4. Для наведеної платіжної матриці скласти матрицю ризиків.

Стратегія	$Б_1$	$Б_2$	$Б_3$	$Б_4$	$Б_5$
A_1	100	–200	300	40	800
A_2	500	100	–90	–50	2100
A_3	40	600	200	1100	3150
A_4	800	1200	–700	600	4000

Тема 6. Вибір оптимальної стратегії в умовах ризику, пов'язаного з невизначеністю навколишнього середовища

Література: основна [1–8];
додаткова [10; 13; 15; 23]

Теми рефератів

1. Прийняття рішень в умовах ризику.
2. Вибір оптимальної стратегії в іграх з природою.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1

Продавець фруктів скуповує малину у селян за 15 грн за кошик і продає в місті за 25 грн. За кожний з 40 днів "малинового сезону" він продавав різну кількість кошиків. Це зумовлено випадковістю попиту на цей товар. Торговець помітив, що попит обсягом 4 кошики спостерігався 4 дні, 5 кошиків — 8 днів, 6 — 16 днів, 7 — 10 днів, 8 — 2 дні.

Визначити оптимальну кількість товару, яку необхідно закуповувати продавцю, щоб у заданих умовах попиту на товар отримати максимальні прибутки (за критерієм Байєса —Лапласа).

Розв'язання. Кращим вважається рішення, яке забезпечує найбільше математичне сподівання випадкової величини.

Варіантами рішень будуть обсяги кількості кошиків малини, які слід одноразово закуповувати продавцю у селян. Економічне середовище характеризується попитом на малину. Зрозуміло, що продавцю недоцільно закуповувати менше чотирьох і більше 8 кошиків.

Фінансові результати продавця (прибуток), який він матиме за різними варіантами його можливих рішень та стану попиту, подано в таблиці.

Рішення (кількість закуплених кошиків)	Стан економічної системи (попит у кошиках)				
	$Q1$ (4 кошики)	$Q2$ (5 кошиків)	$Q3$ (6 кошиків)	$Q4$ (7 кошиків)	$Q5$ (8 кошиків)
4	$4 \cdot 25 - 4 \cdot 15 = 40$	$4 \cdot 25 - 4 \cdot 15 = 40$	$4 \cdot 25 - 4 \cdot 15 = 40$	$4 \cdot 25 - 4 \cdot 15 = 40$	$4 \cdot 25 - 4 \cdot 15 = 40$
5	$4 \cdot 25 - 5 \cdot 15 = 25$	$5 \cdot 25 - 5 \cdot 15 = 50$	$5 \cdot 25 - 5 \cdot 15 = 50$	$5 \cdot 25 - 5 \cdot 15 = 50$	$5 \cdot 25 - 5 \cdot 15 = 50$
6	$4 \cdot 25 - 6 \cdot 15 = 10$	$5 \cdot 25 - 6 \cdot 15 = 35$	$6 \cdot 25 - 6 \cdot 15 = 60$	$6 \cdot 25 - 6 \cdot 15 = 60$	$6 \cdot 25 - 6 \cdot 15 = 60$
7	$4 \cdot 25 - 7 \cdot 15 = -5$	$5 \cdot 25 - 7 \cdot 15 = 20$	$6 \cdot 25 - 7 \cdot 15 = 45$	$7 \cdot 25 - 7 \cdot 15 = 70$	$7 \cdot 20 - 7 \cdot 15 = 70$
8	$4 \cdot 25 - 8 \cdot 15 = -20$	$5 \cdot 25 - 8 \cdot 15 = 5$	$6 \cdot 25 - 8 \cdot 15 = 30$	$7 \cdot 25 - 8 \cdot 15 = 55$	$8 \cdot 25 - 8 \cdot 15 = 80$

Дані таблиці можна інтерпретувати так: якщо продавець малини закупить 7 кошиків, а попит на малину не перевищуватиме 5 кошиків, він отримає тільки 20 грн. Найбільший прибуток при цьому він зможе отримати тоді, коли попит на малину так само становитиме 7 кошиків. На максимальний прибуток він зможе розраховувати тільки тоді, коли закупить 8 кошиків при попиті 8 кошиків. Однак у цьому разі за інших станів попиту — 5, 6, 7 кошиків — він отримає прибуток тільки відповідно 5, 30, 55 грн. Якщо попит буде тільки 4 кошики, продавець зазнає збитків, позаяк половина товару не буде продана.

За даними частоти настання протягом 40 днів "малинового сезону" різних варіантів попиту на малину обчислимо ймовірність їх настання:

$p_1(Q1) = 4/40 = 0{,}1;$

$p_2(Q2) = 8/40 = 0{,}2;$

$p_3(Q3) = 16/40 = 0{,}4;$

$p_4(Q4) = 10/40 = 0{,}25;$

$p_5(Q5) = 2/40 = 0{,}05.$

Найімовірнісніший прибуток продавця від прийнятого рішення можна обчислити як математичне сподівання випадкової величини (його фінансових результатів) за формулою

$$\mathrm{M}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i X_i,$$

де p_i — імовірність настання i-ї події (отримання i-го варіанта фінансового результату); X_i — значення i-го варіанта випадкової події (фінансового результату продавця).

Обчислимо прибуток продавця, якщо він вирішить закупити тільки 4 кошики:

M(4) = 0,1 · 40 + 0,2 · 40 + 0,4 · 40 + 0,25 · 40 + 0,05 · 40 = 40 грн.

Обчислимо прибуток продавця, якщо він вирішить закупити тільки 5 кошиків:

M(5) = 0,1 · 25 + 0,2 · 50 + 0,4 · 50 + 0,25 · 50 + 0,05 · 50 = 47,5 грн.

Обчислимо прибуток продавця, якщо він вирішить закупити тільки 6 кошиків:

M(6) = 0,1 · 10 + 0,2 · 35 + 0,4 · 60 + 0,25 · 60 + 0,05 · 60 = 50 грн.

Обчислимо прибуток продавця, якщо він вирішить закупити тільки 7 кошиків:

M(7) = 0,1 · (–5) + 0,2 · 20 + 0,4 · 45 + 0,25 · 70 + 0,05 · 70 = 42,5 грн.

Обчислимо прибуток продавця, якщо він вирішить закупити тільки 8 кошиків:

M(8) = 0,1 · (–20) + 0,2 · 5 + 0,4 · 30 + 0,25 · 55 + 0,05 · 80 = 28,75 грн.

Таким чином, за данних умов попиту на малину продавцю слід закуповувати 6 кошиків малини. Таке рішення забезпечить отримання ним максимально можливого прибутку за даних умов попиту на малину — 50 грн.

Приклад 2

За даними попереднього прикладу визначити оптимальну стратегію продавця за критерієм Вальда.

Розв’язання. Згідно з критерієм Вальда оптимальна стратегія продавця

$$W = \max_i \min_j a_{ij} = \max\,(40;\ 25;\ 10;\ -5;\ -20) = 40.$$

Таким чином, оптимальною стратегією продавця малини буде закупівля 4 кошиків малини, тоді за будь-якого попиту на малину він матиме ґарантований прибуток 40 грн.

Приклад 3

За даними прикладу 1 визначити оптимальну стратегію продавця малини за критерієм Севіджа.

Розв'язання. Складемо матрицю ризиків. У цій матриці кожний елемент обчислюється за формулою $r_{ij} = c_i - a_{ij}$, де $c_j = \max a_{ij}$ (максимальне значення у стовпці j), тобто виграш А в оптимальному варіанті.

Наведемо матрицю ризиків.

Рішення (кількість закуп-лених кошиків)	$Q1$ (4 ко-шики)	$Q2$ (5 ко-шиків)	$Q3$ (6 ко-шиків)	$Q4$ (7 ко-шиків)	$Q5$ (8 ко-шиків)
4	0	10	20	30	40
5	15	0	10	20	30
6	30	15	0	10	20
7	45	30	15	0	10
8	60	45	30	15	0

За умовою критерію Севіджа оптимальною буде стратегія

$$S = \min_j \max_i r_{ij} = \min(40; 30; 30; 45; 60) = 30.$$

Слід зазначити, що мінімальні ризики (втрати) продавець матиме як за другою, так і за третьою стратегією, тобто купуючи 5 та 6 кошиків.

Завдання для самостійного опрацювання

1. Знайти найкращі стратегії за критеріями Байєса–Лапласа, Вальда і Севіджа для платіжної матриці.

Стратегія	$Б_1$	$Б_2$	$Б_3$	$Б_4$	$Б_5$
A_1	100	300	500	800	200
A_2	400	–350	400	150	–300
A_3	700	500	300	–50	–250
A_4	1100	850	600	–150	100
A_5	1500	1300	700	450	150
A_6	1650	1500	950	300	–50
A_7	1650	1800	250	350	150