

1. Квантування сигналів у цифрових системах

Цифрова система обробки сигналів - це дискретна система, що описується різницеvim рівнянням і реалізована програмним шляхом на ЕОМ або апаратним шляхом у вигляді спеціалізованого цифрового обчислювача (процесора обробки сигналів, DSP).

Для зображення коефіцієнтів системи й відліків сигналу, що обробляється, у цифровій системі використовуються елементи пам'яті (реєстри, комірки пам'яті), розрядність яких кінцева. Операційні пристрої (суматори, помножувачі) також мають обмежену розрядність. Отже, коефіцієнти системи й відліки сигналу, що обробляється, зображаються з обмеженою точністю. Обмеження розрядності елементів пам'яті й операційних пристроїв системи приводить до *операції квантування*.

Квантування - це нелінійна операція. Її введення в алгоритм обробки сигналу, що описується лінійним дискретним рівнянням, викликає появу помилок у реалізації алгоритму. Ці помилки називаються *помилками квантування*.

У даному розділі описуються форми зображення й способи кодування чисел, ефекти, пов'язані з виконанням арифметичних операцій над числами, способи квантування чисел, джерела помилок (похибок) квантування, а також наводяться оцінки шуму квантування вхідного сигналу й оцінки відповідного шуму на виході системи.

1.1. Зображення й кодування чисел

Дискретний сигнал є послідовністю відліків (чисел), що набувають довільних значень у деякому діапазоні.

Цифровий сигнал - це квантований за рівнем дискретний сигнал, тобто квантована послідовність відліків (чисел), які можуть набувати лише кінцевий ряд дискретних за величиною значень - рівнів квантування. Значення відліків цифрового сигналу відображаються числами у вибраній системі числення.

Розглянемо форми зображення й способи кодування чисел, а також ефекти, пов'язані з виконанням арифметичних операцій над числами.

Позиційні системи числення

Під *системою числення* (СЧ) розуміється спосіб зображення чисел за допомогою символів, що мають певну кількість значень.

Позиційною системою числення (ПСЧ) називається система числення, в якій кількісне значення кожного символу визначається ще й місцем (позицією), яке займає даний символ у записі числа.

Основою p позиційної СЧ називається число різних символів, що використовуються в даній ПСЧ.

У цифрових системах найбільш широко використовується зображення чисел у двійковій ($p = 2$), десятковій ($p = 10$) і шістнадцятковій ($p = 16$) системах числення. У табл. 1 наведені символи, що використовуються у вказаних СЧ.

Будь-яке число A можна зобразити у вигляді розкладання за ступенями ПСЧ:

$$A = \pm a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p^1 + a_0 p^0 + a_{-1} p^{-1} + \dots + a_{-m} p^{-m}, \quad (1)$$

де a_i - символи, що використовуються в даній ПСЧ. Число A в системі числення з основою p записується у вигляді послідовності символів a_i :

$$A(p) = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} \dots a_{-m}. \quad (2)$$

Символи в системах числення

Таблиця 1

Система числення	Символи
Двійкова	0,1
Десяткова	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
Шістнадцяткова	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Кожний символ a_i , займає одну позицію в записі числа, яку називають *розрядом*. Коефіцієнт p^i при символі a^i називається *вагою* (ваговим коефіцієнтом) i -го розряду.

Приклад 1.

Зобразимо ціле десяткове число 109 і правильні десяткові дробу 0,6875 і 0,2 у двійковій і шістнадцятковій системах числення відповідно до (1) і (2). Результати наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Приклади представлення чисел у системах числення

$A_{(10)}$	p	Розкладання	$A_{(p)}$
109	2	$1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	1101101
	$\frac{1}{6}$	$6 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 = 6 \cdot 16^1 + D \cdot 16^0$	6D
0,6875	2	$1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4}$	0.1011
	$\frac{1}{6}$	$11 \cdot 16^{-1} = B \cdot 16^{-1}$	0.B
0,2	2	$0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} + 0 \cdot 2^{-6} + \dots$	0.00110011...
	$\frac{1}{6}$	$3 \cdot 16^{-1} + 3 \cdot 16^{-2} + 3 \cdot 16^{-3} + \dots$	0.333...

Як видно з прикладу 1, цілі десяткові числа зображаються у двійковій (шістнадцятковій) СЧ точно за допомогою обмеженої (що визначається величиною числа) кількості розрядів. Для точного зображення правильного десяткового дробу у двійковій (шістнадцятковій) СЧ може знадобитися необмежена кількість розрядів (наприклад $A_{(10)} = 0,2$).

Переведення числа з однієї ПСЧ в іншу здійснюється за наступними алгоритмами.

Алгоритм підстановки. Для переведення числа $A_{(p_1)}$ із ПСЧ з основою p_1 в ПСЧ з основою p_2 необхідно в зображення числа $A_{(p_1)}$ у вигляді (1) підставити значення основи p й розрядів a_i , записані в ПСЧ із основою p_2 , і обчислити отриману суму добутоків.

Приклад 2

Переведення двійкового числа $A_{(p_2)} = 1011.01$ в десяткову СЧ:

$$A_{(10)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} = 11,25.$$

Переведення десяткового числа $A_{(10)} = 11,25$ у двійкову СЧ:

$$A_{(2)} = 1 \cdot 1010^{+1} + 1 \cdot 1010^0 + 10 \cdot 1010^{-1} + 101 \cdot 1010^{-10} \approx 1011,01.$$

Алгоритм послідовного ділення (переведення цілого числа). Для переведення цілого числа $A_{(p_1)}$ із ПСЧ з основою p_1 в ПСЧ з основою p_2 необхідно послідовно ділити число $A_{(p_1)}$ на число p_2 , записане в ПСЧ з основою p_2 , і виписати послідовно всі залишки від ділення, починаючи з останнього.

Приклад 3

Переведення десяткового числа $A_{(10)} = 109$ у двійкову СЧ:

$$\begin{array}{r} 109 \overline{) 2} \\ 108 \quad 54 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 54 \quad 27 \quad 2 \\ \quad 0 \quad 27 \quad 13 \quad 2 \\ \quad \quad 1 \quad 12 \quad 6 \quad 2 \\ \quad \quad \quad 1 \quad 6 \quad 3 \quad 2 \\ \quad \quad \quad \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 1 \end{array}$$

$$A_{(2)} = 1101101.$$

Алгоритм послідовного множення (переведення правильного дробу). Для переведення правильного дробу $A_{(p_1)}$ із ПСЧ з основою p_1 в ПСЧ з основою p_2 необхідно послідовно помножити даний дріб на число p_2 , записане в ПСЧ з основою p_1 (перемножуючи тільки дробові частини), і виписати послідовно всі цілі частини отриманих добутоків, починаючи з першого.

Приклад 4

Переведення десяткового дробу $A_{(10)} = 0,6875$ у двійкову СЧ:

$$0,(6875*2)=1,3750$$

$$1,(3750*2)=0,7500$$

$$0,(7500*2)=1,5000$$

$$1,(5000*2)=1,0000$$

$$A_{(2)} = 0,1011.$$

Алгоритм переведення чисел із двійкової СЧ у шістнадцяткову СЧ. Для переведення числа $A_{(2)}$ в шістнадцяткову СЧ необхідно кожен тетраду двійкових чисел ліворуч і праворуч від коми замінити відповідним шістнадцятковим числом. Якщо кількість розрядів двійкового числа ліворуч (праворуч) від коми не кратне чотирьом, необхідно доповнити його ліворуч (праворуч) нулями.

Приклад 5

Переведення двійкового числа $A_{(2)} = 1101101.1011$ у шістнадцяткову СЧ:

$$1101101,1011 \rightarrow 0110\ 1101,1011$$

$$A_{(16)} = 6, D, B.$$

Для переведення чисел із шістнадцяткової СЧ у двійкову СЧ виконується зворотна операція.

Як правило, у пристроях ЦОС числа зображуються у двійковій СЧ, що пояснюється зручністю запам'ятовування й обробки двійкової інформації.

Форми зображення чисел

У системах ЦОС використовуються дві форми зображення чисел: з фіксованою й плаваючою комами.

При зображенні числа у формі з *фіксованою комою* вважається, що положення коми, що відділяє цілу частину числа від дробової частини, фіксовано. Розряди ліворуч від коми відображають цілу частину числа і його знак, а праворуч - дробову частину числа.

Усі розряди числа (разом зі знаковим) утворюють розрядну сітку.

Як правило, у системах ЦОС із фіксованою комою використовується нормування оброблюваних даних так, щоб усі арифметичні операції виконувалися з числами A , по абсолютним значенням, меншим за одиницю:

$$0 \leq |A| < 1. \quad (3)$$

Нехай розрядна сітка числа містить $m = b + 1$ двійкових розрядів. Старший розряд слугує для фіксації знака й називається знаковим. Наступні b розрядів слугують для фіксації дробової частини числа й називаються числовими. Кома фіксована між знаковим і числовими розрядами. У цьому випадку розрядна сітка завдовжки m дозволяє зобразити 2^b відмінних за абсолютним значенням чисел з кроком 2^{-b} і задовольняючих умову (3) у діапазоні

$$0 \leq |A| < 1 - 2^{-b}. \quad (4)$$

Якщо результат арифметичної операції виходить за верхню межу діапазону (4), відбувається переповнення розрядної сітки, що приводить до спотворення результату. За умови (3) указане переповнення може відбутися тільки при операціях додавання й віднімання.

Зображення числа A у формі з плаваючою комою базується на записі

$$A = (\pm \mu)p^{\pm\gamma}, \quad (5)$$

де p - основа системи числення; μ , γ - мантиса й порядок числа A відповідно.

Приклад 6.

Зобразимо двійкове число $A_{(2)} = +101.001$ й відповідне десяткове число $A_{(10)} = 5.125$ у вигляді (5):

$$A_{(2)} = +0.101001 \cdot 2^{+11}, \text{ де } p = 2, \mu_{(2)} = 0.101001, \gamma_{(2)} = 11,$$

$$A_{(10)} = +0.5125 \cdot 10^{+1}, \text{ де } p = 10, \mu_{(10)} = 0.5125, \gamma_{(10)} = 1.$$

У розрядній сітці, що містить m розрядів, $b_\gamma + 1$ розрядів відводиться для зображення порядку числа і його знаку, $b_\mu + 1$ розрядів - для зображення мантиси та її знака. Отже, $m = b_\gamma + b_\mu + 2$.

Діапазон зображення абсолютних значень двійкових чисел у формі з плаваючою комою визначається нерівністю

$$0 \leq |A| < (1 - 2^{-b_\mu}) \cdot 2^{2^{b_\gamma} - 1}. \quad (6)$$

З порівняння нерівностей (4) і (6) видно, що діапазон зображення чисел у формі з плаваючою комою істотно більший, ніж у разі зображення чисел з фіксованою комою. Проте найпростіші в реалізації й швидкодії цифрові системи використовують зображення чисел у формі з фіксованою комою. На цьому принципі будується більшість обчислювачів і ряд цифрових процесорів, наприклад сімейства TMS320 (TMS32010, TMS32020, TMS32050 і ін.).

Кодування чисел

Для кодування чисел із фіксованою комою використовуються три основні способи: прямий, зворотний і додатковий.

Розглянемо особливості способів кодування, виконуючи операції з додатними та від'ємними двійковими числами A :

$$A = \pm 0.a_1a_2\dots a_b,$$

що задовольняють умову (3), розрядна сітка чисел містить $m = b + 1$ розрядів.

Прямий код числа A формується за наступним правилом. У знаковий розряд коду записується 0 (для додатних чисел) або 1 (для від'ємних чисел), числові розряди коду відповідають числовим розрядам (дробової частини) початкового числа:

$$[A]_{np} = \begin{cases} 0.a_1a_2\dots a_b, \text{ при } & A \geq 0; \\ 1.a_1a_2\dots a_b, \text{ при } & A \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Приклад 7.

Зобразимо додатне число A і від'ємне число B , модуль яких дорівнює $0,10111$, у прямому коді. Відповідно до (7),

$$[A]_{np} = 0,10111 \text{ і } [B]_{np} = 1,10111.$$

Додатковий код числа A формується за наступним правилом. Додатковий код додатного числа збігається з прямим кодом, тобто $[A]_{ood} = [A]_{np}$. Для від'ємних чисел у знаковий розряд коду записується 1, числові розряди початкового числа інвертуються (0 замінюється на 1 і навпаки) і до молодшого числового розряду додається 1, тобто:

$$[A]_{ood} = \begin{cases} 0.a_1a_2\dots a_b, & \text{при } A \geq 0; \\ 1.\bar{a}_1\bar{a}_2\dots\bar{a}_b + 2^{-b}, & \text{при } A \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

При цьому передбачається, що числа A задовольняють умову (3).

Приклад 8.

Зобразимо від'ємне число $A = -0,10111$ у додатковому коді. Відповідно до (8),

$$[A]_{np} = 1,10111 \rightarrow + \begin{array}{r} 1,01000 \\ 1 \\ \hline 1,01001 \end{array}$$

$$[A]_{ood} = 1,01001.$$

Для переведення додаткового коду від'ємного числа в прямий код необхідно інвертувати числові розряди додаткового коду й додати 1 до молодшого розряду.

Приклад 9

Здійснимо зворотнє переведення додаткового коду числа $A = 1,01001$ (з прикладу 8) у прямий код:

1,10110

$$[A]_{\text{дод}} = 1,01001 \rightarrow + \frac{1}{\overline{1,10111}}$$

$$[A]_{\text{нр}} = 1,10111.$$

Слід зазначити, що додатковому коду $[A]_{\text{дод}} = 1,00\dots 0$ відповідає число $A = -1$, яке не можна перевести в додатковий код згідно з алгоритмом (8).

Зворотний код числа A формується за наступним правилом. Зворотний код додатного числа збігається з прямим кодом, тобто $[A]_{\text{зв}} = [A]_{\text{нр}}$. Для від'ємних чисел у знаковий розряд коду записується 1, числові розряди початкового числа інвертуються (0 замінюється на 1 і навпаки), тобто:

$$[A] \stackrel{\text{зв}}{=} \begin{cases} 0.a_1a_2\dots a_b, \text{ при } A \geq 0; \\ 1.\bar{a}_1\bar{a}_2\dots\bar{a}_b, \text{ при } A \leq 0. \end{cases} \quad (9)$$

При цьому передбачається, що числа A задовольняють умову (3).

Приклад 10.

Зобразимо негативне число $A = -0.10111$ у зворотному коді. Відповідно до (9),

$$[A]_{\text{обр}} = 1,01000.$$

Найширше в системах ЦОС використовується зображення чисел у додатковому коді, оскільки при цьому ефективно реалізуються операційні пристрої цифрової системи.

Основними арифметичними операціями над числами в системах ЦОС є додавання і множення. Алгоритми виконання операцій над числами детально описані в літературі. Нас же цікавитимуть питання,

пов'язані з розглядом ефектів квантування в системах ЦОС при виконанні вказаних операцій.

Арифметичні операції над числами з фіксованою комою

При складанні чисел з фіксованою комою, що задовільняють умову (3), може відбутися переповнення розрядної сітки. Розглянемо це явище на прикладі.

Приклад 11

Виконаємо операцію $Y = A + B$, де $A_{(10)} = 0,625$, $A_{(10)}$ і $B_{(10)} = 0,5$, тобто складемо двійкові числа $A_{(2)} = 0,101$ і $B_{(10)} = 0,100$ в додатковому коді. При цьому складові і результат зобразимо за допомогою m двійкових розрядів (в даному прикладі — чотирьох) :

$$\begin{array}{r} [A]_{\text{дон}} = 0,101 \\ + \\ [B]_{\text{дон}} = 0,100 \\ \hline [Y]_{\text{дон}} = 1,001 \end{array}$$

Отже, при складанні двох позитивних чисел отриманий негативний результату (у знаковому розряді 1). Перетворимо результату у прямий код (див. п. 9): $[Y]_{\text{пр}} = 1,111$. Таким чином, $Y = -0,825$ (замість $Y_n = +1,125$). Поява неправильного результату природна, оскільки для зображення цілої частини числа в розрядній сітці не передбачено розрядів.

Операція $Y = F(Y_n)$ при $1 < Y_n < -1$ є нелінійною операцією. На рис. 1 а, подана нелінійна характеристика суматора при складанні чисел у додатковому коді. При переповнюванні відбувається різке спотворення результату. Для зменшення помилок при можливих переповнюваннях розрядної сітки часто використовують суматор із насиченням, характеристика якого зображена на рис. 1, б.

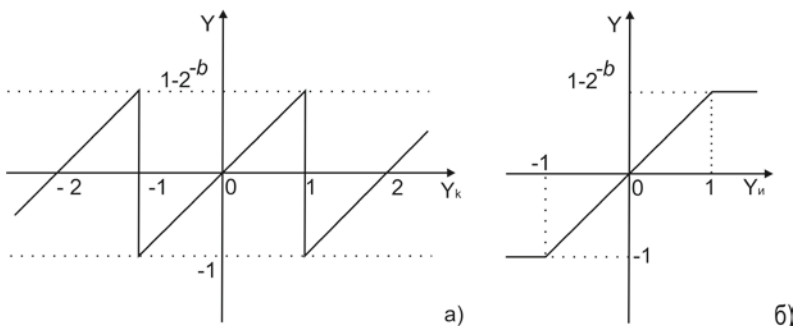


Рис.1. Нелінійна характеристика суматора

Водночас при відсутності переповнення операція складання чисел із фіксованою комою виконується точно в m -розрядній сітці.

Розглянемо тепер операцію *множення* двох чисел із фіксованою комою, причому $m = b + 1$, де b — кількість числових розрядів. Точне значення добутку містить (у загальному випадку) $2b$ числових розрядів і знаковий розряд.

Приклад 12

Виконаємо операцію $Y = AB$, де $A_{(10)} = 0,625$ і $B_{(10)} = 0,375$, тоді перемножимо двійкові числа $A_{(2)} = 0,101$ і $B_{(2)} = 0,011$ ($m = 4, b = 3$). Результат множення дорівнює

$$Y = AB = 0,234375_{(10)} = 0,001111_{(2)} .$$

Початкові співмножники містили $b = 3$ числових розрядів, а добуток містить $2b = 6$ числових розрядів.

Таким чином, якщо кожний із співмножників подається в $(b+1)$ -розрядній сітці (зберігається в $(b+1)$ -розрядному регістрі елемента пам'яті), то для отримання точного результату добуток повинен бути поданий у $(b+1)$ -розрядній сітці (вихідний регістр помножувача повинен мати $2b+1=2m-1$ розрядів). Як правило, у системах ЦОС відповідні регістри мають розрядність $2m$, причому $2b$ розрядів є числовими, а 2 розряди — знаковими.

Водночас при виконанні операції множення переповнення розрядної сітки виникнути не може, оскільки модуль добутку чисел, модулі яких менше 1, завжди також менше 1.

1.2. Квантування чисел і сигналів

Принципіальною відмінністю дискретної системи від цифрової є введення в алгоритм обробки цифрової системи операції квантування відліків (чисел) сигналу, що обробляється, і коефіцієнтів системи. Необхідність введення операції квантування зумовлена обмеженою розрядністю регістрів (елементів пам'яті) цифрової системи.

Способи квантування чисел

Квантування числа — це зображення останнього за допомогою кінцевої кількості (b) числових розрядів. Операція квантування є нелінійною і вносить у зображення квантованого числа A помилку

$$e = F(a) - A, \quad (10)$$

де A — число до квантування; $F(A)$ — число після квантування (після виконання нелінійної операції F).

Кроком квантування Q називається відстань між двома сусідніми рівняннями квантування. Розглядатимемо операцію квантування з постійним кроком. У цьому випадку $Q = \text{const}$. Крок квантування визначається вагою молодшого числового розряду $Q = 2^{-b}$ (основа системи числення $p = 2$).

Зауваження

Далі в даному розділі для зображення чисел використовується двійкова система числення.

Наочно процес квантування декількох чисел (відліків дискретної послідовності) зображений на рис. 2. На рис. 2, *a* пунктирною лінією показаний аналоговий сигнал, з якого отримані відліки дискретної послідовності. Дискретні значення відліків позначені крапками на аналоговому сигналі. На рис. 2, *б* зображений квантований сигнал, значення якого розташовані на

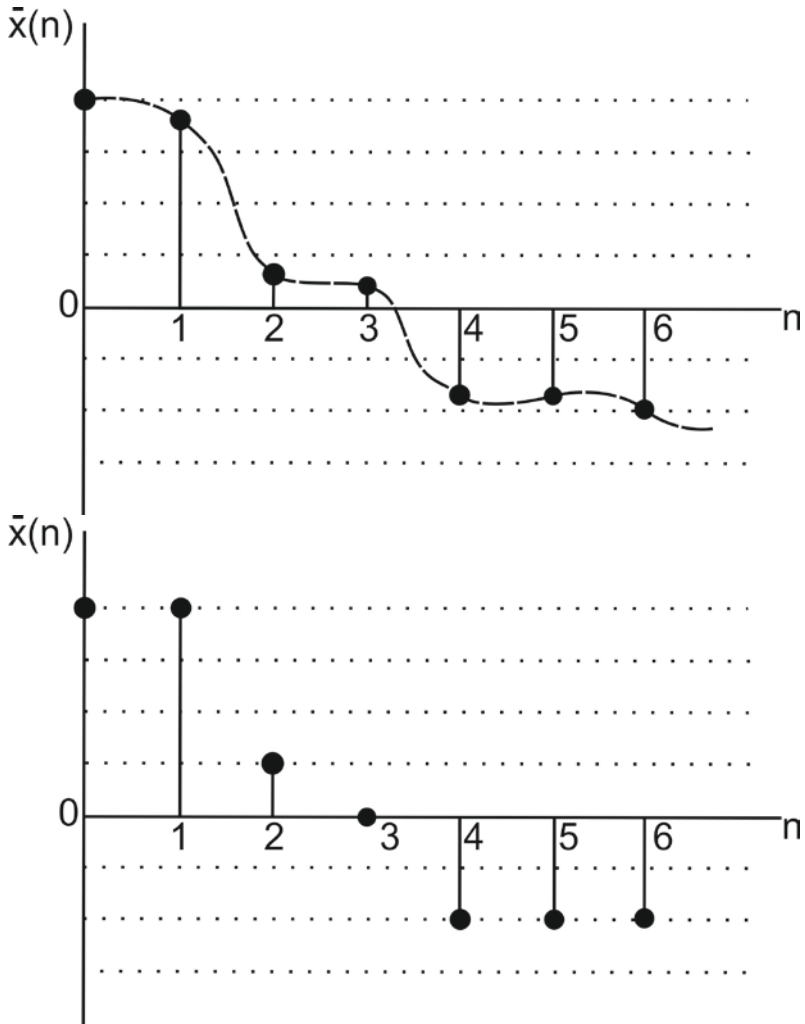


Рис.2. Процес квантування дискретної послідовності

При квантуванні використовується два способи: округлення і усікання. При *округленні* числа до b числових розрядів початкове k -розрядне число ($b < k < \infty$) *замінюється* на найближче b -розрядне (що відповідає вибору найближчого рівня квантування).

Помилка квантування (10) при округленні із застосуванням будь-якого способу кодування відповідає нерівності

$$-Q/2 \leq e \leq Q/2 \quad (11)$$

тобто не перевищує за абсолютною величиною половини кроку квантування $Q = 2^{-b}$. Відзначимо, що в (11) вважається, що $k \gg b$. Характеристика нелінійності, що відповідає операції квантування, подана на рис. 3, а.

Числам A , модуль яких менше ніж $(Q/2)$, відповідають квантовані числа $A_{кв}=0$. Числам, що лежать в інтервалі $(Q/2, 3Q/2)$, відповідають квантовані числа $A_{кв}=Q$ і т. д.

Звичайно при аналізі робиться припущення, що всі можливі значення помилки в межах діапазону (11) рівномірні, тобто помилка квантування є випадковою величиною з рівномірною густиною розподілу. Графік густини розподілу помилки квантування (при округленні) наведений на Рис. 3, б.

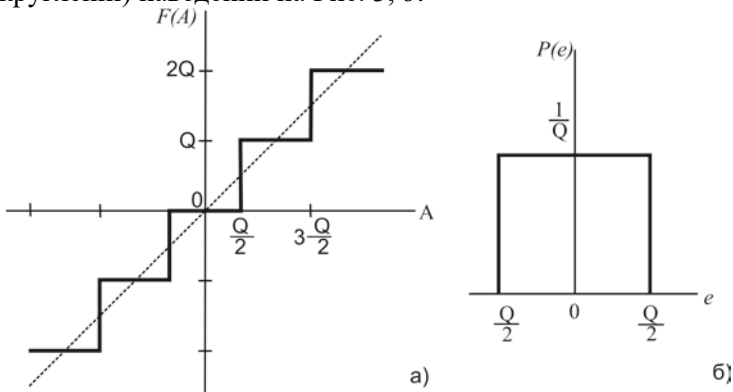


Рис.3. Характеристика нелінійності і густина розподілу помилки квантування при округленні числа

При усіканні k -розрядного числа до b числових розрядів ($b < k \ll \infty$) молодші $(k-b)$ розрядів початкового числа відкидаються. Помилка квантування (14.10) при усіканні задовольняє нерівності (вважаючи, що $k \gg b$):

- для позитивних чисел при будь-якому способі кодування і негативних чисел у додатковому коді

$$-2^{-b} \leq e \leq 0; \quad (12)$$

- для негативних чисел у прямому і зворотному кодах

$$0 \leq e \leq 2^{-b} \quad (13)$$

Характеристика нелінійності, що відповідає операції усікання для додаткового коду, наведена на рис. 4, а. Відповідна густина розподілу помилки квантування зображена на рис. 4, б.

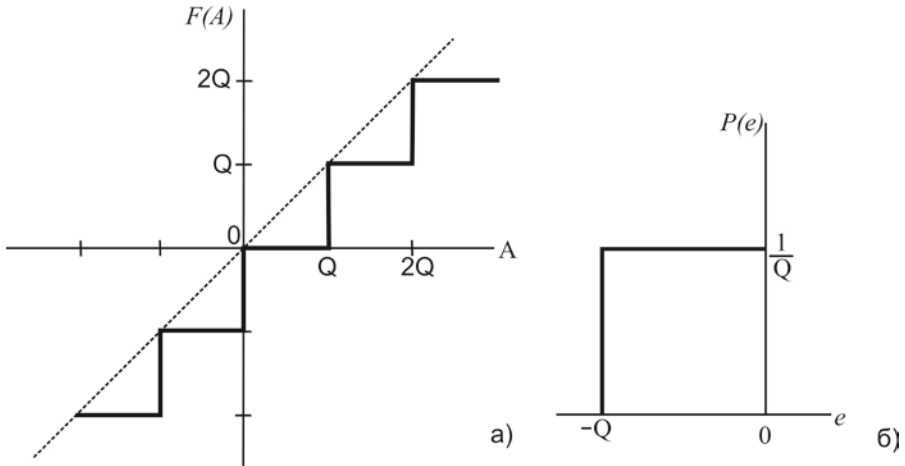


Рис.4. Характеристика нелінійності й густина розподілу помилки квантування при усіканні числа

Лінійна модель процесу квантування вхідного сигналу.

Оцінки шуму АЦП

Для наближеного опису нелінійної операції квантування вхідного сигналу при аналітичному дослідженні процесів у цифрових системах використовується лінійна модель процесу квантування. Лінійна модель процесу квантування вхідного сигналу зображена на рис. 5, а. Дискретизатор Д перетворить аналоговий сигнал $x(t)$ в дискретну послідовність $x(n)$ ($k = \infty$ — необмежена кількість розрядів). До цієї послідовності додається дискретний сигнал, що враховує помилку квантування $e_A(n)$ при формуванні b_A числових розрядів підсумкової цифрової послідовності. Вихідний сигнал лінійної моделі — квантований (цифровий) сигнал $x(n)$.

На практиці операції лінійної моделі (дискретизація і квантування до b числових розрядів) реалізуються в аналогово-цифровому перетворювачі (АЦП), тому помилку квантування (шум квантування) $e_A(n)$ вхідного сигналу часто називають шумом АЦП. Для сигналу помилки $e_A(n)$ вводиться ряд допущень:

- послідовність $e_A(n)$ є стаціонарною і ергодичним дискретним випадковим процесом;
- розподіл вірогідності помилок є рівномірним за діапазоном помилок квантування;
- будь-які два відліки послідовності $e_A(n)$ не корельовано, тобто послідовність $e_A(n)$ є дискретним випадковим процесом типу "білий шум";
- послідовність $e_A(n)$ не корельована з дискретним сигналом $x(n)$.

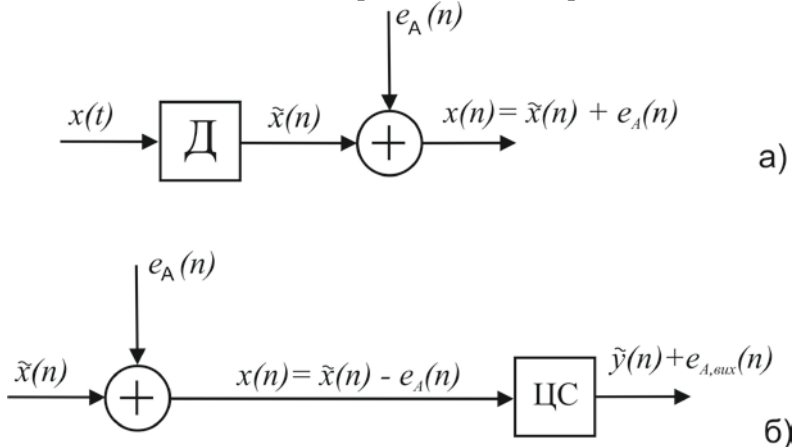


Рис. 5. Лінійні моделі процесу квантування вхідного й вихідного сигналів

Введення вказаних допущень дозволяє достатньо просто проаналізувати ефекти квантування сигналів у цифрових системах. Розглянемо деякі *оцінки вірогідності шуму квантування вхідного сигналу*. Математичне очікування μ_A і дисперсія δ_A^2 помилки квантування $e_A(n)$ визначаються за формулами

$$\mu_A = E[e_A(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} e_A(n) p_A(e) de_A(n)$$

$$\delta_A^2 = E[(e_A(n) - \mu_A)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} e_A^2(n) p_A(e) de_A(n) = E[e_A^2(n)] - \mu_A^2,$$

де $p_A(e)$ — густина вірогідності шуму квантування $e_A(n)$; $E[\cdot]$ — оператор математичного очікування. За цими формулами обчислюються математичне очікування (середнє значення) і дисперсія шуму квантування при операціях округлення й усікання.

Зауваження

Далі в даному розділі вважатимемо, що квантуванню піддаються числа, подані у формі з фіксованою комою в додатковому коді.

З урахуванням вказаного зауваження отримаємо значення математичного очікування і дисперсії шуму АЦП при округленні чисел (графік густини вірогідності $P_A(E)$ шуму квантування наведений на рис. 3)

$$\mu_A = \int_{-\infty}^{\infty} e_A(n) p_A(e) de_A(n) = \int_{-Q_A/2}^{Q_A/2} e_A(n) \frac{1}{Q_A} de_A(n) = \frac{1}{Q_A} \left. \frac{e_A^2(n)}{2} \right|_{-Q_A/2}^{Q_A/2} = 0; \quad (14)$$

$$\sigma_A^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e_A^2(n) p_A(e) de_A(n) = \int_{-Q_A/2}^{Q_A/2} e_A^2(n) \frac{1}{Q_A} de_A(n) = \frac{1}{Q_A} \left. \frac{e_A^3(n)}{3} \right|_{-Q_A/2}^{Q_A/2} = \frac{Q_A^2}{12}, \quad (15)$$

де $Q_A = 2^{-b_A}$ — крок квантування; b_A — кількість числових розрядів АЦП.

Виконуючи аналогічні перетворення при операції усікання чисел (графік густини вірогідності $p_A(e)$ шуму квантування поданий на рис. 4), отримаємо значення:

$$\mu_A = -Q_A/2, \quad \delta_A^2 = Q_A^2/12.$$

Дисперсія шуму АЦП часто виражається в логарифмічному масштабі

$$\delta_A^2 = 1011\lg(Q_A^2/12) = 1011\lg(2^{-2b_A}/12) = -(20b_A \lg(2) + 1011\lg(12)) \approx$$

$$\approx -(6,02b_A + 10,79), \text{дБ} \quad (16)$$

Нагадаємо, що в кодї, що містить b_A+1 розряд, один розряд відображає за знак і b_A розрядів є числовими. Розглянемо також *детерміновану оцінку шуму квантування вхідного сигналу* — абсолютну межу помилки квантування. Ця оцінка з урахуванням виразів (11) - (13) має такий вигляд:

$$E_A = \max_n |e_A(n)| \leq \begin{cases} Q_A/2 = 2^{-b_A-1}, & \text{при округленні;} \\ Q_A = 2^{-b_A}, & \text{при усіканні;} \end{cases} \quad (17)$$

Приклад 13

Оцінимо характеристики шуму АЦП при $b_A=8$ і $b_A=12$. Квантування вхідного сигналу виконується з використанням округлення. Тоді параметри шумового сигналу $e_A(n)$, які визначаються за формулами (14), (16), (17), складають:

$$\mu_A = 0, \quad \delta_A^2 = -58,8\text{дБ}, \quad E_A = 2^{-7} \quad \text{при } b_A=8$$

$$\mu_A = 0, \quad \delta_A^2 = -82,8\text{дБ}, \quad E_A = 2^{-11} \quad \text{при } b_A=12.$$

1.3. Вплив квантування вхідного сигналу на вихідний сигнал цифрової системи

Розглянемо цифрову систему з передавальною функцією $H(z)$ і імпульсною характеристикою $h(n)$, $n = 1, 2, \dots$, що обробляє сигнал за певним алгоритмом. Вважатимемо, що коефіцієнти системи і арифметичні операції, що виконуються в ній, реалізуються точно. *Лінійна модель, що дозволяє оцінити ефекти квантування вхідного сигналу* (тобто складову вихідного шуму, зумовлену квантуванням вхідного сигналу), подана на рис. 5, б, де блок ЦС — цифрова система; $x(n)$ — відліки дискретного (точного) вхідного сигналу; $e_A(n)$ — шум квантування (до b_A числових розрядів) вхідного дискретного сигналу;

$x(n)$ — квантований сигнал; $y(n)$ — корисна складова вихідного сигналу (результат обробки дискретного сигналу $x(n)$); $e_{\text{А,вих}}(n)$ — вихідний шум, зумовлений квантуванням вхідного сигналу. Для цифрової системи, що описується різницеvim рівнянням,

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m).$$

Згідно властивістю лінійності системи має місце рівність

$$e_{\text{А,вих}}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e(n-m) \quad (18)$$

Щодо вхідного шуму вводиться ряд припущень, описаних в п. 2.2.

Зауваження

У подальших перетвореннях використовуються оцінки вірогідності й детермінованої шуму квантування $e_{\text{А}}(n)$ при округленні чисел в додатковому коді. Ці оцінки наведені у формулах (14) - (17).

Наведемо оцінки вірогідності вихідного шуму, зумовленого квантуванням вхідного сигналу. Використовуючи рівність (18), математичне очікування $\mu_{\text{А}} = 0$ і дисперсію $\delta_{\text{А}}^2 = Q_{\text{А}}^2/12$ вхідного шуму квантування, отримаємо математичне очікування й дисперсію вихідного шуму $e_{\text{А,вих}}(n)$ відповідно:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{А,вих}} &= E[e_{\text{А,вих}}] = E\left[\sum_{m=0}^{\infty} h(m)e_{\text{А}}(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} h(m)E[e_{\text{А}}(n-m)] = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{А,вих}}^2 &= E[(e_{\text{А,вих}}(n) - \mu_{\text{А,вих}})^2] = E[e_{\text{А,вих}}^2(n)] = \\ &= E\left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} h(m)e_{\text{А}}(n-m)\right)^2\right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E\left[\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) e_A^2(n-m) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(m)h(k) e_A(n-m) e_A(n-k)\right] = \\
&= E\left[\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) e_A^2(n-m)\right] + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(m)h(k) E[e_A(n-m) e_A(n-k)] = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) E[e_A^2(n-m)] = \frac{Q_A^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) . \quad (20)
\end{aligned}$$

Дисперсію $\delta_{A, \text{вих}}^2$ можна визначити, не тільки використовуючи імпульсну характеристику системи, але і її амплітудно-частотну характеристику. Згідно рівності Парсеваля запишемо:

$$\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| H(e^{j\omega T}) \right|^2 d\omega, \quad (21)$$

де $\left| H(e^{j\omega T}) \right|$ — амплітудно-частотна характеристика цифрової системи. Тоді з урахуванням (21) вираз (20) має такий вигляд:

$$\delta_{A, \text{вих}}^2 = \frac{\delta_A^2 T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| H(e^{j\omega T}) \right|^2 d\omega$$

У логарифмічному масштабі дисперсія вихідного шуму визначається наступним чином:

$$\tilde{\delta}_{A, \text{вих}}^2 = 10 \lg(\delta_{A, \text{вих}}^2) = 10 \lg(\delta_A^2) + 10 \lg\left(\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m)\right), \text{ дБ} \quad (22)$$

Зазначимо, що

- оцінка дисперсії $\delta_{A, \text{вих}}^2$, зумовлена квантуванням вхідного сигналу, не залежить від форми реалізації (пряма, канонічна і т. д.) цифрової системи, оскільки в розрахункових формулах (20), (22) використовується імпульсна характеристика всієї системи;

- за допустимим значенням $\delta_{A,вих}^2$ і відомою АЧХ або імпульсною характеристикою цифрової системи можна визначити допустиме значення дисперсії δ_A^2 вхідного сигналу, яка у свою чергу залежить від розрядності b чисел, що являють вибірки вхідного сигналу;

- при $\mu_A = 0$ дисперсія у логарифмічному масштабі $\delta_{A,вих}^2$ визначається потужністю шуму на виході системи.

Обчислимо *детерміновану оцінку вихідного шуму* $e_{A,вих}(n)$. Використовуючи (17) і (18), отримаємо абсолютну межу вихідної помилки, зумовленої квантуванням вхідного сигналу:

$$\begin{aligned} E_{A,вих} &= \max_n |e_{A,вих}(n)| = \max_n \left| \sum_{m=0}^{\infty} h(m) e_A(n-m) \right| \leq \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| \max_n |e_A(n-m)| = \frac{Q_A}{2} \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)|. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким чином, абсолютна межа помилки квантування вихідного сигналу залежить від імпульсної характеристики системи і не залежить від статичних характеристик вхідного сигналу.

2. Ефекти квантування в цифрових системах

Для спрощення процесу аналізу ефектів квантування в цифрових системах вводиться наступне припущення. Помилки у вихідному сигналі, викликані квантуванням вхідного сигналу, і помилки, зумовлені квантуванням результатів арифметичних операцій в цифровій системі, не залежать одні від одних.

Прийнявши це припущення, можна розглядати вказані складові вихідного шуму незалежно одні від одних. Роздільний розгляд виявляється корисним і для того, щоб оцінити, який внесок у повний вихідний шум роблять окремі складові. На основі такої оцінки розробник може обґрунтовано сформулювати вимоги до АЦП, архітектури й параметрів цифрового пристрою.

В даному розділі описуються: процес формування власного і повного вихідного шуму системи, ефекти переповнення в суматорах, квантування коефіцієнтів і поява граничних циклів у системі.

2.1. Власний шум цифрової системи

Власний шум цифрової системи — це шум, зумовлений квантуванням результатів операцій множення, що виконується в системі. Аналіз власних шумів у цифрових системах набагато складніший, ніж аналіз ефектів квантування вхідного сигналу. Річ у тому, що при аналізі власних шумів необхідно знати:

- точки системи, в яких виконується операція квантування;
- параметри, що генеруються відповідними джерелами шумових сигналів (математичне очікування, дисперсію, абсолютну межу);
- структуру системи (шлях, який проходить кожний шумовий сигнал від свого джерела шуму до виходу системи);
- архітектуру й параметри цифрового пристрою.

Оцінка параметрів власного шуму, зумовленого квантуванням результатів арифметичних операцій, виконується в три етапи:

1. Складається лінійна модель цифрової системи, що враховує шуми квантування в тих точках системи, в яких виконується операція квантування.

2. Визначається реакція системи на кожний шумовий сигнал, тобто визначаються всі складові власного шуму на виході системи.

3. Обчислюється власний шум на виході системи і визначаються його вірогідність і детермінована оцінки.

Розглянемо детально кожний із вказаних етапів.

Лінійна модель цифрової системи

Джерелами шуму квантування сигналів у цифровій системі є помножувачі.

Дійсно, множення значень з b_y числовими розрядами послідовності $x(n)$ на коефіцієнт a дає добуток $ax(n)$, що містить точні значення з $2b_y$ числовими розрядами. Проте обчислений добуток повинен бути відображений послідовністю значень з b_y числовими розрядами (без урахування знакового розряду). При формуванні даного результату з'являється помилка квантування, викликана скороченням кількості розрядів (переходом від $2b_y$ до b_y числових розрядів).

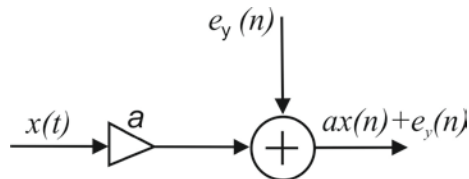


Рис. 7 Лінійна модель помножувача

Лінійна модель помножувача — джерела помилки квантування — зображена на рис. 7. Модель помножувача з кінцевою кількістю розрядів подається у вигляді послідовного з'єднання ідеального помножувача (з необмеженою кількістю розрядів) і суматора, на вхід якого разом із точним значенням добутку поступає помилка квантування $e_y(n)$. На виході моделі формується послідовність квантованих значень добутку з числовими розрядами.

Передбачається, що шумовий сигнал $e_y(n)$, що враховує ефекти квантування на виході помножувача, відповідає припущенням, введеним на сигнал помилки в п. 2.2. Тоді при використанні округлення як способу квантування на основі виразів (14), (15), (17) запишемо наступні оцінки шуму квантування на виході помножувача:

- математичне очікування

$$\mu_y = 0 ; \quad (24)$$

- дисперсія

$$\delta_y^2 = \frac{Q_y^2}{12} , \quad (25)$$

де $Q_Y = 2^{-b_y}$ — крок квантування;

- абсолютна межа

$$E_y \leq \frac{Q_y}{2} = 2^{-b_y - 1} . \quad (26)$$

Цифрова система довільної структури може бути описана за допомогою *лінійної моделі*, що є сукупністю дискретної системи і певної кількості адитивних дій, що враховують ефекти квантування сигналів і що подаються на відповідні точки дискретної системи.

Приклад 13

Складемо лінійну модель цифрової системи із зазначенням джерел шуму квантування. Як цифрову систему розглянемо, наприклад, рекурсивну систему першого порядку.

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} .$$

Рекурсивна система першого порядку має передавальну функцію і імпульсну характеристику

$$h(n) = b_0 (-a_1)^n + b_1 (-a_1)^{n-1} \quad (27)$$

Система стійка, якщо виконується умова $|a_1| < 1$.

Структурна схема реалізації рекурсивної системи в прямій формі наведена на рис. 8,а. Для аналізу ефектів квантування як вхідний сигнал використовуємо шум АЦП $e_A(n)$.

Лінійна модель системи із зазначенням шумових сигналів $e_{y1}(n)$, $e_{y2}(n)$, $e_{y3}(n)$ на виходах помножувачів зображена на рис. 8, б.

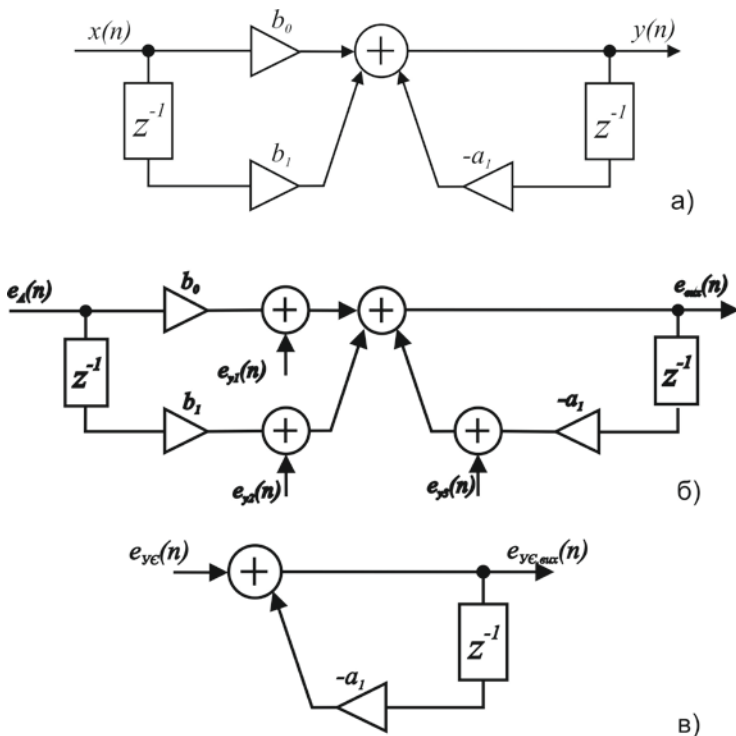


Рис. 8 Структурні схеми рекурсивної системи першого порядку для аналізу ефектів квантування

Визначення складових власного шуму

Складові власного шуму — це реакції цифрової системи на шумові сигнали від кожного джерела шуму.

Використовуємо модель помножувача (рис. 7) для опису кожного джерела шуму (вузла множення).

На основі властивості лінійності цифрової системи помилка квантування на виході системи (власний шум) визначається як суперпозиція помилок $e_{y,i,вих}(n)$. $i = 1, 2, \dots, b$, зумовлених всіма b джерелами шуму квантування, тобто:

$$e_{y,вих}(n) \approx \sum_{i=1}^L e_{y,i,вих}(n) \quad (28)$$

При цьому i -а складова вихідного сигналу помилки (власного шуму) $e_{y_i, \text{вих}}(n)$, викликана i -м джерелом шуму, знаходиться з використанням імпульсної характеристики частини системи ($g_i(m)$) від точки додатка i -го джерела шуму до виходу системи за формулою згортки

$$e_{y_i, \text{вих}}(n) = \sum_{m=1}^n g_i(n-m) e_{y_i}(n-m). \quad (29)$$

Виконуючи перетворення, аналогічні (19), (20), (21), з урахуванням (29) отримаємо оцінки i -ї складової власного шуму:
 - математичне очікування (середнє значення)

$$\mu_{y_i, \text{вих}} = \sum_{m=1}^m g_i(m) E[e_{y_i}(n-m)] = \sum_{m=0}^{\infty} g_i(m) \mu_{y_i} = 0, \quad (30)$$

де $\mu_{y_i} = 0$ згідно з (24);

- дисперсія

$$\delta_{y_i, \text{вих}}^2 = \delta_{y_i}^2 \sum_{m=0}^{\infty} g_i^2(m) = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} g_i^2(m), \quad (31)$$

де $\delta_{y_i}^2 = \frac{Q_y^2}{12}$ згідно з (25);

- абсолютна межа

$$E_{y_i, \text{вих}} = \max_n |e_{y_i, \text{вих}}(n)| \leq E_{y_i} \sum_{m=0}^{\infty} |g_i(m)| = \frac{Q_y}{2} \sum_{m=0}^{\infty} |g_i(m)|, \quad (32)$$

де $E_{y_i} = Q_y / 2$ згідно з (26).

Обчислення власного шуму

Відповідно до виразу (28) власний шум системи визначається сумою всіх шумових складових, отриманих у результаті аналізу проходження шумів квантування від точок їх появи (з виходів b множників) до виходу цифрової системи.

Вірогідність (математичне очікування, дисперсія) і детермінована (абсолютна межа) оцінки власного шуму системи знаходяться наступним чином:

- математичне очікування

$$\mu_{y, \text{вих}} = \sum_{i=1}^L \mu_{y_i, \text{вих}=0}$$

з урахуванням (30) для всіх $i=1, 2, \dots, L$;

- дисперсія

$$\delta_{y, \text{вих}}^2 = \sum_{i=1}^L \delta_{y_i, \text{вих}}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{i=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} g_i^2(m)$$

з урахуванням (31) для всіх $i= 1, 2 \dots, L$;

- абсолютна межа

$$E_{y, \text{вих}} = \sum_{i=1}^L E_{y_i, \text{вих}} \leq \frac{Q_y}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} |g_i(m)|$$

з урахуванням (32) для всіх $i= 1, 2, \dots, L$.

Слід зазначити: чим більше помножувачів містить цифрова система, тим більше її власний шум. Таким чином, власний шум системи залежить від форми реалізації (пряма, канонічна і т. д.) системи. На практиці доцільно використовувати таку форму реалізації, яка б генерувала менший власний шум (зокрема містила б менше джерел шуму — помножувачів). Наприклад, для КИХ-фільтрів із лінійною ФЧХ можна створити форму реалізації, що містить у два рази менше помножувачів порівняно з прямою формою.

Приклад 14

Отримаємо оцінки вірогідності власного шуму рекурсивної системи першого порядку. Лінійна модель системи наведена на рис.8, б, де шумові сигнали $e_{y_i}(n)$, $i = 1, 2, 3$ з математичним очікуванням 0_{y_i} $\mu=$ і дисперсією $\delta_{y_i}^2 = Q_y^2 / 12$, $i = 1, 2, 3$ описують ефекти квантування на виходах помножувачів.

Використовуючи властивість лінійності системи, замінімо три шумові сигнали одним еквівалентним сигналом:

$$e_{y_{\text{ек}}} (n) = e_{y_1}(n) + e_{y_2}(n) + e_{y_3}(n).$$

Його математичне очікування $\mu_{y_{\text{ек}}} = 0$, дисперсія

$$\delta_{y_{\text{эк}}}^2 = \sum_{i=1}^3 \delta_{y_i}^2 = 3Q_y^2 / 12.$$

Відповідна еквівалентна лінійна модель подана на рис. 8, в, де сигнал $e(n)$ обробляється тільки рекурсивною частиною. Отже, еквівалентний шумовий сигнал впливає на еквівалентну систему з передавальною функцією

$$H_{\text{эк}}(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}}$$

і імпульсною характеристикою

$$h_{\text{эк}}(n) = (-a_1)^n.$$

Реакцією системи на сигнал $e_{y_{\text{ээ}}}(n)$ є власний шум $e_{y_{\text{ээ}}, \text{вих}}(n)$. Математичне очікування власного шуму

$$\mu_{y_{\text{эк}}, \text{вих}} = 0,$$

дисперсія

$$\delta_{y_{\text{эк}}, \text{вих}}^2 = \sum_{i=1}^L \delta_{y_i, \text{вих}}^2 = \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} h_{\text{эк}}^2(m) = \frac{3Q_y^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} (-a_1)^{2m} = \frac{3Q_y^2}{12} \frac{1}{1 - (-a_1)^2}.$$

2.2. Повний вихідний шум системи

Нагадаємо, що на початку аналізу ефектів квантування вводилося припущення, що помилки у вихідному сигналі, викликані квантуванням вхідного сигналу, і помилки, зумовлені квантуванням результатів арифметичних операцій у цифровій системі, не залежать одні від одних. На основі цього припущення повний вихідний шум системи, зумовлений квантуванням вхідного сигналу і квантуванням результатів арифметичних операцій, визначається сумою відповідних помилок, тобто

$$e_{\text{вих}}(n) = e_{A, \text{вих}}(n) + e_{Y, \text{вих}}(n), \quad (33)$$

де $e(n)_{\text{вих}}$ — повний вихідний шум системи; $e_{A, \text{вих}}(n)$ — шум квантування вхідного сигналу (шум АЦП); $e_{Y, \text{вих}}(n)$ — власний шум системи.

Вважається, що шумові сигнали, зумовлені квантуванням у довільній точці системи, є стаціонарними випадковими процесами типу "білий шум", не корельовані з квантованим сигналом, а будь-які два джерела шуму створюють некорельовані шуми.

Тоді з урахуванням лінійності моделі системи і рівності (33) отримаємо формули розрахунку оцінок вірогідності повного вихідного шуму системи:

- математичне очікування $\mu_{вих}$ повного вихідного шуму

$$\mu = \mu_{А,вих} + \mu_{у,вих}, \quad (34)$$

де $\mu_{А,вих}$ — математичне очікування шуму АЦП; $\mu_{у,вих}$ — математичне очікування власного шуму системи;

- дисперсія $\sigma_{вих}^2$ повного вихідного шуму

$$\sigma_{вих}^2 = \sigma_{А,вих}^2 + \sigma_{у,вих}^2, \quad (35)$$

де $\sigma_{вих}^2$ — дисперсія шуму АЦП; $\sigma_{у,вих}^2$ — дисперсія власного шуму системи.

У ряді випадків використовується детермінована оцінка повного вихідного шуму системи — абсолютна межа (діапазон зміни) $E_{вих}$ сигналу $e_{вих}(n)$. Така оцінка знаходиться за формулою

$$E_{вих} = \max_n |e_{вих}(n)| \leq E_{А,вих} + E_{у,вих}.$$

Приклад 15

Обчислимо оцінки вірогідності повного вихідного шуму рекурсивної системи першого порядку з урахуванням результатів прикладу 14. На основі виразів (19), (20) і формули (28) імпульсної характеристики системи запишемо оцінки вірогідності вихідного шуму, зумовленого квантуванням вхідного сигналу:

математичне очікування шуму АЦП

$$\mu_{А,вих} = 0;$$

дисперсія шуму АЦП

$$\sigma_{А,вих}^2 = \frac{Q_A^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} [b_0(-a_1)^m + b_1(-a_1)^{m-1}]^2.$$

У результаті математичне очікування повного вихідного шуму системи, що аналізується, згідно з (34),

$$\mu_{\text{вих}} = 0;$$

дисперсія повного вихідного шуму згідно з (35)

$$\delta_{\text{А,вих}}^2 = \frac{Q_{\text{А}}^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} [b_0(-a_1)^m + b_1(-a_1)^{m-1}]^2 + \frac{3Q_y^2}{12} \frac{1}{1-(-a_1)^2}.$$

2.3. Ефекти переповнення в суматорах

Раніше були розглянуті ефекти квантування сигналів у цифрових системах і отримані оцінки дисперсії (потужності) $\delta_{\text{вих}}^2$ повного вихідного шуму і її складових: $\delta_{\text{А,вих}}^2$ — дисперсії складової вихідного шуму, зумовленої квантуванням вхідного сигналу, (шуму АЦП) і $\delta_{\text{у,вих}}^2$ — дисперсії власного шуму системи. Таким чином, корисний сигнал на виході системи присутній на фоні шумів.

Опишемо шумові характеристики системи, а також методи масштабування сигналів, що дозволяють поліпшити вказані характеристики і запобігти появі ефекту переповнення в суматорах системи.

Динамічний діапазон цифрової системи

Важливою характеристикою цифрової системи є відношення сигнал/шум.

Відношенням сигнал/шум R називається відношення потужності $P_{\text{Свих}}$ вихідного сигналу системи до потужності $P_{\text{Швих}}$ шуму на виході системи

$$R = 10 \lg \left(\frac{P_{\text{С,вих}}}{P_{\text{Ш,вих}}} \right), \text{ дБ.}$$

Пороговим відношенням сигнал/шум R_u називається відношення мінімальної потужності $P_{\text{Смінвих}}$ вихідного сигналу системи до потужності $P_{\text{Швих}}$ шуму на виході системи

$$R_u = 10 \lg \left(\frac{P_{\text{Смін,вих}}}{P_{\text{Ш,вих}}} \right), \text{ дБ.}$$

Мінімальна потужність вихідного сигналу має місце при мінімальному рівні a_{\min} вхідного сигналу.

Динамічним діапазоном D цифрової системи називається відношення максимальної амплітуди $a_{D\max}$ до мінімальної амплітуди $a_{D\min}$ вхідного сигналу, при якій забезпечується певне відношення RD сигнал/шум на виході системи

$$D = 20\lg\left(\frac{a_{D,\max}}{a_{D,\min}}\right), \text{ Дб}$$

при

$$R_D = 10\lg\left(\frac{P_{cD \min, \text{вих}}}{P_{\text{ш, вих}}}\right),$$

де $P_{c,D \min, \text{вих}}$ — потужність вихідного сигналу на нижній межі динамічного діапазону (при амплітуді вхідного сигналу, що дорівнює $a_{0 \min}$).

Динамічний діапазон слід контролювати введенням коефіцієнтів масштабування. Використовування даних коефіцієнтів і способи їх отримання розглядаються далі.

Масштабуючі коефіцієнти

При підсумовуванні чисел із фіксованою комою помилка квантування не виникає, якщо регістри суматора мають розрядність не менше розрядності доданків. Проте при підсумовуванні чисел можливе переповнення розрядної сітки (див. п. 2). У цьому випадку результат підсумовування суттєво спотворюється.

Для усунення ефекту переповнення в суматорах вводиться масштабування сигналів із використанням коефіцієнтів масштабування. Масштабування сигналів можна виконати наступними способами.

Автоматичне масштабування. Здійснюється зсув двійкових кодів доданків на входах кожного суматора праворуч на один розряд (або більше при складанні більш ніж двох чисел). При цьому масштабуючий коефіцієнт вхідних сигналів дорівнює $\gamma_i = 2^{-k}$, де i — номер суматора, k — необхідна кількість зсувів.

У результаті такої операції з'являється помилка масштабування. Наведемо її оцінки вірогідності.

При зображенні чисел у прямому і зворотньому кодах помилка масштабування $e_m = 2^{-b}$, де b — кількість числових розрядів складових. Математичне очікування і дисперсія помилки масштабування на вході суматора дорівнює відповідно

$$\mu_M = 0, \quad \delta_M^2 = \frac{2^{-2b}}{2}$$

При зображенні чисел у додатковому коді помилка масштабування $e_m = 2^{-b}$. Математичне очікування й дисперсія цієї помилки дорівнюють відповідно

$$\mu_M = \frac{2^{-2b}}{2}, \quad \delta_M^2 = \frac{2^{-2b}}{2}$$

Ці помилки масштабування можуть бути враховані у лінійній моделі цифрової системи так само, як помилки квантування.

Розглянутий спосіб масштабування дає коефіцієнт малої величини. Тому використовувати автоматичне масштабування в системах складної структури недоцільно, оскільки масштабування сигналів і малої амплітуди приводить до "втрати" таких сигналів при розрахунку реакції.

Масштабування сигналів із використанням імпульсної характеристики. Якщо імпульсна характеристика системи (або її частини) дорівнює $h_i(n)$, то вихідний сигнал системи (або її частини) за формулою згортки дорівнює:

$$y_i(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_i(m)x(n-m)$$

Згідно з формулою згортки, обмеження вихідного сигналу має такий вигляд

$$|y_i(n)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |h_i(m)||x(n-m)|$$

$$\max_n |y_i(n)| \leq \max_n |x(n)| \sum_{m=0}^{\infty} |h_i(m)|. \quad (36)$$

З виразу (36) видно, що при $\max_n |x(n)| \leq 1$ необхідною умовою відсутності переповнення (коли $\max_n |y_i(n)| \leq 1$) є

$$\sum_{m=0}^{\infty} |h_i(m)| \leq 1. \quad (37)$$

Нерівність (37) виконується, якщо ввести коефіцієнт масштабування γ_i таким чином: $h_i(m) = \gamma_i \cdot h_i(m)$. Тоді нерівність (37) запишемо у вигляді

$$\gamma_i \sum_{m=0}^{\infty} |h_i(m)| \leq 1.$$

Отже, умова вибору коефіцієнта масштабування

$$\gamma_i \leq \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} |h_i(m)|}. \quad (38)$$

Коефіцієнти $\gamma_i, i=1,2,\dots$ звичайно вибирають, як і у разі автоматичного масштабування такими, що дорівнюють степеням 2, щоб масштабуєчне множення зводилося до операції зсуву. При цьому слід мати на увазі, що при істотному зменшенні амплітуд сигналів, що проходять через систему, зменшуватиметься відношення сигнал/шум на виході системи порівняно з відношенням сигнал/шум на вході. Зазначимо, що обчислення $y_i, i=1,2,\dots$ за виразом (38) часто приводить до завищених результатів, тобто умова (38) надмірна.

Масштабуючі помножувачі під'єднують на входах системи або на виходах помножувачів.

Масштабування сигналів із використанням амплітудно-частотної характеристики. Даний спосіб масштабування застосовується для системи (або її частин) невисокого (не вище четвертого — п'ятого) порядку. Максимальне значення амплітудно-частотної характеристики системи (або її частини) $\max_{\omega} |H_i(e^{j\omega T})| > 1$. Масштабуванню піддається вхідний сигнал системи (або її частини). При цьому коефіцієнт масштабування розраховується за формулою:

$$\gamma_i = \frac{1}{\max_{\omega} |H_i(e^{j\omega T})|} . \quad (39)$$

Приклад 16

Отримаємо коефіцієнт масштабування вхідного сигналу системи першого порядку з передавальною функцією

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}} .$$

Система, що описана вказаною передавальною функцією, є фільтром нижніх частот (речовинний полюс системи $z^*=0,5$ розташований на карті нулів і полюсів у правій напівплощині). Отже, $\max_{\omega} |H_i(e^{j\omega T})|$ існує при $\omega = 0$, тобто при $z = 1$. Тоді

$$\max |H(e^{j\omega T})| = H(e^{j\omega T}) = H(1) = \frac{2}{0,4} = 4$$

На основі рівності (15.16) визначимо коефіцієнт масштабування $\gamma = 1/4$.

Порівняємо отримане значення γ з коефіцієнтом масштабування, обчисленим за імпульсною характеристикою системи

$$h(n) = 0,5^n + 0,5^{n-1}$$

$$\text{Оцінимо } \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} 0,5^n = \frac{2}{1-0,5} = 4 . \quad , \quad \text{за формулою}$$

(38) коефіцієнт масштабування $\gamma = 1/4$.

Отже, у даному прикладі способи масштабування сигналів з використанням амплітудно-частотної та імпульсної характеристик дають однакові коефіцієнти масштабування.

За допомогою описаного способу масштабування формуються коефіцієнти малої величини, тому застосовувати розглянутий спосіб

масштабування в системах складної структури недоцільно через можливість "втрати" сигналів невисокого рівня.

Розрахунок масштабуючих коефіцієнтів у цифрових системах складної структури виконується за методикою, що базується на використуванні спектрального аналізу і апарату нормованих просторів.

2.4. Ефекти квантування коефіцієнтів цифрової системи

При реалізації цифрової системи значення її коефіцієнтів (коефіцієнти різницевого рівняння або передавальної функції) квантуються, оскільки вони відображаються обмеженою кількістю розрядів, що визначається розрядністю елементів пам'яті цифрової системи. Зміна коефіцієнтів приводить до більшої або меншої зміни значень нулів і полюсів передавальної функції, і, відповідно, до зміни частотних характеристик системи.

На прикладі покажемо, що квантування коефіцієнтів системи може привести навіть до втрати її стійкості, тобто пристрій стає непрацездатним.

Приклад 17

Передавальна функція рекурсивної системи має такий вигляд:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

де $a_1 = -1,603$, $a_2 = -0,645$. Полюси системи комплексно-зв'язані $z_{*1,2} \approx 0,8 \pm 0,05j \approx 0,8016e^{\pm j3,6}$. Вони розташовані усередині одиничного кола ($|z_{*1,2}| < 1$), відповідно, система стійка. Здійснимо квантування коефіцієнтів a_1 і a_2 , тобто округлятимемо їх значення $a_1 = -1,6$, $a_2 = 0,6$. Полюси нової системи дійсні $z_{*1} = 1$, $z_{*2} = 0,6$, причому один із них не лежить усередині одиничного кола. Отже, після квантування коефіцієнтів система стала нестійкою. Важливо зазначити, що операція квантування коефіцієнтів, що є нелінійною за своєю природою, не впливає на лінійність самої системи а лише змінює її частотні й тимчасові характеристики. Іншими словами, виконавши операцію квантування коефіцієнтів, переходимо від однієї лінійної системи до іншої з характеристиками,

дещо відмінними від характеристик початкової системи. Так, зокрема, квантування коефіцієнтів приводить до появи помилки АЧХ $\Delta A(\omega) = A(\omega) - \tilde{A}(\omega)$, де $A(\omega) = \left| H(e^{j\omega T}) \right|$ - АЧХ системи з неквантованими коефіцієнтами; $\tilde{A}(\omega)$ - АЧХ системи з квантованими коефіцієнтами. Слід зазначити, що при розв'язанні задачі синтезу системи необхідно визначати коефіцієнти так, щоб не тільки ідеальні частотні й тимчасові характеристики початкової системи, але і характеристики системи з квантованими коефіцієнтами відповідає заданим вимогам.

Для оцінки впливу операцій квантування коефіцієнтів на параметри системи використовуються функції чутливості. Функція чутливості є коефіцієнтом пропорційності в співвідношенні, що зв'язує відносну зміну величини k-го коефіцієнта з відносною зміною певного параметра системи (положення полюса або нуля на z-площині, частотної характеристики тощо). Ефекти квантування коефіцієнтів істотним чином залежать від властивостей передавальної функції, типу фільтру, структури та ін.

2.5. Граничні цикли

При розгляді ефектів квантування в попередніх пунктах були зроблені певні припущення щодо помилок, що викликають у сигнали, що обробляється, у цифровій системі з обмеженою розрядністю регістрів. По-перше, був прийнятий ряд припущень про статистичні характеристики шумів квантування. По-друге, вважалося, що при обробці сигналу в цифровій системі не відбувається переповнень регістрів суматорів. Водночас, і ті, і інші припущення можуть порушуватися. Це приводить у рекурсивних системах до виникнення специфічних ефектів, які отримали назву граничних циклів. Розрізняють два види граничних циклів:

- граничні цикли низького рівня, пов'язані з квантуванням відліків сигналу, що обробляється, (наявністю в структурі цифрової системи нелінійності);

- граничні цикли високого рівня пов'язані з переповненнями регістрів суматорів (наявністю в структурі цифрової системи нелінійності).

Існує кілька підходів до аналізу граничних циклів. Перший підхід базується на аналізі положення полюсів системи при квантуванні сигналів, другий — на аналізі стійкості цифрової системи.

Граничні цикли низького рівня. Граничними циклами низького рівня називаються незгасаючі коливання, які можуть виникати в рекурсивних системах за відсутності (або малому рівні) дії і ненульових початкових умов в системі. Поява цих коливань зумовлена квантуванням сигналів на виходах помножувачів.

Розглянемо простий приклад, що ілюструє ефект граничного циклу. Цей ефект полягає в тому, що при малому або такому, що дорівнює нулю, рівні вхідного сигналу помилки округлення можуть привести до встановлення на виході системи постійного або періодичного сигналу певного рівня, незалежного від значення вхідного сигналу.

Приклад 18.

Досліджуємо появу граничного циклу в рекурсивній системі першого порядку, що описується рівнянням

$$y(n) = x(n) + ay(n-1), \quad x(n) = 0, \quad y(-1) = 1, \quad a = const.$$

Кожний добуток $ay(n-1)$ заокруглюємо до найближчого цілого за правилом

$$[ay(n-1)]_{ok} = Int[ay(n-1) + 0,5]$$

Значення $[y(n)]_{ok}$ при $a = 0,9$ і $a = -0,9$ подані в табл. 1.

Таблиця 1

Значення вихідного сигналу $[y(n)]_{ok}$ системи першого порядку

п	0	1	2	3	4	5	6
$a = 0,9$	-0,9	0,8	-0,7	0,6	0,5	0,5	0,5
$a = -0,9$	-0,9	0,8	-0,7	0,6	-0,5	0,5	-0,5

З табл. 1 видно, що, починаючи з $n = 4$, вихідний сигнал при $a = 0,9$ набуває значення по черзі +0,5 і -0,5, а при $a = -0,9$ - постійне значення +0,5.

Таким чином, за певних початкових умов і значень коефіцієнтів у системі через нелінійність операцій заокруглення виникає нестійкий режим, який називається граничним циклом.

Зазначимо, що чим більша розрядність зображення чисел, тим менша вірогідність появи граничних циклів низького рівня.

Граничні цикли високого рівня. Граничні цикли високого рівня можуть виникати в рекурсивних системах, якщо при складанні відліків сигналів у регістрах суматорів відбувається переповнення розрядної сітки. У цьому випадку система стає істотно нелінійною, у вихідному сигналі з'являються значні помилки, тобто система фактично непрацездатна. У ряді випадків після переповнення регістра суматора вихідний сигнал системи набуває вигляду періодичного коливання з граничним значенням амплітуди, що дорівнює одиниці. Тому граничні цикли високого рівня часто називають «коливаннями переповнення».

У зв'язку з можливістю виникнення коливань переповнення в рекурсивних системах необхідно вживати заходів для запобігання переповнень регістрів суматорів, тобто виконувати масштабування сигналів.