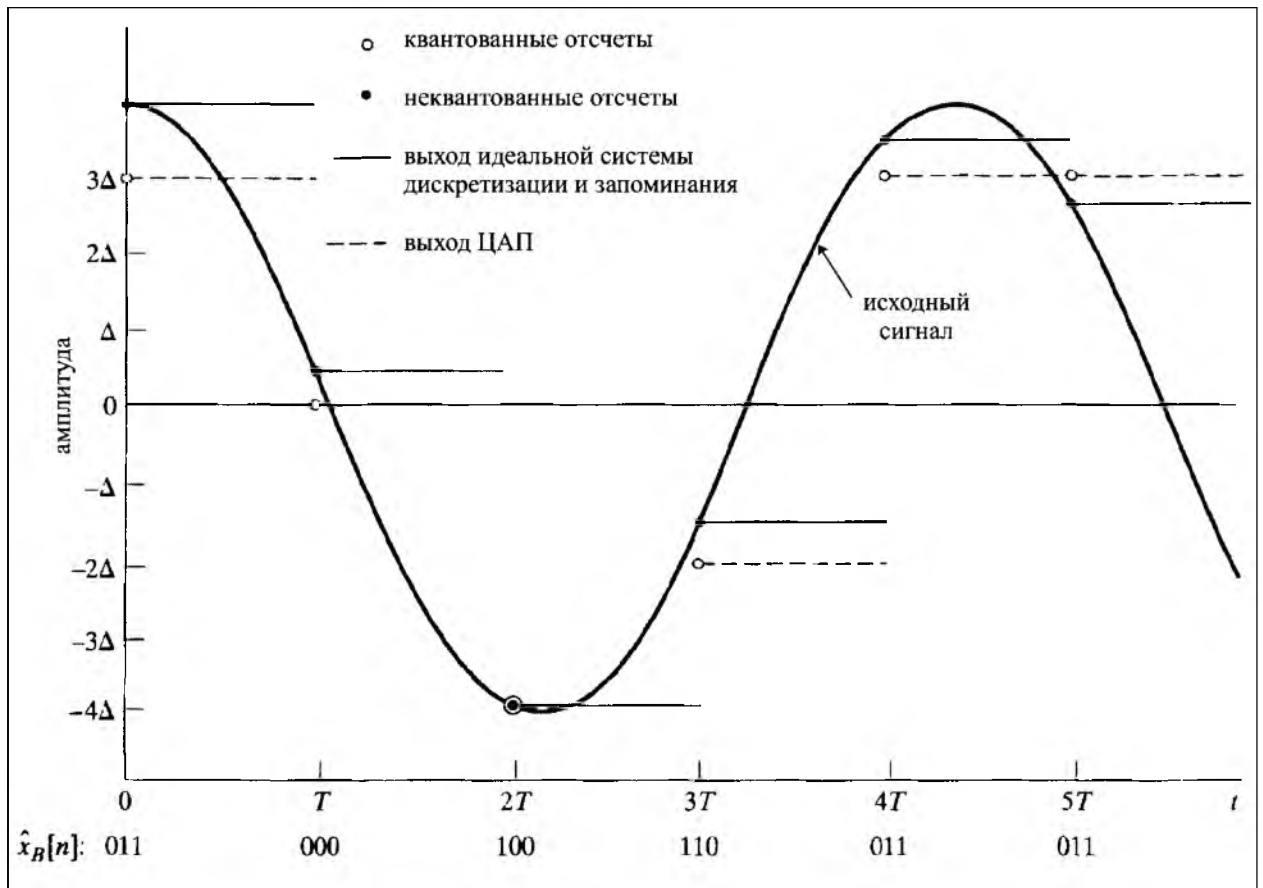
$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}.$$

Найменші рівні квантування ($\pm\Delta$) відповідають найменшому значущому біту двійкового слова. Більше того, має місце чисельне співвідношення між словом коду і квантованими відліками :

$$\hat{x}[n] = X_m \hat{x}_B[n],$$

оскільки ми припустили, що $\hat{x}_B[n]$ - двійкове число, що задовольняє нерівності $-1 \leq \hat{x}_B[n] < 1$ (у додатковому двійковому коді). При такій схемі кодований відлік $x_B[n]$ прямо пропорційний квантованому відліку (в додатковому двійковому коді), і тому його можна використати як чисельне представлення амплітуди. Дійсно, прийнято припускати, що вхідний сигнал нормалізований таким чином, що чисельні значення квантованого відліку $\hat{x}[n]$ і двійкового слова $\hat{x}_B[n]$ співпадають, і тому не виникає необхідності проводити межу між квантованими відліками і їх двійковими позначеннями.

На діаграмі показаний простий приклад квантування і кодування відліків синусоїдальної хвилі за допомогою 3-бітового квантувача.



Неквантовані відліки $\hat{x}[n]$ позначаються чорними точками, а квантовані - кружечками. На цьому малюнку представлений вихідний сигнал ідеальної схеми дискретизації і запам'ятовування. Пунктирна лінія означає "вихід ЦАП". Вхідний аналоговий сигнал $x_a(t)$ виходить за межі повномасштабного рівня квантувача, окремі позитивні відліки виявляються "зрізаними".

4.1.3. Аналіз помилок квантування

Очевидно, що квантований відлік $\hat{x}[n]$ у більшості випадків відрізняється від істинного значення $x[n]$. Різниця між ними називається помилкою квантування і визначається по формулі

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n].$$

Наприклад, у разі 3-бітового квантувача при $\Delta/2 < x[n] \leq 3\Delta/2$ значення $\hat{x}[n]$ дорівнює Δ , звідки

$$-\Delta/2 < e[n] \leq \Delta/2.$$

Для даної ситуації ця нерівність залишається вірною завжди, коли

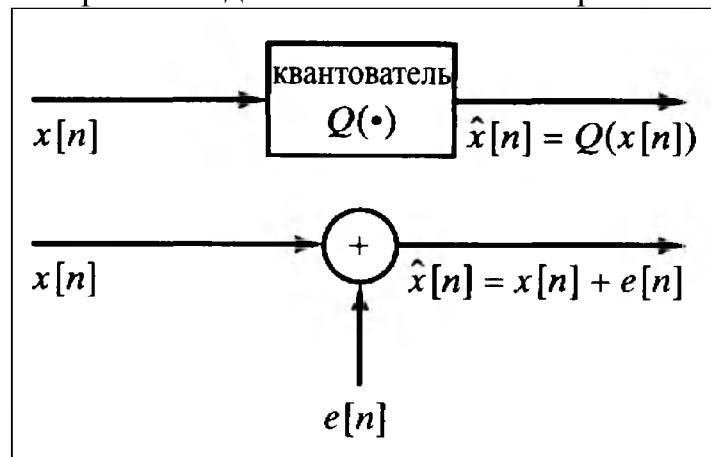
$$-9\Delta/2 < x[n] \leq 7\Delta/2.$$

У загальному випадку $(B + 1)$ - бітового квантувача із значенням Δ помилка квантування задовольняє зазначеній нерівності за умови

$$(-X_m - \Delta/2) < x[n] \leq (X_m - \Delta/2).$$

Якщо $x[n]$ виходить за цю область, як відбувається при $t = 0$ то помилка квантування за абсолютною величиною перевищує $\Delta/2$, і говорять, що відліки зрізуються.

Спрощена, але корисна модель квантовача зображена нижче.



Модель в точності еквівалентна квантовачу за умови, що нам відома помилка $e[n]$.

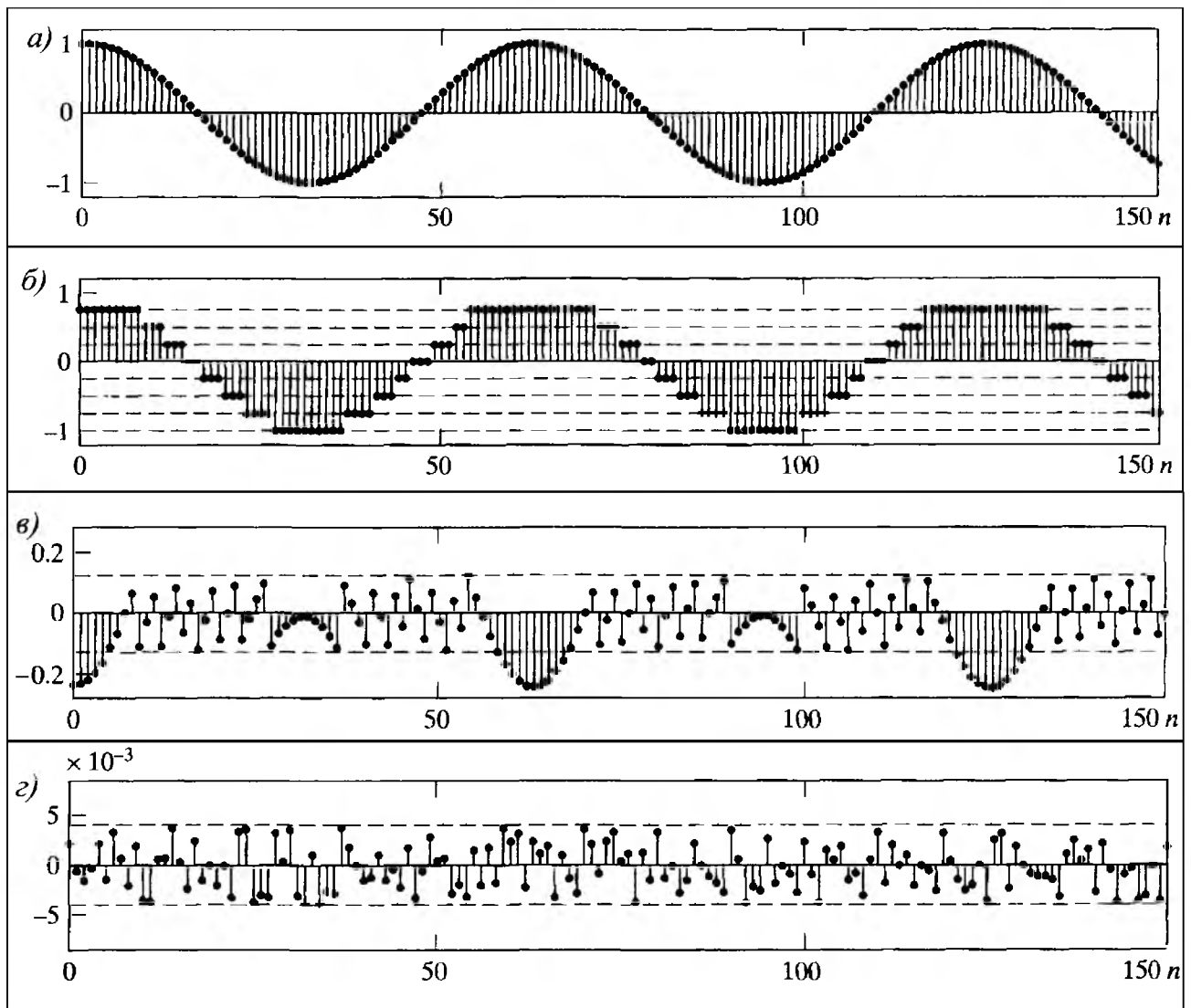
У більшості випадків, проте, помилка невідома, і у таких ситуаціях є корисною статистична модель. Статистичне представлення помилок квантування виходить з наступних припущень:

1. Послідовність помилок $e[n]$ є послідовністю відліків стаціонарного випадкового процесу.
2. Послідовність $e[n]$ не корелює з послідовністю $x[n]$.
3. Випадкові величини процесу помилок не корелюють між собою, тобто помилки - це випадковий процес, що описує білий шум.
4. Вірогідність помилок розподілена рівномірно на відрізок помилок квантування.

Приклад шуму квантування: а) неквантовані відліки сигналу

$x[n] = 0.99 \times \cos\left(\frac{n}{10}\right)$; б) квантовані відліки сигналу $x[n]$, отримані за допомогою

3 - бітового квантовача; в) послідовність помилок квантування сигналу $x[n]$ 3 - бітовим квантовачем; г) послідовність помилок квантування сигналу $x[n]$ 8 - бітовим квантовачем



Оскільки сусідні відліки шуму не корелюють один з одним, а $e[n]$ – з $x[n]$ можна вважати, що $e[n]$ – рівномірно розподілена послідовність типу білого шуму. Середнє значення величини $e[n]$ дорівнює 0, а її дисперсія обчислюється за формулою:

$$\sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12}.$$

Для $(B+1)$ – бітового квантувача з повномасштабним рівнем X_m дисперсія шуму, або потужність, дорівнює

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12}.$$

Звичайною мірою кількості деградації сигналу із-за аддитивного шуму служить відношення сигнал/шум (С/Ш), визначене як відношення дисперсії (потужності) сигналу до дисперсії шуму. Виражене в децибелах (дБ) відношення сигнал/шум для $(B+1)$ -бітового дискретизатора дорівнює

$$C/Ш = 10 \lg \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) = 10 \lg \left(\frac{12 \cdot 2^{2B} \sigma_x^2}{X_m^2} \right) = 6,02B + 10,8 - 20 \lg \left(\frac{X_m}{\sigma_x} \right).$$

Звідси витікає, що при додаванні кожного біта до довжини слова, що означає рівні квантування, С/Ш збільшується приблизно на бдБ.

4.1.4. Перетворення цифрового сигналу в аналоговий

У термінах перетворення Фур'є відновлення відбувається по формулі:

$$X_r(j\Omega) = X(e^{j\omega})H_r(j\Omega),$$

де $X(e^{j\omega})$ - ДВПФ послідовності відліків, а $X_r(j\Omega)$ - Фур'є-образ відновленого неперервного сигналу. Ідеальний фільтр нижніх частот описується характеристичною функцією:

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T. \end{cases}$$

При такому виборі $H_r(j\Omega)$ співвідношення між відновленим сигналом $x_r(t)$ і послідовністю $x[n]$ має вигляд

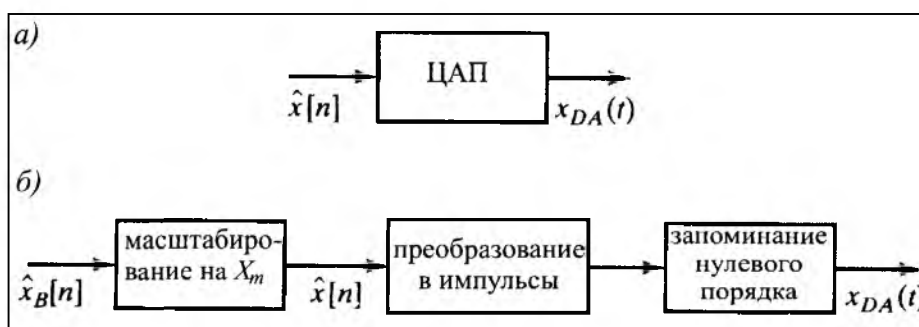
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}.$$

Система, що відновлює сигнал $x_r(t)$ по послідовності $x[n]$, називається ідеальним дискретно-безперервним перетворювачем (ДНП).

Фізичною реалізацією ДНП служить ідеальний цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП), до якого приєднується апроксимований фільтр нижніх частот. ЦАП отримує на вході послідовність двійкових слів і видає безперервний сигнал виду

$$x_{ЦА}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_m \hat{x}_B[n] h_0(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] h_0(t - nT),$$

де $h_0(t)$ - імпульсна характеристика системи запам'ятовування нульового порядку.



ЦАП зберігає в пам'яті квантовані відліки одного кроку дискретизації, як це робить схема дискретизації і запам'ятовування з неквантованими вхідними відліками. Якщо для представлення ефектів квантування використати модель аддитивного шуму, маємо рівність:

$$x_{ЦА}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t - nT).$$

Введемо функції

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT),$$

$$e_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t - nT)$$

і перепишемо через них формулу:

$$x_{ЦА}(t) = x_0(t) + e_0(t).$$

Компонента $x_0(t)$ відноситься до вхідного сигналу $x_a(t)$, $x[n] = x_a(nT)$.

Шумовий сигнал $e_0(t)$ залежить від послідовності шумів квантування $e[n]$ так само, як $x_0(t)$ залежить від відліків неквантованого сигналу. Після перетворення Фур'є формула набуває вигляду:

$$X_0(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]H_0(j\Omega)e^{-j\Omega nT} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega T n} \right) H_0(j\Omega) = X(e^{j\Omega T})H_0(j\Omega).$$

Оскільки

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a \left(j \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right),$$

то

$$X_0(j\Omega) = \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a \left(j \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right) \right] H_0(j\Omega).$$

Якщо частоти $X_a(j\Omega)$ обмежені значенням π/T , то зсунуті копії цього сигналу не накладаються один на одного. Тому реакцією компенсуючого поновлюючого фільтру з КЧХ

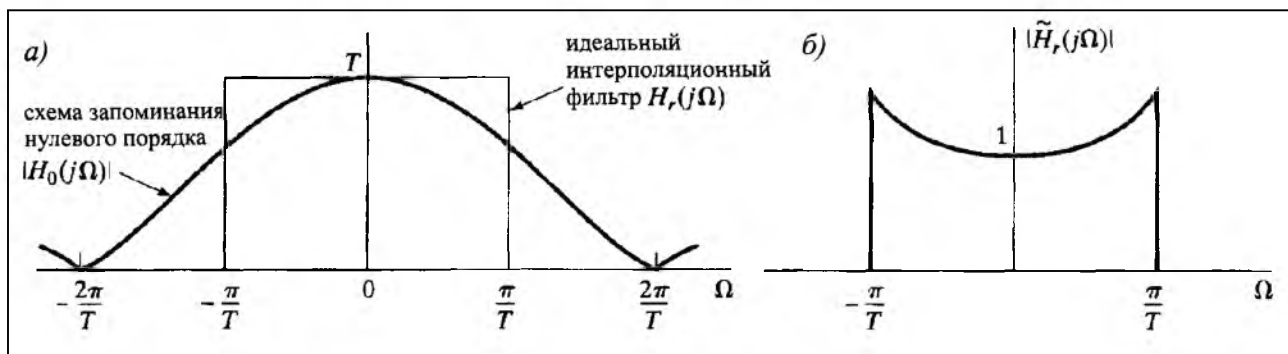
$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{H_r(j\Omega)}{H_0(j\Omega)}$$

на сигнал $x_0(t)$ буде $x_0(t)$. Легко показати, що КЧХ фільтру запам'ятовування нульового порядку дорівнює

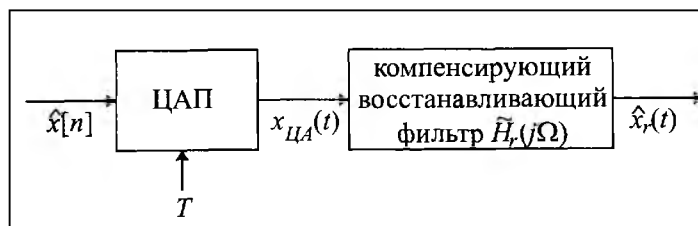
$$H_0(j\Omega) = \frac{2 \sin(\Omega T/2)}{\Omega} e^{-j\Omega T/2}.$$

Отже, КЧХ компенсуючого відновлюючого фільтру має вигляд:

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)} e^{j\Omega T/2}, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \pi/T. \end{cases}$$



Розглянемо ЦАП, за яким йде ідеальний компенсуючий відновлюючий фільтр.



Вихідний сигнал такої системи буде рівний

$$\hat{x}_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

Інакше кажучи, вихідний сигнал можна записати як

$$\hat{x}_r(t) = x_a(t) + e_a(t),$$

Якщо дискретна система лінійна і стаціонарна, то вихідний сигнал усієї системи розкладається в суму:

$$\hat{y}_r(t) = y_a(t) + e_a(t),$$

де

$$Y_a(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) H_{aa}(j\Omega) X_c(j\Omega).$$

Тут $H_{aa}(j\Omega)$, $H_0(j\Omega)$ і $\tilde{H}_r(j\Omega)$ – КЧХ фільтру захисту від накладення спіктров, фільтру запам'ятовування нульового порядку в ЦАП і відновлюючого фільтру нижніх частот відповідно.

Функція $H(e^{j\Omega T})$ - це КЧХ дискретної системи. Аналогічно, припускаючи, що шум квантування, АЦП, що вноситься, є білим шумом з дисперсією $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$, можна показати, що спектр потужності шуму на виході описується функцією

$$P_{e_a}(j\Omega) = \left| \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) \right|^2 \sigma_e^2,$$

тобто вхідний шум квантування послідовно міняється в результаті дискретного і безперервного фільтрування. В припущеннях про незначне накладення спектрів ефективна КЧХ усій системи, що реагує сигналом $y_r(t)$ на вхід $x_c(t)$, буде дорівнювати

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) H_{aa}(j\Omega).$$

Якщо фільтр захисту від накладення спектрів ідеальний і компенсація поновлюючого фільтру теж ідеальна, то ефективна КЧХ описується формулою:

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c. \end{cases}$$

Інакше розумну модель ефективної характеристики дає формула

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) H_{aa}(j\Omega).$$

Ця формула підкаже, що компенсація недоліків, що з'являються на будь-якій з чотирьох стадій, в принципі може бути включена у будь-який з членів, наприклад дискретна система може містити відповідну компенсацію для фільтру захисту від накладення спектрів або системи запам'ятовування нульового порядку, або відновлюючого фільтру, або для усіх відразу. На додаток до фільтрування, що описується останньою формулою, співвідношення нагадує про те, що вихідний сигнал буде засмічений відфільтрованим шумом квантування.