

Лекція 6

Оцінка та аналіз спектра

1. Вступ

Перетворення даних з часової області на частотну розглядається при вивченні перетворення Фур'є (ДПФ і ШПФ). У даній лекції розглядаються оцінки та аналіз спектра в частотній області. Взагалі, графіки залежності амплітуд чи фаз гармонік від частоти часто більш вдало представляють дані чи сигнали, якщо сигнали мають випадкову природу. Вибираючи згідно з деяким критерієм певні гармоніки та відкидаючи інші, можна суттєво стиснути дані. Спектральний аналіз виявився корисним у таких галузях, як вивчення сигналів техніки зв'язку або змодельованих відгуків людської електроенцефалограми (ЕЕГ) при діагностиці хвороб головного мозку, інших біологічних сигналів, метеорологічних даних, в управлінні технологічним процесом та вимірі спектру шуму при розробці оптимальних лінійних фільтрів.

Існуючі методи оцінки спектра можна розділити на параметричні та непараметричні. Непараметричні методи включають періодограми, модифіковані періодограми Барлета (Barlett) і Уелша (Welsh) і метод Блекмена-Тьюкі (Blackman-Tukey). Переваги: всі ці методи можна реалізувати з використанням швидкого перетворення Фур'є; недоліки: якщо дані надаються короткими словами, роздільна здатність за частотою обмежена. Крім того, щоб отримати значимі результати, слід бути дуже обережними. З іншого боку, параметричні методи як обчислювально ефективніше, а й можуть давати більший дозвіл. Втім, перед оцінкою діапазону процесу необхідно спочатку побудувати досить точну модель цього процесу. Якщо вибрано параметричний підхід, найчастіше спектр виводиться з параметрів авторегресійної моделі сигналу.

При виконанні непараметричного спектрального аналізу потрібно обійти безліч підводних каменів (накладення, гребінцеві спотворення, кінцева довжина даних, просочування спектральних складових та розмивання спектра дуже важливі).

Негативний вплив просочування спектральних складових і розмивання можна мінімізувати, обмеживши дані за допомогою відповідної вагової функції. Дискретні дані по одній вибірці множаться на дискретні значення вибраної вагової функції. Основними властивостями вагової функції є ширина смуги шумового (або прямокутного) еквівалента, коефіцієнт розширення спектра, втрати (часу) при обробці даних у найгіршому випадку та смуга мінімального дозволу. При кореляції областей, що перекриваються, показано, що усереднення спектра з кількох зважених фрагментів даних замість безпосереднього обчислення спектра всіх зважених даних дає значно кращу оцінку спектра. При зміщувальному ефекту зважування показано, як втрати енергії сигналу та зміщення постійної складової зважених даних можна усунути, обробивши дані до зважування.

Статистична оцінка включає визначення математичного очікування статистичних величин, виведених із вибірок сукупності. Втім, під час аналізу з допомогою часових

рядів зазвичай доступні не вибірки генеральної сукупності, взяті одночасно, а дискретні дані, отримані як функція часу. Цей момент зазвичай належить несуттєвим, оскільки приймається ергодична гіпотеза: властивості даних часового ряду збігаються з властивостями передбачуваних вибірок. Але потрібно навести кілька статистичних визначень.

Середнє значення часового ряду, що складається з елементів даних $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, дорівнює математичному очікуванню $E[x(n)]$:

$$E[x(n)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n), \quad (1)$$

де E - оператор математичного очікування. Дисперсія того ж ряду виражається як

$$\text{var}[x(n)] = E\{[x(n) - \bar{x}(n)]^2\}, \quad (2)$$

Автоковаріаційна матриця $x(n)$ записується так:

$$c_{xx}(m) = E\{[x(n) - \bar{x}(n)][x(n+m) - \bar{x}(n+m)]\}, \quad (3)$$

де через m позначено запізнення елементів даних, а через $\bar{x}(n)$ записано $E[x(n)]$. Припускаючи кінцеву реалізацію, спектральну щільність потужності можна записати як

$$P_E(\omega) = \sum_{m \rightarrow -\infty}^{\infty} c_{xx}(m) \exp(-i\omega m). \quad (4)$$

Зазначимо, що якщо на відміну від тривалих стохастичних процесів розглядати сигнали кінцевої тривалості, більш правильним буде використовувати спектральну щільність енергії. Спектральна щільність потужності має розмірність $\text{В}^2\text{Гц}^{-1}$. Якщо оцінюється статистичний параметр α , зміщення (відхилення) оцінки визначається як різницю істинного значення (взятого з генеральної сукупності) та оцінки:

$$\text{зміщення} = \alpha - E|\alpha| \quad (5)$$

Якщо зміщення дорівнює нулю, оцінка збігається з істинним значенням; якщо зміщення не дорівнює нулю, воно представляє помилку визначення α та оцінене значення α називається *зміщеним*. Хороші алгоритми оцінки зміщення не допускають. Дисперсія α є мірою ширини максимуму функції розподілу густини ймовірності α . При невеликій дисперсії піки досить вузькі, а при дисперсії, що прагне до нуля, оцінене значення прагне до значення з генеральної сукупності (справжнього), якщо оцінка не зміщена. Якщо дисперсія прагне до нуля зі збільшенням кількості елементів даних N , оцінку називають *переконливою*. Якщо вона неспроможна, оцінки будуть флуктувати з амплітудою, що збільшується, від реалізації до реалізації зі збільшенням елементів даних. Отже, потрібно, щоб статистичні оцінки були незміщені та переконливі.

Особливості оцінки спектра методами періодограм розглянуті далі. Показано, що

оцінки спектра, виведені як періодограми, неспроможні, тобто послідовні реалізації дають флюктуючі оцінки, незміщені тільки для великих наборів даних. Для отримання стійких і точніших оцінок вирізаються блоки даних, спектри яких потім усереднюються. Ця ідея реалізована у методі модифікованих періодограм Барлетта та Уелша. Також розглянуто непараметричний метод Блекмена-Тьюкі. Метод полягає в наступному: спочатку обчислюється зважена автокореляційна функція даних, і за її ШПФ виходить енергетичний спектр. Оцінка спектра за методом Блекмена-Тьюкі характеризується більшою добротністю, ніж інші методи з використанням періодограм.

Крім того, слід визначити добротність оцінок спектральної щільності потужності, що дозволить порівняти різні оцінки. Як вираз для добротності оцінки було запропоновано відношення квадрата середнього спектральної щільності потужності до її дисперсії:

$$Q = \frac{\{E[P_E(f)]\}^2}{\text{var}[P_E(f)]}. \quad (6)$$

2. Принципи оцінки спектру

Спочатку розглянемо форму сигналу напруги в залежності від часу. Ця форма сигналу може дати корисну інформацію. Наприклад, це може бути синусоїда, яку природно характеризувати її амплітудою, частотою та фазою. Точніше, можна вважати, що такий сигнал складається з однієї гармоніки відомої частоти з певною амплітудою і фазою. Як альтернатива подання сигналу як функції напруги від часу його можна представити двома графіками: залежності амплітуди від частоти та залежності фази від частоти. Оскільки синусоїда — це єдиний сигнал, який має одну амплітуду, одну фазу і одну частоту, на графіках амплітуди та фази синусоїди буде розташована одна точка. За допомогою аналізу Фур'є можна показати, що всі сигнали можна математично представити як суму синусоїдальних сигналів, кожен з яких має свою амплітуду і фазу на заданій частоті. Отже, будь-який сигнал можна альтернативно уявити залежністю амплітуди від частоти і фази від частоти. Дані графіки називаються амплітудним та фазовим спектрами. Дані спектри важливі, оскільки вони пропонують додатковий спосіб подання сигналу, з якого ясніше видно інформацію про частотний зміст сигналу. Спостережувані форми спектрів та зміни в них дуже корисні при розумінні та інтерпретації сигналів. Амплітудний та фазовий спектри у свою чергу дуже часто дають більше корисної інформації, ніж сигнали. Тема перетворення з часової області в частотну і назад було розглянуто у курсі ЦОС раніше. Були викладені концепції перетворення періодичних сигналів в частотну область за допомогою ряду Фур'є і комплексного ряду Фур'є. Там було показано, що частоти синусоїдальних компонентів періодичного сигналу, відомі як Фур'є - компоненти, гармонійно пов'язані один з одним, тобто кожен кратний першій гармоніці f , де

$$f = \frac{1}{T_p}$$

де T_p - період повторення сигналу. Відомо, що відстань між будь-якою парою сусідніх гармонік однакова і дорівнює $f = 1/T_p$, так що дана величина називається ще *роздільною здатністю за частотою* або *частотною роздільною здатністю*. Амплітуда амплітудного спектра вимірюється у вольтах. Приклад періодичного сигналу імпульсів напруги подано на рис. 1 а, а на рис. 1 б і зображені відповідно амплітудний і фазовий спектри даного сигналу.

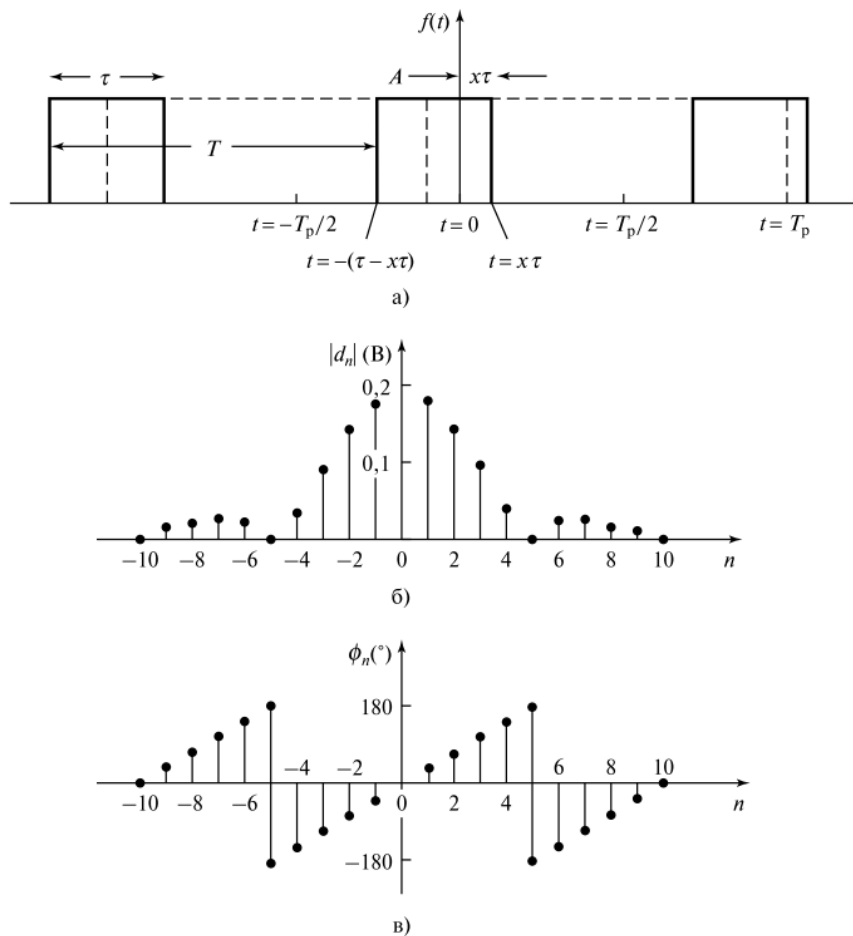


Рис. 1. Сигнал $f(t)$ (а); амплітудний спектр $|d_A|$ (б); фазовий спектр ϕ_n (в)

Неперіодичні, але безперервні сигнали можна перетворити з часової у частотну область з використанням перетворення Фур'є.

Амплітуда цього перетворення має розмірність ВГц^{-1} і, якщо зобразити її в залежності від частоти, отримаємо амплітудний спектр. Отже, площа під кривою між двома частотами характеризує "середню" напруга сигналу для частотних компонентів, що лежать між зазначеними двома частотами. Зводячи в квадрат "амплітуди" обчислених Фур'є - компонентів, отримаємо спектральну щільність енергії сигналу в ДжГц^{-1} . Терміном "спектр" часто називають графіки залежності спектральної щільності амплітуди та спектральної щільності енергії від частоти.

Дані спектральні густини для прямокутного імпульсу наведені на рис. 3.2, а і б.

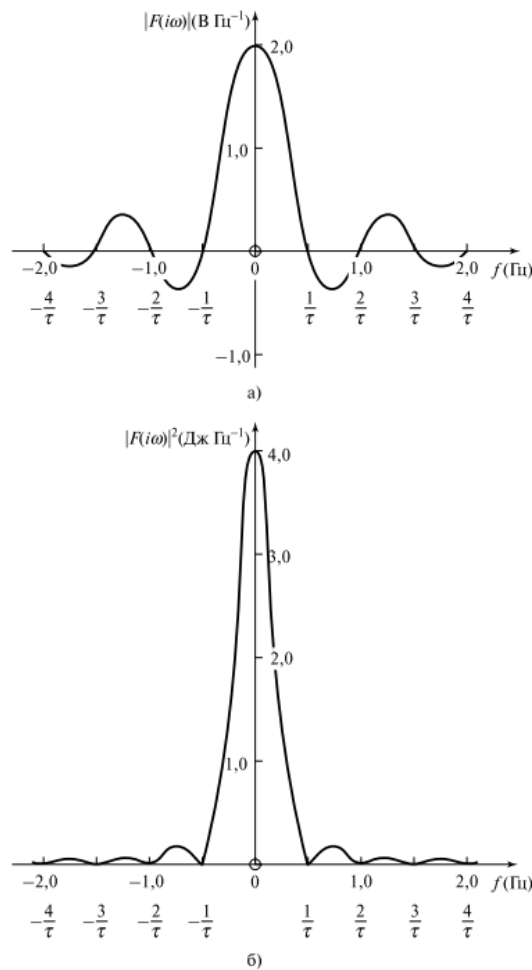


Рис. 2. Імпульс 2 В: а) – амплітудний спектр; б)– енергетичний спектр

Також було показано, як спектри дискретних і неперіодичних імпульсів напруги можна отримати за допомогою дискретного перетворення Фур'є (ДПФ). Було показано, що компоненти ДПФ гармонійно пов'язані з першою гармонійною циклічною частотою $\Omega = 2\pi / (N - 1)T$, так що перша гармоніка дорівнює f , а

$$f = 1 / (N - 1)T, \quad (7,а)$$

де N – число елементів даних, а T – інтервал дискретизації. Оскільки $(N - 1)T$ дорівнює T_p (тривалості дискретного сигналу), перша гармоніка дорівнює

$$f = \frac{1}{T_p}. \quad (7,б)$$

Як і вище, внаслідок гармонійного зв'язку дозвіл за частотою дорівнює $1/T_p$. Отже, чим довше сигнал, тим більшим буде дозвіл спектра.

Фур'є - образ послідовності даних $\{1,0,0,1\}$ дорівнює $\{2,1 + i, 0,1 - i\}$. Отже, амплітуда другої гармоніки, $1 + i$, дорівнює $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Якщо послідовність даних представляє дискретні рівні напруги, амплітуда другої гармоніки - $\sqrt{2}$ В, та її енергія - $(\sqrt{2} \text{ В})^2$, тобто. 2 Дж. Відповідна фаза дорівнює \arctg (уявний

компонент/дійсний компонент) = $\arctg 1 = 45^\circ$. Послідовність даних представлена на рис. 3,а, а її амплітудний і фазовий спектри - на рис. 3, б і 3, в відповідно. Амплітудний спектр має розмірність "вольт".

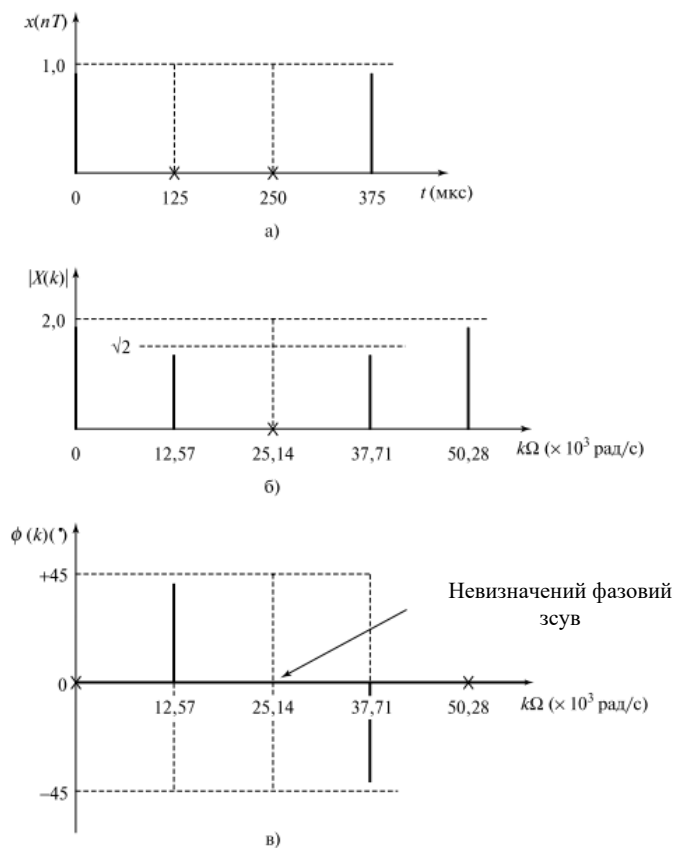


Рис. 3. Графік залежності $x(nT)$ від t (а), графік залежності $|X(k)|$ від k (б); графік залежності $\varphi(k)$ від k (в)

Якщо аналізований сигнал тривалий порівняно з інтервалом часу, протягом якого можна вважати, що сигнал має постійні статистичні моменти, оцінка спектра з великою ймовірністю буде неточною. Сказане також справедливе у тому випадку, коли сигнал сильно зашумлений. У таких ситуаціях необхідно згладити оцінений спектр, щоб отримати покращену оцінку, оскільки згладжування спектру дозволяє усунути елемент випадковості. Відношення сигнал-шум у випадкових сигналах можна покращити шляхом усереднення сигналів; при усередненні K сигналів відношення сигнал-шум покращується \sqrt{K} разів. Отже, один метод підвищення точності оцінки спектру вже є: розділити дані на K частин рівної довжини, визначити спектр кожної частини, а потім усереднити отримані спектри. Таким чином виходять середня амплітуда і середня фаза кожного гармонійного частотного компонента K спектрів, графічне уявлення яких є спектром середніх амплітуда і фази. Точність спектрів можна виразити через їхню дисперсію. Наприклад, чим менше дисперсія спектральної щільності потужності, тим точніше оцінка. Отже, важливо знати, як впливає метод оцінки спектру на його дисперсію. Оцінка спектра шляхом усереднення описана далі, де пояснюється, що оцінка спектра як середнього спектрів K частин даних має меншу дисперсію, ніж оцінка, обчислена

безпосередньо, причому дисперсія зменшується пропорційно числу частин. Навіть якщо шумова складова сигналу мінімальна, тобто, маємо велике відношення сигнал-шум, результат, усереднений по K частинам, як і раніше, значно підвищує точність цього методу модифікованих періодограм. У той же час, розбиття даних на частини призводить до того, що при обчисленні ШПФ використовується менше вибірок, а отже, оцінка спектра виходить грубішою. Цього недоліку можна уникнути, ввівши додаткові нулі. Отже, завжди потрібно пам'ятати, що вимоги до точності оцінки та необхідної спектральної гладкості суперечливі, та необхідно домагатися найкращого компромісу між ними. Інший підхід до згладжування графіків спектральних функцій - це обчислити його за ДПФ зваженої автокореляційної функції даних. Цей принцип покладено у основу методу Блекмена-Тьюкі. Оскільки автокореляційна функція даних складається із середньої суми добутків даних і затриманих копій самих себе, відношення сигнал-шум покращується. Метод Блекмена-Тьюкі дає спектр із більшою добротністю, ніж спектр, отриманий методами модифікованих періодограм.

Зважувальні функції також надають ефект, що згладжує, на спектр. Зокрема, функції з невеликими бічними пелюстками в частотній області відфільтровують шум, який не входить у основну пелюстку, і пропонують поліпшене згладжування. Фактично для реалізації цього різновиду спектрального згладжування потрібно згорнути спектр даних із спектром вибраної зважувальної функції.

Також розглянуто параметричні методи оцінки спектру та інші сучасні методи. Дані методи не настільки вимагають присутності людини, як непараметричні методи, і їх можна автоматизувати. За допомогою параметрів моделі необхідно сформулювати модель даних, на основі якої за функціями частотних характеристик лінійних систем можна отримати спектр даних.

3. Традиційні методи

3.1. Підводні камені

3.1.1. Частота дискретизації та накладення

Виконанню спектрального аналізу має передувати передача аналогових сигналів через фільтр захисту від накладання спектрів, завдання якого - запобігти накладенню дискретного сигналу після наступного етапу аналого-цифрового перетворення. Накладенням називається спотворення спектра сигналу при введенні паразитних (побічних) низькочастотних компонентів внаслідок об'єднання недостатнього фільтра захисту від накладання спектрів і занадто низької частоти дискретизації.

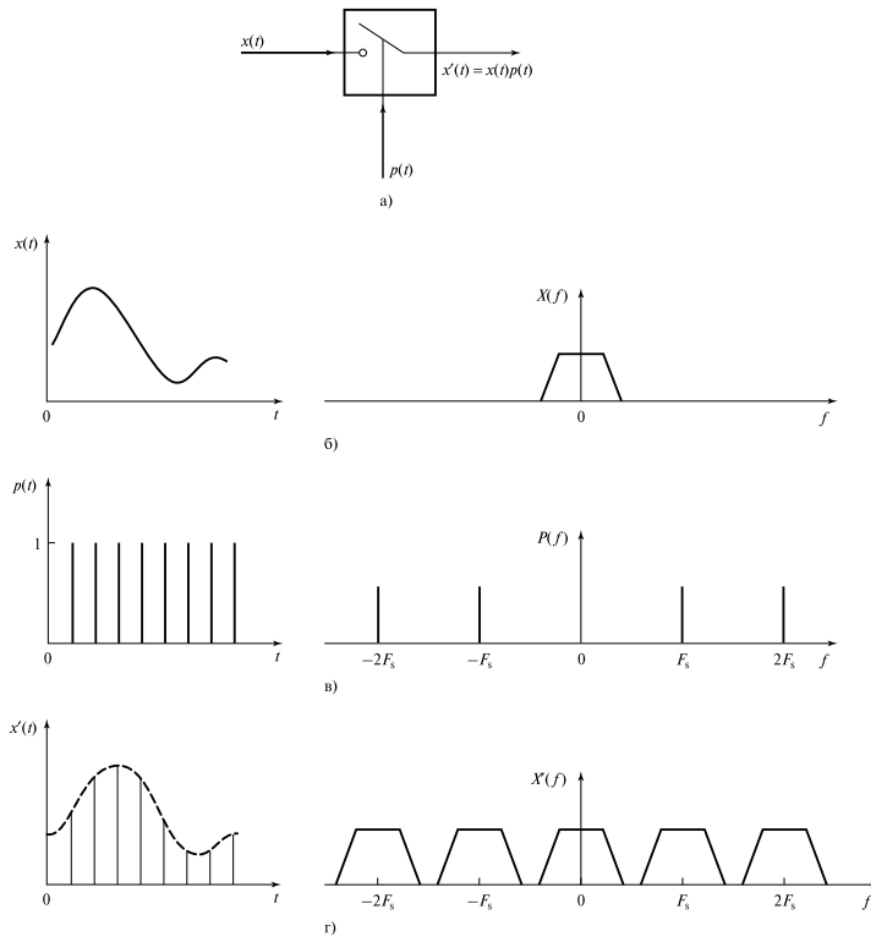


Рис. 4. Процес дискретизації у часовій та частотній областях – спектри сигналу до (б) та після (г) дискретизації

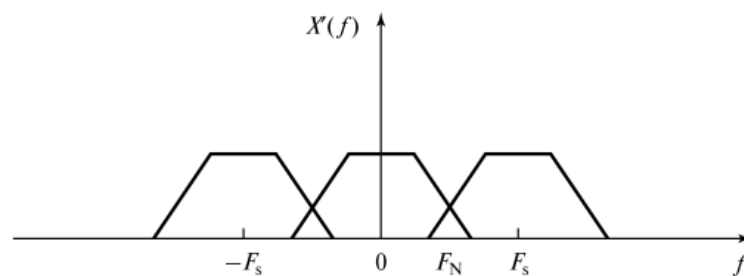


Рис. 5. Накладання спектра сигналу

3.1.2. "Гребінцеве спотворення", або "ефект частоколу"

Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) видає гармонійні амплітудні та фазові компоненти, рівномірно розміщені за шкалою частот. Густота розміщення спектральних ліній зменшується із збільшенням довжини дискретизованого сигналу. Отже, якщо компонент сигналу розташований між двома сусідніми частотними гармоніками спектра, уявити його належним чином не можна. Енергія такого компонента буде розподілена між сусідніми гармоніками, що призведе до спотворення прилеглих спектральних "амплітуд". Спектральна щільність амплітуди рівномірно розподіленого сигналу показано на рис. 6.

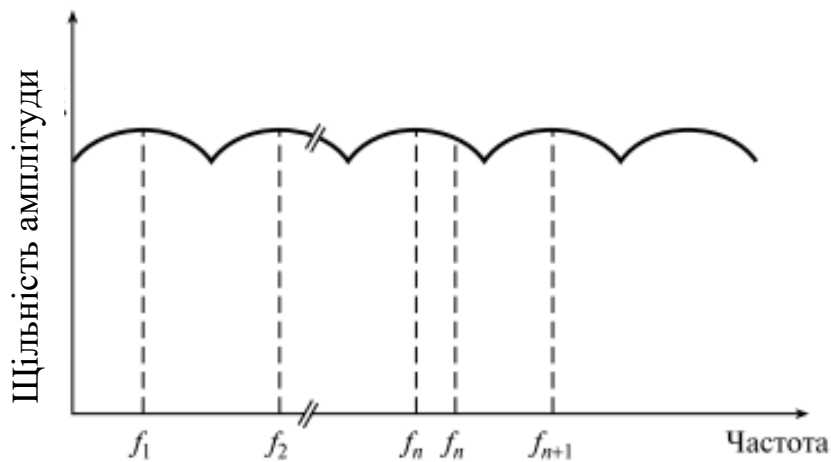


Рис. 6. Спектральна щільність амплітуди сигналу з рівномірною спектральною щільністю

Відзначимо кінцеву ширину основних пелюсток, центрованих на гармонійних частотах, і те, що компонент сигналу на такій не гармоній частоті, як f_{nh} , не можна уявити належним чином. Для вирішення цієї проблеми гармонійні компоненти повинні розміщуватися більш тісно і поєднуватися з частотами сигналу. Цього можна досягти, ввівши до реальних даних додаткові нулі. Ці нулі називаються *доповнюючими* і потрібні для збільшення точності - наближення оціненого спектру до справжнього спектру без використання додаткової інформації. Отже, до N даних потрібно додати таку кількість нулів N' , щоб задовольнялася умова

$$N + N' = 2^m \quad (8)$$

в алгоритмі двійкового швидкого перетворення Фур'є (ШПФ), де m ціле. З іншого боку, гармоніки частоти $1/(N + N' - 1)T$, де T представляє інтервал дискретизації, повинні збігатися з частотами сигналу.

Щоб уявити максимальне зниження виграшу від обробки, яке виникає на частотах, розташованих посередині між гармонійно пов'язаними частотами, визначається гребінцеве спотворення (scalloping loss) (ГС):

$$ГС = \frac{|W(\omega_s / 2N)|}{W(0)} = \frac{\left| \sum_{n=0}^{N-1} w(nT) \exp(-i\pi n / N) \right|}{\sum_{n=0}^{N-1} w(nT)} \quad (9)$$

де W представляє ДПФ-образ вагової функції, $\omega = 2\pi f_s$ - циклічна частота дискретизації, f - частота дискретизації, N - число елементів даних, n - номер елемента даних, $w(nT)$ - вагова функція, дискретизована у часовій області.

Як зазначалося, кінцева довжина даних обмежує можливий дозвіл за частотою до

$1/(N-1)T$ (Гц). В результаті виходить грубий спектр, який можна згладити і зробити безперервним, використовуючи додаткові нулі. Цей процес є просто інтерполяцією спектральної кривої між сусідніми гармоніками. Справжнього поліпшення дозволу можна досягти лише з допомогою тривалішої реалізації. Після доповнення N' нулями інтервал частот між лініями спектру стає рівним $1/(N+N'-1)T$ (Гц).

3.1.3. Виключення тренду

Перед обчисленням спектра потрібно видалити всі тренди даних, оскільки вектор помилок, з-за якого до даних додаються тренди, буде інтегруватися і може породити великі помилки в оціненому спектрі. (Тренд (статистика) – загальна тенденція при різно направленому русі, визначена загальною спрямованістю змін показників часового ряду)

3.1.4. Просочування спектральних складових та розмивання спектру

ШПФ, яке застосовується до набору дискретних даних, - це не зовсім істинне ШПФ процесу, з якого отримані дані. Це пояснюється тим, що процес безперервний, тоді як дані мають початок і кінець, які визначаються обраною реалізацією. Для ефективного отримання даних, які представляють сигнал тривалістю $T_s(s)$, всі дискретні значення в інтервалі T_s множаться на одиницю, а всі дані поза цим інтервалом множаться на нуль. Це еквівалентно множенню (або зважуванню) сигналу на прямокутний імпульс (зважуючу, або вагову, функцію) ширини T_s і висоти 1. У цьому випадку вибірки даних $v(n)$ дорівнюють добутку елементів даних $s(n)$ і значень вагової функції $w(n)$:

$$v(n) = w(n)s(n). \quad (10)$$

Добуток у часовій області еквівалентний згортці у частотній. Отже, ШПФ - образ n -ї гармоніки дорівнює

$$V(\omega_n) = \sum_{k=-N}^N W(\omega_n - \omega_k)S(\omega_k), \quad (11)$$

де ω_n – циклічна частота n -ї гармоніки, $V(\omega_n)$ – комплексний ДПФ - компонент на частоті ω_n , $W(\omega_n)$ – ДПФ - образ функції на частоті ω_n , $S(\omega_k)$ – дійсний ДПФ - компонент сигналу на частоті ω_k .

З рівняння (11) випливає, що розрахований спектр складається з істинного спектра даних, згорнутих зі спектром вагової функції. Амплітудний спектр прямокутного імпульсу $S_R(\omega_n)$ записується наступним чином (цей вираз називається також ядром Діріхле):

$$S_R(\omega_n) = \frac{T_s(\omega_n T_s / 2)}{\omega_n T_s / 2} = \text{sinc} \left(\frac{\omega_n T}{2} \right) \quad (12)$$

Тут $\text{sinc} \left(\frac{\omega_n T}{2} \right)$ — функція вибірки із частотою $\omega_n / 2$, проілюстрована на рис.

2,а. Вона складається з основної пелюстки і нескінченного числа бічних пелюсток з максимумами на 0 Гц і $(n + 0,5) / T_s$ Гц відповідно. Тепер амплітудний спектр окремого синусоїдального компонента сигналу на частоті f_n включає два імпульси на частотах $\pm f_n$. Згортка з функцією, що дискретизує, дає спектр, зображений на рис. 7.

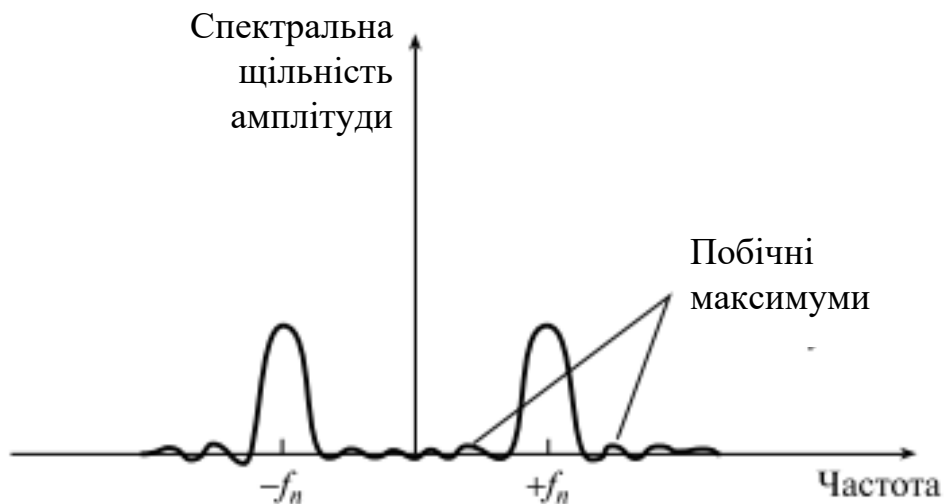


Рис. 7. Спектральна щільність амплітуди синусоїдального сигналу, згорнутого з функцією, що дискретизує

Два імпульси перетворилися на дві вибіркові функції, що перекриваються. Вплив прямокутної вагової функції виявився у введенні у обчислений спектр побічних максимумів (через вплив бічних пелюсток). Такий ефект буде мати місце для кожного частотного компонента сигналу, оскільки амплітудний спектр сигналу буде спотворений через перехресне додавання і віднімання великої кількості бічних і головних пелюсток вагових функцій. Внаслідок цього можуть з'явитися помилкові або сховатися справжні максимуми спектра. Цей ефект називається просочуванням спектральних складових. Для того, щоб уникнути його, дані слід модифікувати - помножити на вагову функцію, форма якої призначена для зниження впливу бічних пелюсток. Відповідна функція дорівнює 1 в центральній точці і сходиться на нуль у точках $n = 0$ і $n = N - 1$. На даний момент розроблено принаймні 23 такі функції.

Щоб мінімізувати просочування спектральних складових, форма вагової функції вибирається з мінімальними рівнями бічних пелюсток. На жаль, це призводить до збільшення ширини основної пелюстки, так що він розширюється на сусідні бічні пелюстки (відбувається накладення). Даний ефект має місце для всіх гармонік, а загальний результат - накладення спектра сигналу або розмивання. Таким чином,

вагові функції та їх параметри слід вибирати ретельно, щоб домогтися оптимального балансу між дозволом за частотою і статистичною точністю оцінки спектра.

3.2. Зважування

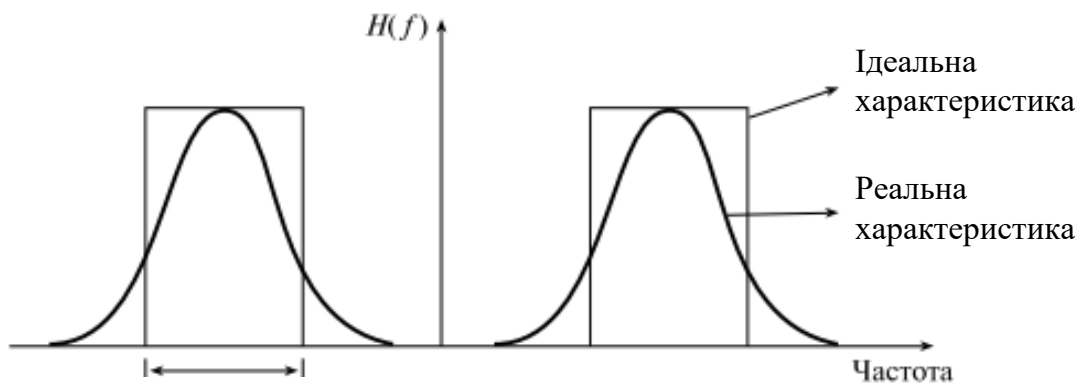
У цьому розділі описані різні властивості вагових функцій, причому в основному міркування ведуться в часовій області. У той же час, зважування можна проводити як у часовій (зважування даних), так і в частотній області (зважування частот), оскільки множення в часовій області еквівалентно згортці у частотній. Зважування в частотній області, отже, можна замінити згорткою в частотній області вагової функції зі спектром сигналу. Для реалізації цієї процедури можна використати рівняння:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - u)H(u)du = X(f) \circledast H(f) = \\ = F[y(t)] = F[x(t)h(t)].$$

3.2.1. Властивості вагових функцій

Ширина смуги шумового (прямокутного) еквівалента

Раніше було показано, що через явища просочування спектральних складових імпульсні характеристики, які теоретично представляють спектральні щільності амплітуд, стають вибірковими функціями. Бічні пелюстки цих функцій, що зміщують компоненти сигналу, можна розглядати як джерела небажаного шуму, а вагову частотну функцію вважати характеристикою широкосмугового фільтра. Отже, з такої точки зору бажано розробити вагову функцію з малою шумовою смугою, зменшивши амплітуди бічних пелюсток. Шумова смуга вводиться з метою порівняння різних вагових функцій по ширині смуги шумового еквіваленту. Дана величина визначається як ширина смуги ідеального прямокутного фільтра, який пропускає той же об'єм білого шуму, що і аналізований спектральний фільтр (див. рис. 8) (тому дану величина має назву *ширина смуги прямокутного еквівалента*).



Ширина смуги шумового еквівалента

Площа під кривою ідеальної характеристики = площа під кривою реальної характеристики

Рис. 8. Ширина смуги шумового еквівалента

Дане визначення дозволяє оцінювати характеристики бічних пелюсток різних функцій шляхом порівняння їх шумових еквівалентів. Ширина смуги шумового еквівалента - дуже важливий параметр функції, чим він менший, ніж краще вагова функція.

Ширина смуги шумового еквівалента виражається так:

$$W_n = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(nT)}{\left[\sum_{n=0}^{N-1} w^2(nT) \right]^2}. \quad (13)$$

Кореляція сегментів, що перекриваються

При зважуванні даних початок і кінець послідовності даних виходять на нуль, і цей ефект становить втрату інформації. Зокрема, можна пропустити короткі події, що відбуваються в області спаду характеристики. Для того щоб вирішити цю проблему, слід розбити послідовність даних на сегменти, що перекриваються, зважити і перетворити кожен сегмент окремо. Якщо перекриття становить близько 50-75%, то в сегментах буде відображено більшість особливостей даних. Потім спектри, що виходять, усереднюються і дають оцінку істинного спектра. Розбиття даних ілюструється на рис. 9.

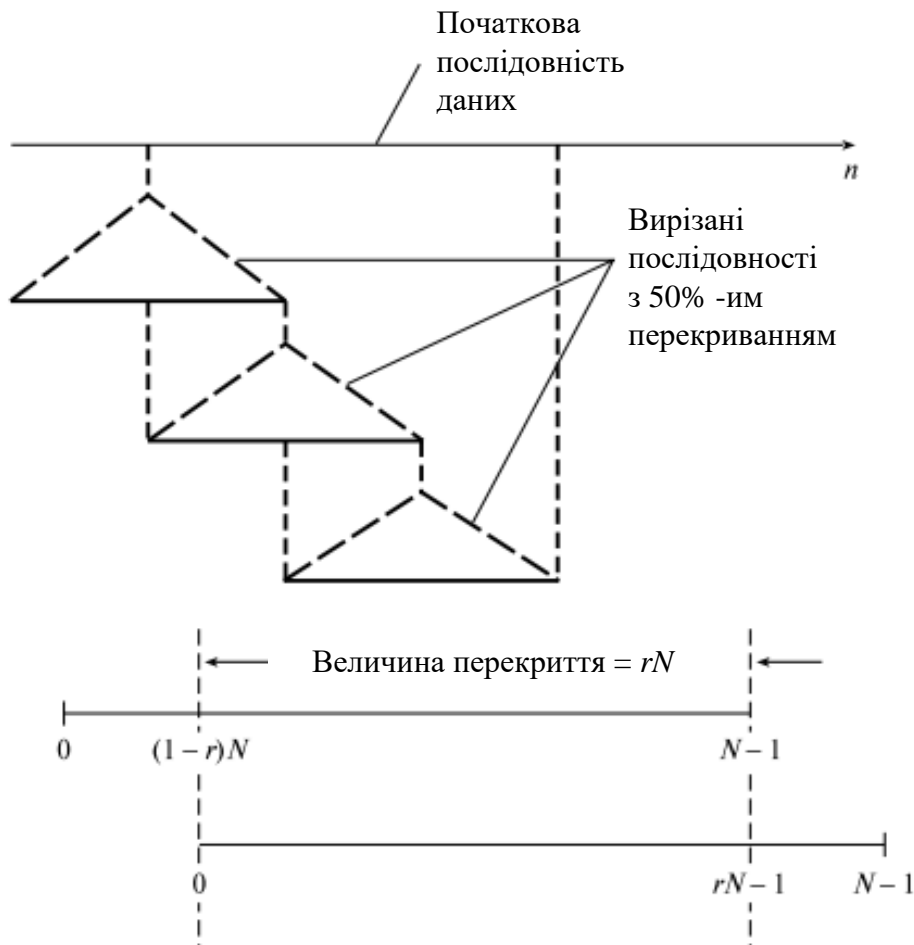


Рис. 9. Розбиття даних перед обробкою з надмірністю

Дана процедура називається *обробкою з надмірністю, або перекриттям*. Зазвичай, обробка з перекриттям 50-75% дозволяє на 90% використовувати потенціал більшості вагових функцій, пов'язаний з поліпшенням продуктивності. З іншого боку, при усередненні спектрів сегментів знижується дисперсія спектра. Для статистично ідентичних, але незалежних вимірювань дисперсія середнього становить $1/K$ дисперсії окремих спектрів. У той же час, сказане не відноситься до випадку, коли усереднюються спектри сегментів, що перекриваються, оскільки між сегментами існує кореляція. Можна показати, що, наприклад, усереднення чотирьох спектрів знижує дисперсію до рівня 25% від величини вихідного спектра. Отже, описаний підхід дозволяє значно покращити оцінку спектра.

Виграш від обробки

Виграш від обробки визначається діленням відношення сигнал-шум на виході процесу зважування на відношення сигнал-шум на вході:

$$BO = \frac{(S/N)_{out}}{(S/N)_{in}} \quad (14)$$

Виграш від обробки залежить від форми вагової функції, оскільки вона визначає ширину смуги її шумового еквіваленту. Спад функції, що вирізає, до нуля зменшує потужність сигналу, приводячи до втрат при обробці, тоді як за рахунок бічних пелюсток покращується ширина смуги шумового еквівалента.

Втрати при обробці у найгіршому випадку

Втрати при обробці в найгіршому випадку визначаються як сума (в децибелах) максимального гребінцевого спотворення вагової функції і втрат при її обробці. Ця величина представляє зменшення вихідного відношення сигнал-шум, викликане зважуванням і найгіршим (найбільш невдалим) розташуванням частот. Вона завжди становить від 3,0 до 4,3 дБ. Функцій, для яких цей параметр становить більше 3,8 дБ, слід уникати. Це стосується прямокутної функції, функції Пуассона ($\alpha = 4$), функції Хеммінга-Пуассона ($\alpha = 2,0$), функції Коші та мінімальної чотири точкової функції Блекмена-Харріса.

Ширина смуги мінімального дозволу

Зазвичай при перекритті двох ідентичних спектральних максимумів їх можна вирішити, якщо точки за рівнем 3 дБ не перекриваються (рис. 10, а). У той самий час, під час розгляду ДПФ - компоненту сусідні спектральні складові множаться на вагову функцію, а потім когерентно підсумовуються, тобто, бічні пелюстки включаються у суму. У цьому випадку підсилення кожного компонента в області перекриття має перевищувати 0,5. Це означає, що спектральна роздільна здатність визначається шириною смуги за рівнем 6 дБ, а не шириною смуги за рівнем 3 дБ (рис. 10, б).

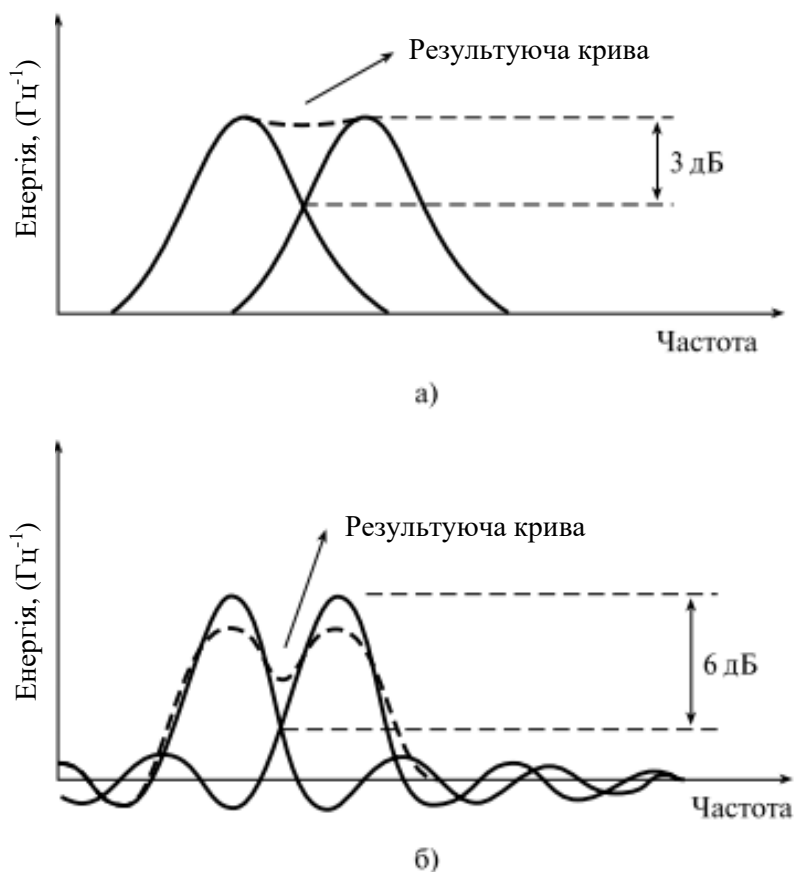


Рис. 10. Ширина смуги мінімального дозволу: а) дозвіл спектральних максимумів визначається шириною смуг за рівнем 3 дБ; б) спектральна роздільна здатність максимумів ДПФ визначається шириною смуг за рівнем 6 дБ

Ефект зміцнення функцій

Множення даних на вагову функцію, що виходить по краях на нуль, зменшує амплітуду вибірок у місцях спаду, а отже і загальну потужність сигналу. Можна показати, що всі частотні складові в рівній мірі схильні до впливу вагової функції, і що коефіцієнт зміни даних пропорційний кореню квадратному з коефіцієнта когерентного підсилення потужності, який показує нормовану потужність даних при розгляді напруги, як сигналу. Отже, зниження потужності сигналу можна компенсувати без спотворення діапазону щільності потужності. Вагова функція вирівнює середній рівень даних, збільшуючи таким чином повну енергію низькочастотних компонентів спектра. Цей ефект потрібно якимось чином компенсувати, але пряме віднімання середнього зважених даних призводить до більш явного прояву високочастотних бічних пелюсток.

На рис. 11 показаний спектр щільності енергії 64 точок даних, з яких спочатку було віднято середній рівень даних, після чого дані множилися на відповідні значення функції Кайзера-Бесселя. Очевидно, що спектр містить низькочастотні компоненти, введені в процесі зважування. На рис. 12 зображено спектр після першого етапу - віднімання середнього з даних. Здається, що низькочастотні

компоненти видалені, але з'явився набір суттєвих бічних пелюсток на високих частотах. Далі наводиться приклад, що демонструє, як можна усунути від'ємний вплив зважування.

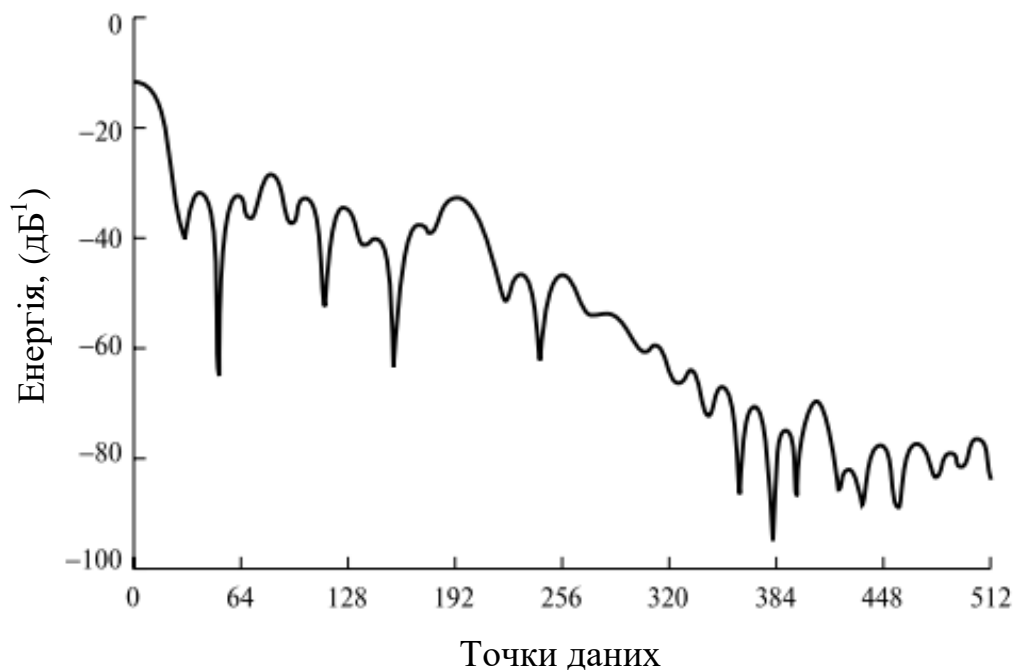


Рис. 11. Енергетичний спектр при вибірці з інтервалом 1 с, вагова функція Кайзера-Бесселя, 64 інформаційні точки, 1024- точкове ШПФ

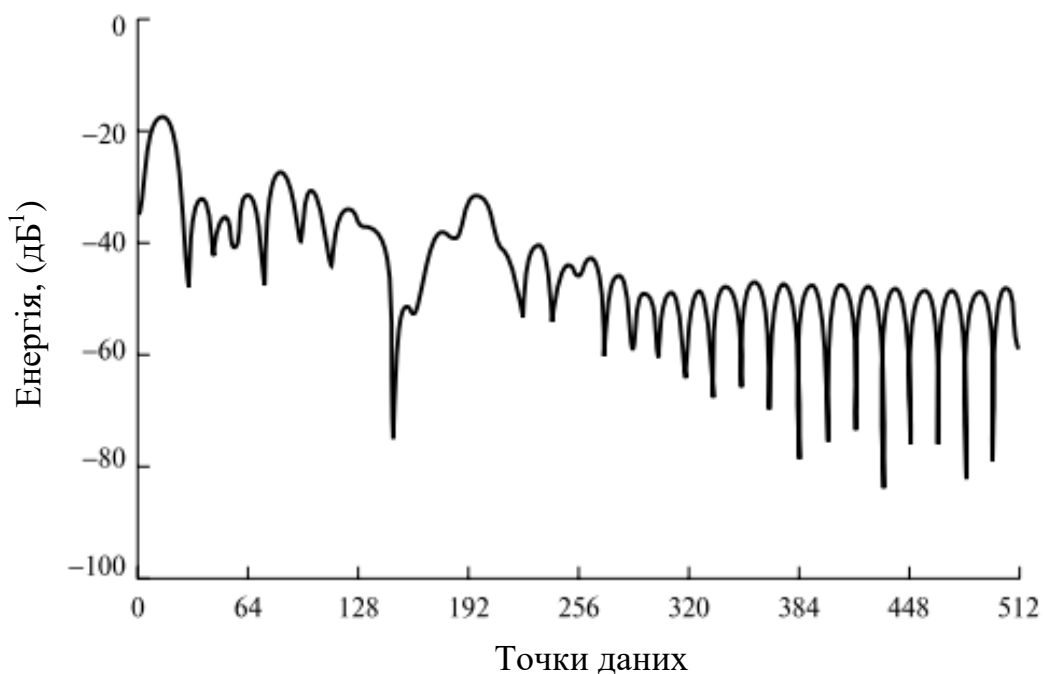


Рис. 12. Енергетичний спектр при вибірці з інтервалом 1 с, вагова функція Кайзера-Бесселя, 64 інформаційні точки, 1024 точкове ШПФ. Середній рівень зважених даних видалено шляхом віднімання середнього з даних

Приклад 1

Покажіть, що впливу зважування, що проявляється у зниженні енергії сигналу та введенні низькочастотних компонентів у спектр, можна уникнути шляхом зважування лінійної функції даних, а не даних.

Рішення

Припустимо, що вихідні дані $s(n)$ мають нульове середнє. Нехай середній рівень, введений у дані при зважуванні, видалений шляхом віднімання із $s(n)$ константи k_1 . Тепер нові виважені дані s^1 записуються як

$$s^1(n) = w(n)[s(n) - k_1], \quad (15)$$

де $w(n)$ - значення вагової функції, або вагові коефіцієнти. Зниження потужності сигналу, викликане зважуванням, тепер можна компенсувати, помноживши кожне значення $s^1(n)$ на ретельно обрану константу k_2 . Отже, точки тепер перетворюються на вигляд

$$S(n) = k_2 w(n)[s(n) - k_1], \quad (16)$$

Необхідне значення k_1 можна знайти за умови рівності нулю середнього значення $S(n)$. Отже,

$$\sum_{n=0}^{N-1} S(n) = 0.$$

Таким чином

$$k_2 \left[\sum_{n=0}^{N-1} w(n)s(n) - \sum_{n=0}^{N-1} w(n)k_1 \right] = 0.$$

Таким чином,

$$k_1 = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} w(n)s(n)}{\sum_{n=0}^{N-1} w(n)}. \quad (17)$$

Нормована потужність змінного струму даних до зважування дорівнює

$$E[(s(n) - k_1)^2] = \sigma_{sN}^2, \quad (18)$$

де через E позначено математичне очікування, а σ_{sN}^2 - дисперсія $s(n)$ із середнім значенням k_1 . Нормована потужність змінного струму зважених даних дорівнює

$$E\{k_2^2 w^2(n)[s(n) - k_1]^2 - k_1^2\},$$

де $w(n)$ та $s(n)$ взаємно незалежні. Далі отримуємо

$$\begin{aligned} E\{k_2^2 w^2(n)[s(n) - k_1]^2\} &= E[k_2^2 w^2(n)]E\{[s(n) - k_1]^2\} = \\ &= k_2^2 E[w^2(n)]\sigma_{sN}^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Значення k_2 , необхідне для вирівнювання потужності зважених і незважених даних, можна отримати, прирівнявши рівняння (18) та (19):

$$\sigma_{sN}^2 = k_2 E[w^2(n)]\sigma_{sN}^2,$$

звідки

$$k_2^2 = \frac{1}{E[w^2(n)]} = \frac{1}{(1/N) \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n)} = \frac{N}{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n)}.$$

Отже,

$$k_2 = \left[\frac{N}{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n)} \right]^{1/2}. \quad (20)$$

Підставляючи рівняння (17) та (20) у рівняння (16), остаточно отримуємо

$$S(n) = w(n) \left[s(n) - \frac{\sum_{n=0}^{N-1} w(n)s(n)}{\sum_{n=0}^{N-1} w(n)} \right] \left[\frac{N}{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n)} \right]^{1/2}. \quad (21)$$

На рис. 13 показаний енергетичний спектр даних, що виходять після видалення середнього зважених даних та відновлення енергії сигналу відповідно до рівняння (21). Постійна складова, що виникла при зважуванні, і вплив бокових пелюсток усунуто.

З наведеного прикладу видно, що дані $s(n)$ рекомендується модифікувати відповідно до рівняння (21), а потім застосовувати ДПФ. Дана процедура еквівалентна відніманню k_1 з даних з подальшим множенням різниці на k_2 перед зважуванням.

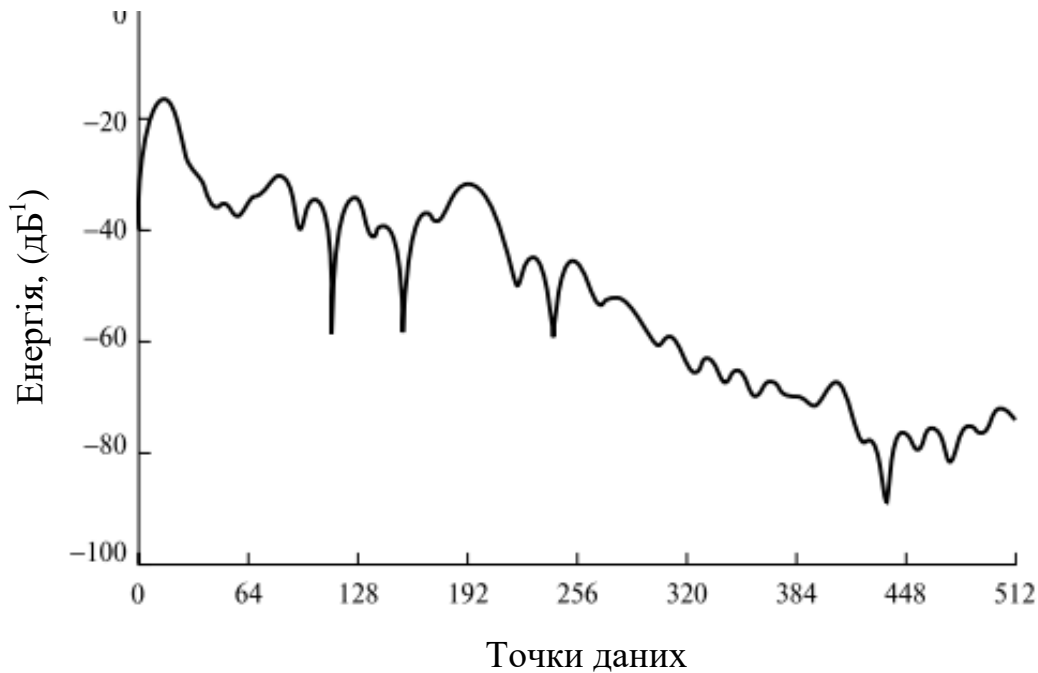


Рис. 13. Енергетичний спектр при вибірці з інтервалом 1 с, вагова функція Кайзера-Бесселя, 64 інформаційні точки, 1024-точкове ШПФ. Дані пройшли попередню обробку з метою видалення середнього рівня зважених даних та збереження середньої потужності

3.2.2. Вибір вагової функції

У літературі докладно розглянуто вплив різних характеристик вагових функцій на ефективність методу зважування та зроблено висновок, що на якість функції впливає насамперед найвищий рівень бічних пелюсток та найбільший програш від обробки. Як переважні називаються вагові функції Блекмена-Харріса, Дольфа-Чебишева та Кайзера-Бесселя. Менш ефективні функції Тьюкі (спад по косинусу), Пуассона, Хеннінга та Хеммінга.

Спад багатьох вагових функцій та його форму у багатьох випадках можна регулювати, вибираючи значення параметра функції α . Це дозволяє варіювати ширину основної пелюстки і рівень бічних пелюсток. Частиною мистецтва зважування є вибір методом спроб і помилок значення α , що оптимізує результати у конкретній ситуації.

Приклад 2

Вплив різних вагових функцій на спектр амплітуди. На рис. 14,а показані ДПФ-компоненти двох синусоїд, що відрізняються по амплітуді на 40 дБ і мають частоти $100f$ і $120f$ (де f - перша гармоніка, що відповідає запису тривалістю $T_s(s)$, які були отримані без зважування, тобто. з прямокутною ваговою функцією. У цьому випадку сигнал здається періодичним і нескінченним (через гармонійний зв'язок сигналу з довжиною вікна) і точно відтворюється навіть при прямокутній ваговій функції. Щоб зруйнувати зазначений гармонійний зв'язок, частоту більшого сигналу

поклали рівною $102,5 f$ (не гармоніка), результат представлений на рис. 14,б. В результаті рівень бічних пелюсток значно підвищується і в них майже втрачається менший сигнал. Даний ефект можна значною мірою придушити, використовуючи відповідну вагову функцію. На рис. 15,а і 15,б показані функції Тьюкі (спадаючий косинус) з $\alpha = 0,1$ та $\alpha = 0,5$, а на рис. 16,а і 16,б показані відповідні спектри. На рис. 17,а і 17,б зображена функція Хеммінга ($\alpha = 0,54$) і спектр, що виходить відповідно. На рис. 18,а...18,в показані функції Кайзера-Бесселя з $\alpha = 2,0$ 3,0 і 4,0, а на рис. 19 ілюструються відповідні спектри. Найбільш близький до істини результат дає функція Кайзера-Бесселя з $\alpha = 4,0$. Втім, слід зазначити, що якщо збільшувати α для зменшення бічних пелюсток, одночасно збільшується ширина основної пелюстки, тому потрібно шукати компромісне значення α . Зрозуміло, у реальній ситуації всі гармоніки піддаватимуться впливу, тому якщо потрібно уникнути помилкових результатів, дуже важливо вибрати вагову функцію з погляду сумарної ефективності всіх частот.

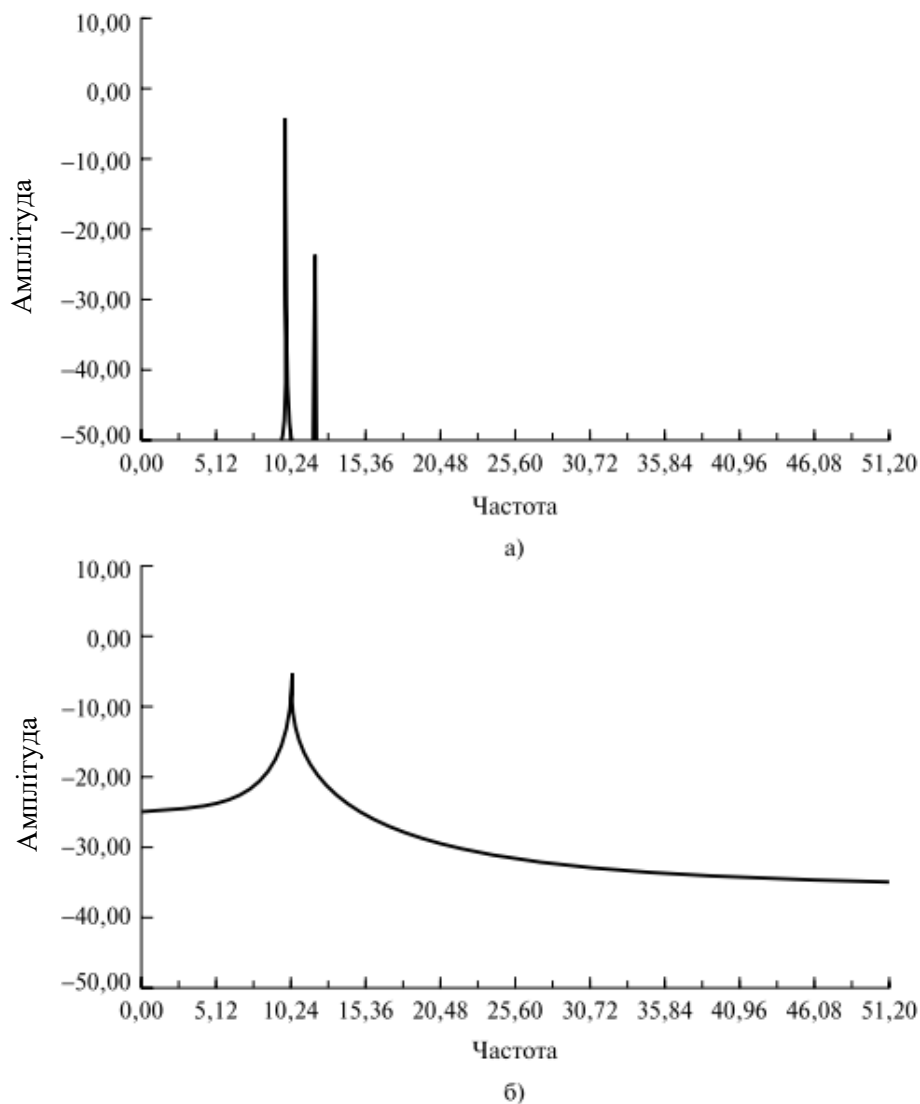


Рис. 14. Амплітудний спектр двох синусоїд, що відрізняються за амплітудою на 40 дБ: а) довжина вікна кратна обом періодам; б) довжина вікна не кратна одному з періодів (більшому)

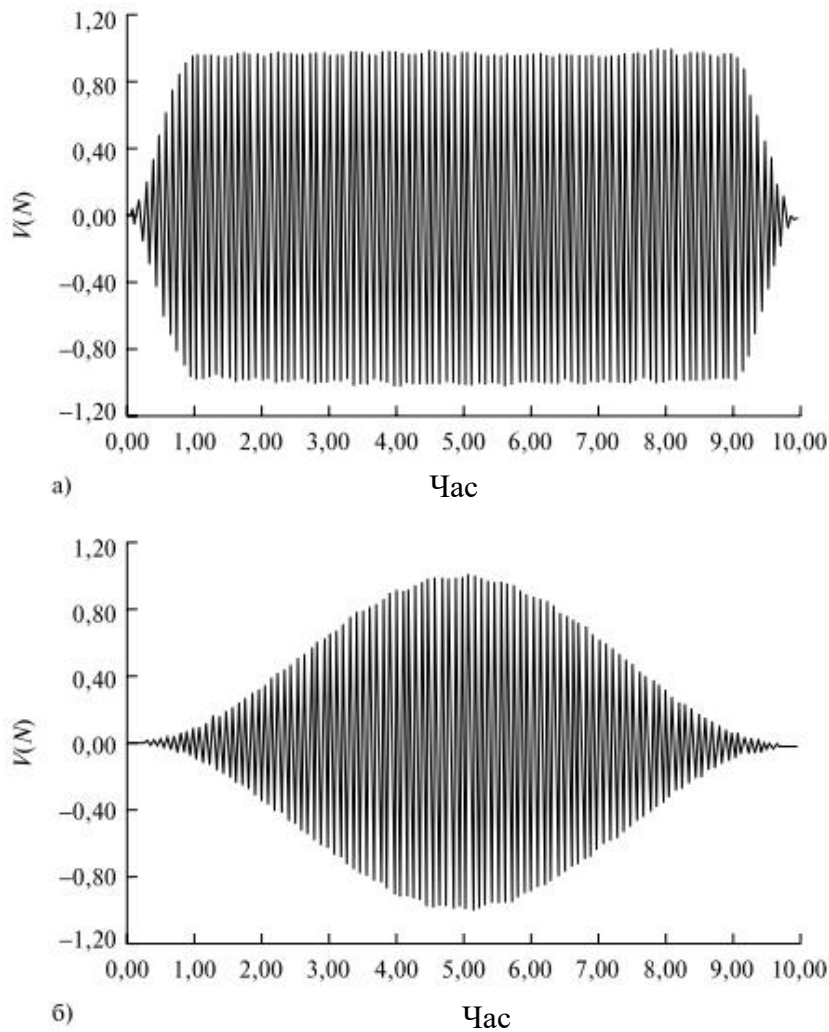


Рис. 15. Вагова функція Тьюкі: а) $\alpha = 0,1$; б) $\alpha = 0,5$

Вагова функція Дольфа-Чебишева найкраща з погляду малих бічних пелюсток, хоча вона дає найбільші втрати під час обробки; втім, можливість її використання для багатотонного детектування малоімовірна через когерентне додавання бічних пелюсток. Крім того, структура бічних пелюсток цієї функції дуже чутлива до помилок коефіцієнтів. Таким чином, краща функція Блекмена-Харріса або Кайзера-Бесселя. Зазначимо, що коефіцієнти функції Кайзера-Бесселя генерувати простіше, а, змінюючи параметр α , легше знайти компроміс між рівнем бічних пелюсток і шириною основної пелюстки. Ця функція виражається так:

$$w(n_{\text{КВ}}) = I_0 \left\{ \pi \alpha \left[1, 0 - \left(\frac{n_{\text{КВ}}}{N/2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} / I_0(\pi \alpha), \quad 0 \leq |n_{\text{КВ}}| \leq N/2, \quad (22)$$

де n – номер вибірки вагової функції, α – числовий параметр, регулюючи який вибирається найкращий компроміс між рівнем бічних пелюсток та шириною основної пелюстки, N - число вибірок вагової функції.

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^K \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2 \quad (23)$$

– це модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку, а K теоретично рівне нескінченності, але, оскільки амплітуда функції Бесселя швидко спадає з k , зазвичай, досить покласти $K = 32$.

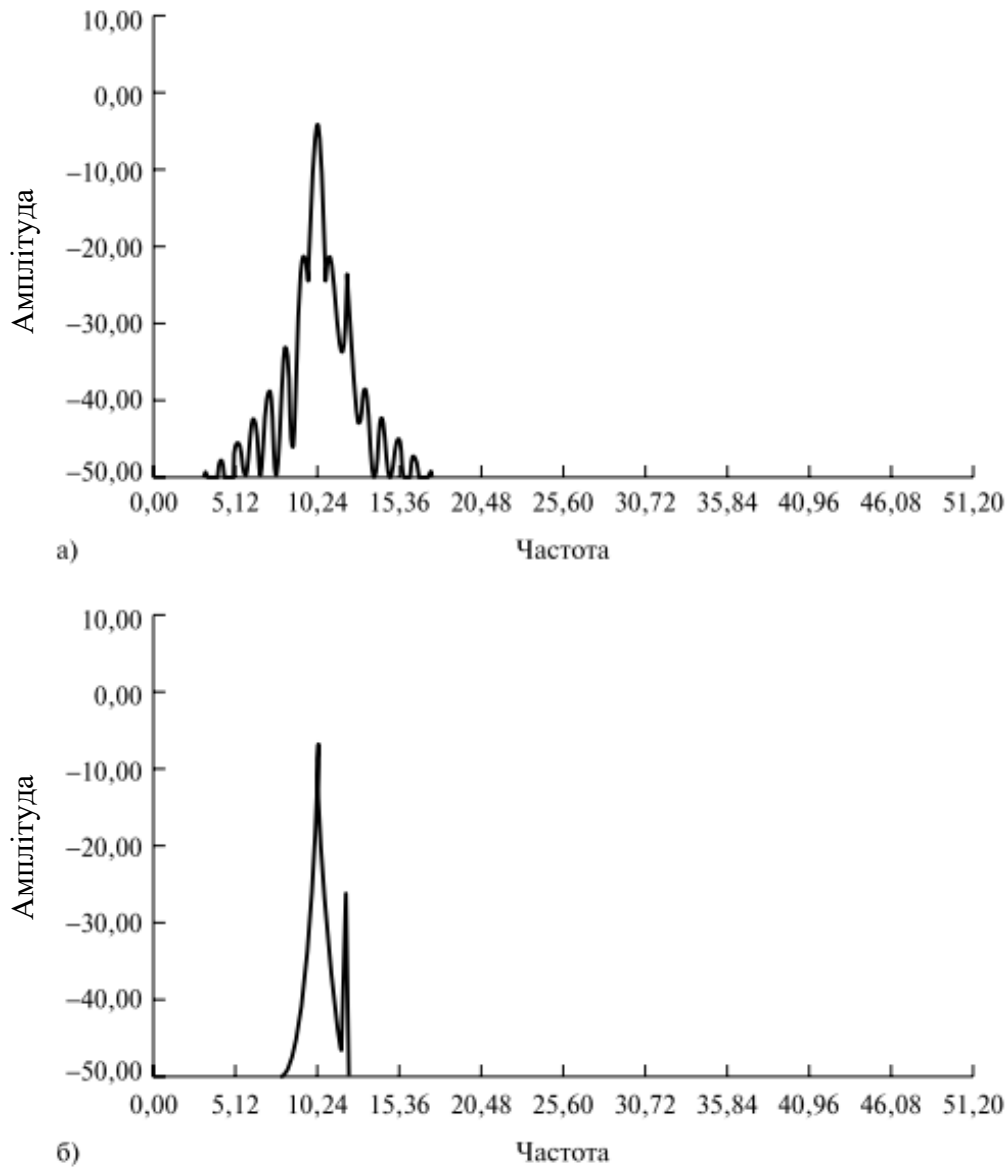


Рис. 16. Амплітудний спектр двох синусоїд, помножених на вагову функцію - конічний косинус

Формула (22) визначає вагову функцію між точками $N/2$ і $N/2 - 1$. Зазвичай за допомогою ДПФ можна поширити цю функцію на проміжок від $n_{\text{ДПФ}} = 0$ до $n_{\text{ДПФ}} = N - 1$, де $n_{\text{ДПФ}}$ - номер елемента даних ДПФ. Отже, щоб ДПФ можна було використовувати спільно з ваговою функцією Кайзера-Бесселя, цю функцію потрібно змістити праворуч на $N/2$, внаслідок чого вийде

$$n_{\text{ДПФ}} = n_{\text{КВ}} + N/2$$

або

$$n_{\text{КВ}} = n_{\text{ДПФ}} - N/2. \quad (24)$$

Остаточно рівняння (22) записується так:

$$w(n_{\text{ДПФ}}) = I_0 \left\{ \pi\alpha \left[1,0 - \left(\frac{n_{\text{ДПФ}} - N/2}{N/2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} / I_0(\pi\alpha), \quad (25)$$
$$0 \leq |n_{\text{ДПФ}}| \leq N - 1.$$

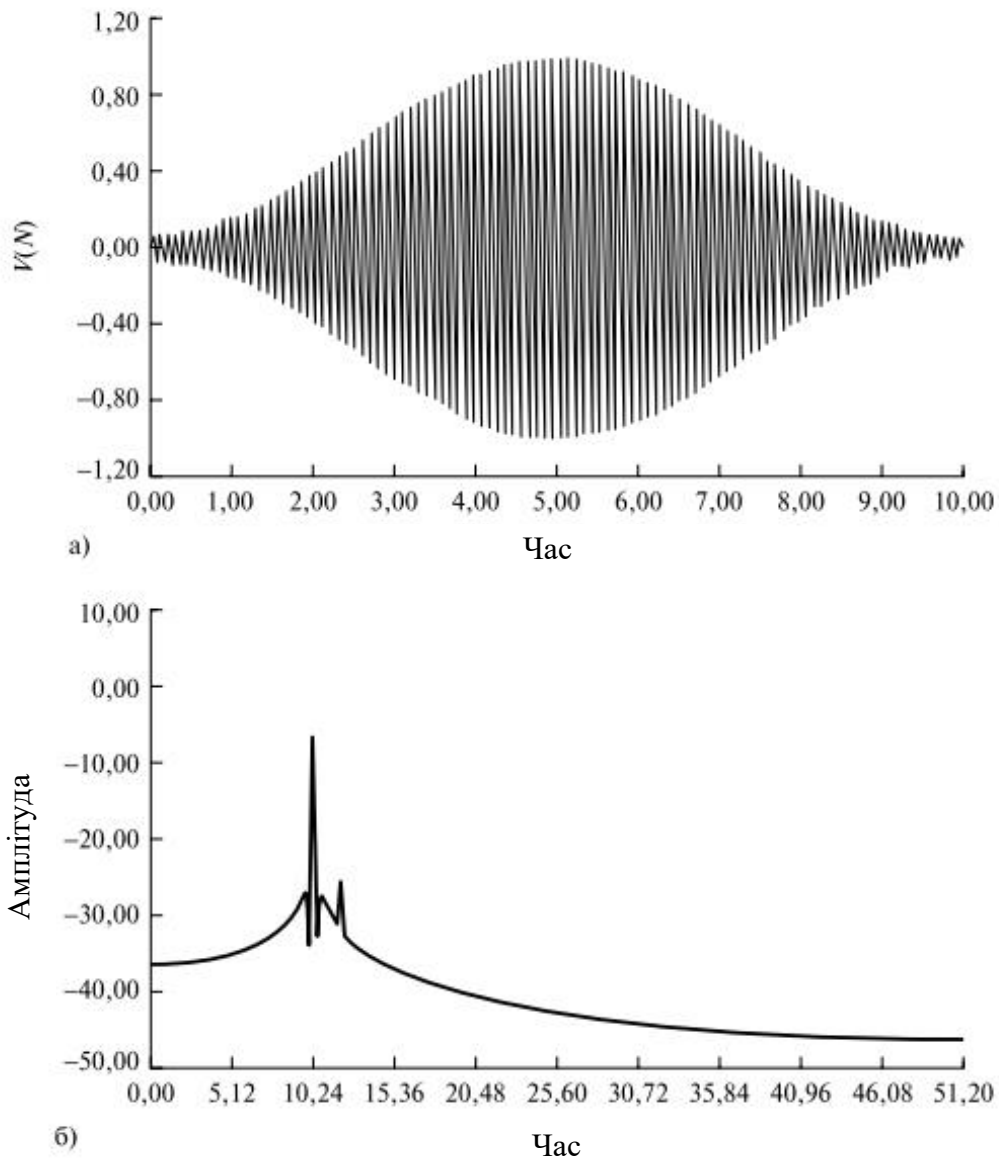


Рис. 17. Вагова функція Хеммінга (а); відповідний амплітудний спектр двох синусоїд (б)

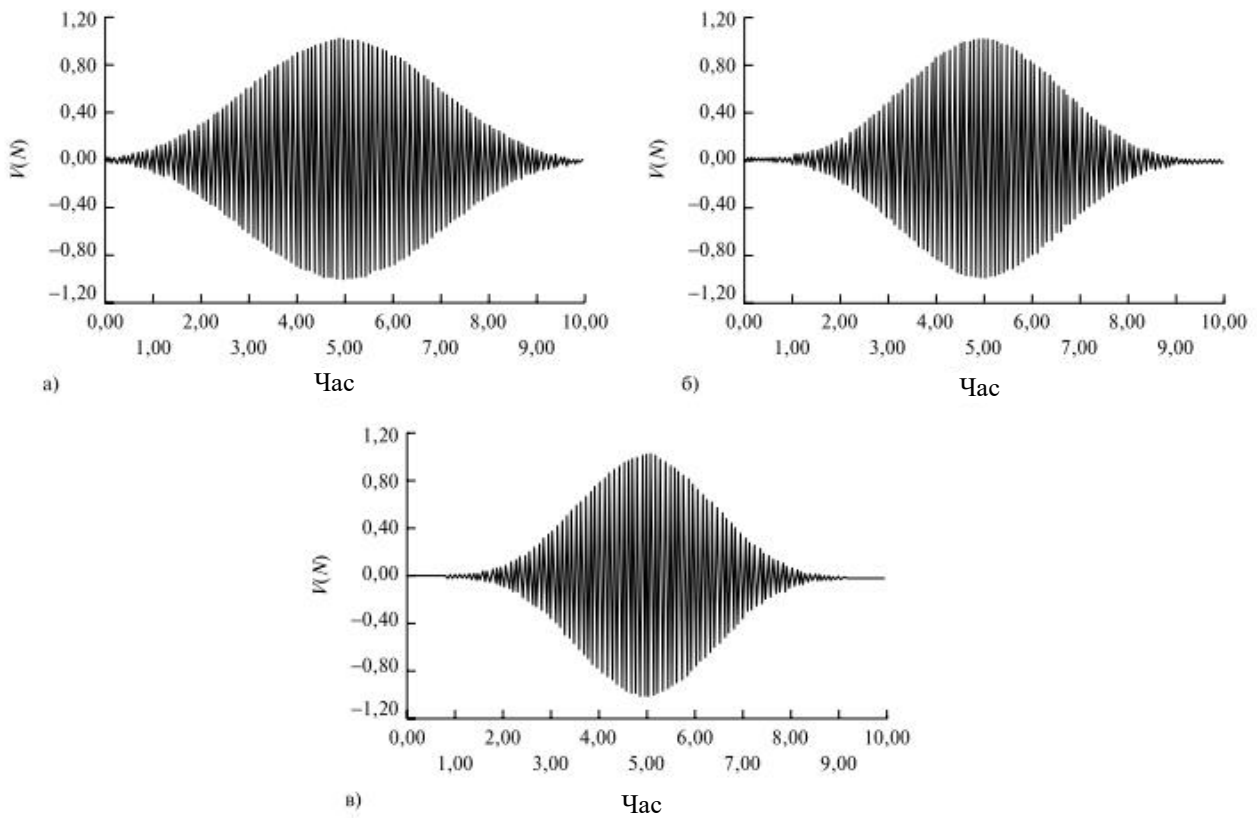


Рис. 18. Вагові функції Кайзера–Бесселя: а) $\alpha = 2,0$; б) $\alpha = 3,0$; в) $\alpha = 4,0$

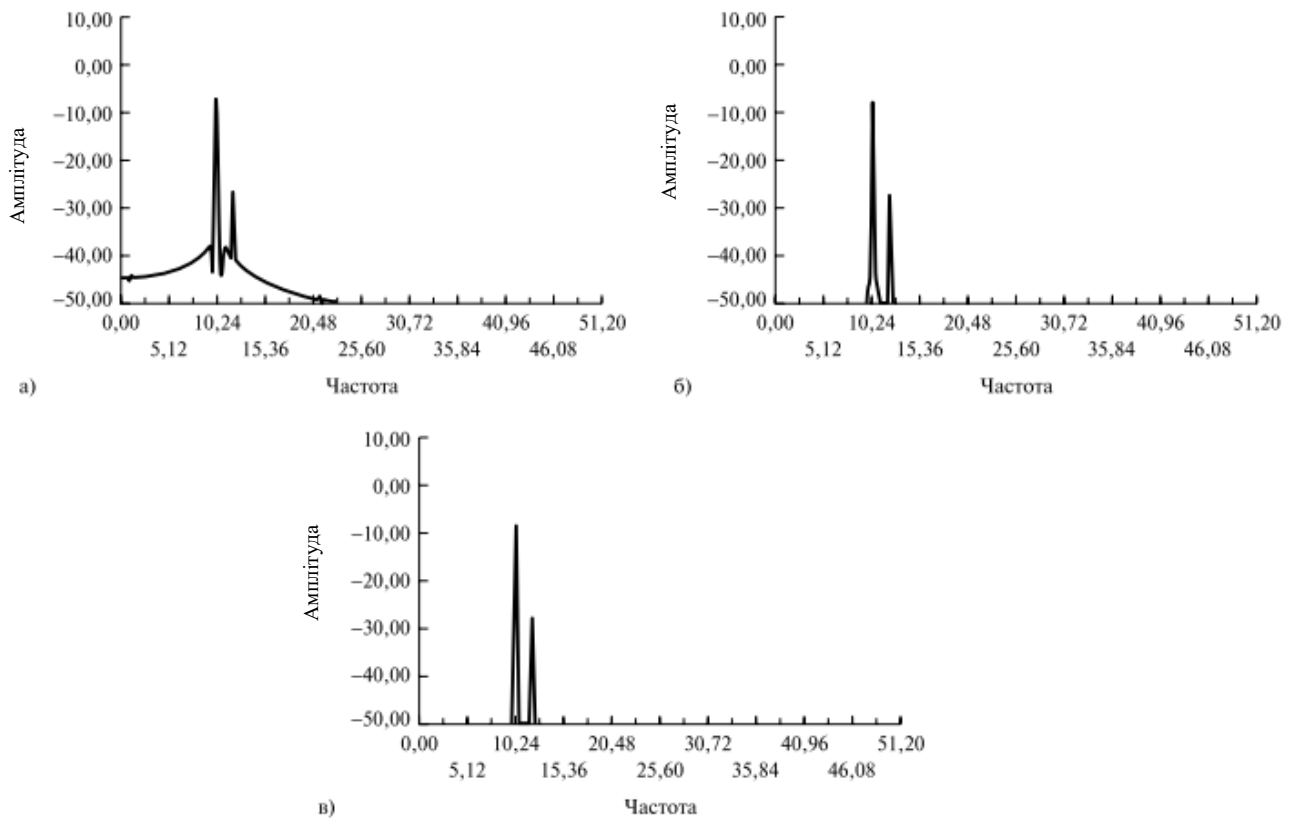


Рис. 19. Амплітудний спектр двох синусоїд, обчислений з використанням відповідних функцій Кайзера-Бесселя, представлених на рис. 18: а) $\alpha = 2,0$; б) $\alpha = 3,0$; в) $\alpha = 4,0$

3.3. Метод та властивості періодограм

Квадрат модуля Фур'є-образу $|F(i\omega)|^2$ є оцінкою спектральної щільності потужності $E[P(f)]$ і називається періодограмою.

$$E[P(f)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_B(m) c_{xx}(m) \exp(-2\pi i f m), \quad (26)$$

де c_{xx} - автоковаріаційна матриця $x(n)$, обчислена із запізненням m , f - частота, а w_B - трикутна вагова функція (Барлетта), яка визначається наступним чином:

$$w_B(m) = 1 - \frac{|m|}{N} \quad |m| \leq N - 1. \quad (27)$$

Для порівняння зазначимо, що істинна спектральна густина потужності $P(f)$ функції $x(x)$ дорівнює

$$P(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{xx} \exp(-2\pi i f m), \quad (28)$$

Отже, спектральна щільність потужності, представлена періодограмою, коливається, а максимальна амплітуда коливань відхилення визначається так:

$$\begin{aligned} P(f) - E[P(f)] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [1 - w_B(m)] c_{xx} \exp(-2\pi i f m) = \\ &= \frac{|m|}{N} P(f). \end{aligned} \quad (29)$$

Для $N \gg |m|$ зміщення стає малим і $E[P(f)] \rightarrow P(f)$, тобто. періодограма асимптотично незміщена. Крім того, для великих N дисперсія періодограми стає рівною

$$\text{var}[P(f)] \approx F P^2(f), \quad (30)$$

де F залежить від використовуваної вагової функції, тобто, дисперсія залежить від квадрата спектральної щільності потужності і не сходиться до нуля зі зростанням N . Це означає, що оцінки спектральної щільності потужності, отримані з періодограми, неспроможні і дають оцінки $P(f)$, що коливаються, в послідовних реалізаціях.

Зазначимо, що автоковаріаційна матриця зазвичай визначається усередненням по N членам, хоча її можна визначати і усередненням $N - |m|$ членам. Обидві оцінки спроможні і є асимптотично незміщеними, але в першому випадку виходить менша дисперсія, тому такий спосіб кращий.

Більш того, при застосуванні для отримання спектру ДПФ відповідна періодограма визначається як $(1/N)|X(k)|^2$ і має розмірність нормованої енергії, хоча деякі автори називають функцію $(1/N)|X(k)|^2$ спектральною щільністю потужності.

3.4. Методи модифікованих періодограм

У літературі пропонується для усунення неспроможності методу періодограм використовувати усереднення кількох модифікованих періодограм. Кожна з таких періодограм складається з сегмента даних. Дані сегменти можуть йти послідовно (метод Барлетта) або перекриватися (метод Уелша). Ці методи також зменшують дисперсію оцінок спектральної щільності потужності. Метод Барлетта ілюструється на прикладі 3.

3.4.1. Метод Уелша

Перевага методу Уелша в порівнянні з методом Барлетта полягає в подальшому зменшенні спектральної щільності потужності. У той самий час, це поліпшення відбувається з допомогою додаткового зменшення спектрального дозволу. У методі Уелша L сегментів даних довжини M перекриваються і періодограми обчислюються за L зваженими сегментами. Далі періодограми нормуються на величину U , щоб компенсувати втрати енергії сигналу внаслідок процедури зважування. Фактично U прирівнюється до $1/k_2^{1/2}$, де k_2 - коефіцієнт, отриманий у п. 3.2.1 та описує ефект зміщення вагових функцій. Отже,

$$U = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w^2(n). \quad (31)$$

Таким чином, оцінка Уелша спектральної щільності потужності $P_{WE}(f)$ записується наступним чином:

$$P_{WE}(f) = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} w^2(n). \quad (32)$$

Математичне очікування оцінки Уелша:

$$E[P_{WE}(f)] = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} E[P_j(f)] = E[P_j(f)], \quad (33)$$

тобто. воно дорівнює математичному очікуванню модифікованої періодограми. Можна показати, що при $N \rightarrow \infty$ і $M \rightarrow \infty$ значення сходяться до істинної спектральної щільності потужності $P(f)$. Отже, для великих N та M оцінка Уелша спектральної щільності потужності незміщена. За певних умов дисперсія оцінок Уелша сходиться до нуля, тобто. оцінки спроможні. Велш також показав, що за відсутності накладання сегментів ($L = K$)

$$\text{var}[P_{WE}(f)] \approx (1/K)P^2(f),$$

що дорівнює дисперсії оцінки Барлетта за тих самих умов. При 50%-ому накладенні ($L = 2K$)

$$\text{var}[P_{WE}(f)] \approx (9/8L)P^2(f),$$

що становить $9/16=0,56$ дисперсії оцінки Барлетта.

3.5. Метод Блекмена-Тьюкі

Спектр густини потужності визначається ДПФ авто-кореляційною функцією даних. Знаючи, що періодограми можна обчислити за даними як квадрат ДПФ-образу даних, розглянемо питання корисності даного підходу. У зв'язку з цим, по-перше, заслуговує на увагу той факт, що метод Блекмена-Тьюкі був розроблений в 1958), тоді як алгоритм ШПФ для швидкого обчислення ДПФ не публікувався до 1965. По-друге, метод Блекмена-Тьюкі має деякі переваги в порівнянні з методом періодограм. Далі показано, що метод Блекмена-Тьюкі характеризується великою добротністю. Крім того, автокореляційні функції тепер можна обчислити за допомогою ДПФ методом швидкої кореляції (розділ 3.6). В результаті отримуємо наступну процедуру Блекмена-Тьюкі для визначення спектру щільності потужності:

- 1) обчислити автокореляційну функцію даних;
- 2) впливати на дані відповідною ваговою функцією;
- 3) обчислити ШПФ даних і отримати спектр щільності потужності.

Порівнюючи цю процедуру з методом періодограм, видно що згладжування досягається не за рахунок усереднення декількох періодограм, а за рахунок усереднюючого ефекту процесу автокореляції.

Зважування автокореляційної функції необхідно для згладжування її екстремумів, оскільки при великих значеннях параметра запізнення у обчисленні бере участь не багато точок даних, так що оцінки, що виходять, менш точні. Спад вагової функції за конусом призводить до того, що дані оцінки враховуються з меншими ваговими коефіцієнтами.

Оцінка Блекмена-Тьюкі $P_{BTE}(f)$ дорівнює

$$P_{BTE}(f) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} r_{xx} w(m) \exp(-2\pi i f m), \quad (34)$$

де $r_{xx}(m)$ - автокореляційна функція даних, $w(m)$ - вагова функцій довжини $2M - 1$, що дорівнює нулю при $|m| \geq M$.

Щоб отримати реальні оцінки, $w(m)$ має бути симетричним щодо $m = 0$, а щоб оцінки були позитивними, образ $w(m)$ має бути більшим за нуль. Не всі вагові функції відповідають цим критеріям. Наприклад, їм не задовольняють функції Хеннінга та Хеммінга.

Можна показати, що математичне очікування оцінки Блекмена-Тьюкі дорівнює

$$P_{BTE}(f) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} c_{xx} w_B(m) \exp(-2\pi i f m) \quad (35)$$

де $w_B(m)$ – трикутна вагова функція Барлетта.

Для отримання додаткового згладжування спектра має виконуватися умова $M < N$. Якщо $N \gg M$, оцінка буде асимптотично незміщеною. Крім того, якщо $W(k)$ (ДПФ-образ вагової функції, $w(m)$ вже $P(f)$), істинний спектр щільності дорівнює

$$\text{var}[P_{BTE}(f)] \approx P^2(f) \left[\frac{1}{N} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w^2(m) \right] \quad (36)$$

і при $N/M \rightarrow \infty$ $\text{var}\{P_{BTE}(f)\} \rightarrow 0$, так що за даних умов оцінка Блекмена-Тьюкі є спроможною.

3.6. Метод швидкої кореляції

Якщо дані перевищують 128 елементів і потрібно знайти їх кореляцію, то обчислення будуть виконуватися швидше, якщо використовувати теорему про кореляцію

$$r_{12}(j) = \frac{1}{N} F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)],$$

і реалізувати обчислення з використанням ППФ. Наприклад, при $N = 1024$ це дозволяє десятикратно збільшити швидкість. Крім того, якщо потрібно обробити великі набори вхідних даних, наприклад, що перевищують обсяг пам'яті системи, то можна застосувати методи накладання-складання або накладання-зберігання. При обчисленні автокореляції у методі Блекмена-Тьюкі описаним вище способом з використанням ШПФ підхід називається методом оцінки спектра за допомогою швидкої кореляції.

3.7. Порівняння методів оцінки спектральної щільності потужності

Вираз для добротності оцінок спектральної щільності потужності

$$Q = \frac{\{E[P_E(f)]\}^2}{\text{var}[P_E(f)]}.$$

Можна показати, що добротність чотирьох непараметричних методів спектрального аналізу має значення, зазначені в табл. 1, де f - ширина головної пелюстки відповідних вагових функцій за рівнем 6 дБ. Видно, що метод Блекмена-Тьюкі є найкращим з точки зору якості, і що всі методи, за винятком методу періодограм, дозволяють підтримувати якість при збільшенні дозволу за частотою (зменшення f) за рахунок збільшення N .

Щоб досягти задовільних результатів, потрібна велика акуратність та кілька

допоміжних обчислень. З точки зору балансу найкращим здається метод Блекмена-Тьюкі, хоча можуть існувати міркування, що підвищують привабливість інших методів.

Таблиця 1. Добротність Q оцінок спектральної щільності потужності

Метод оцінки	Умови	Q	Коментар
Періодограма	$N \rightarrow \infty$	1	Неспроможна оцінка, не залежить від N
Барлетта	$N, M \rightarrow \infty$	$1,11 N f$	Якість підвищується з розміром сегмента даних
Уелша	$N, M \rightarrow \infty$, накладення 50%	$1,39 N f$	Якість підвищується з розміром сегмента даних
Блекмена-Тьюкі	$N, M \rightarrow \infty$, трикутна вагова функція	$2,34 N f$	Якість підвищується з розміром сегмента даних

4. Сучасні параметричні методи оцінки

Для непараметричних методів, описаних у попередніх розділах і які використовують періодограми та ШПФ, характерні згадані вище обмеження: низька спектральна роздільна здатність при коротких сегментах даних, необхідність зважування для запобігання просоченню спектральних складових. Цих складнощів можна уникнути, використовуючи параметричні методи. Ціною поліпшення є необхідність всебічного дослідження відповідної моделі кожного процесу, визначення необхідного порядку обраної моделі для адекватного представлення даних та обчислення параметрів моделі. До одержуваних переваг входять підвищений спектральний дозвіл, можливість застосування до коротких сегментів даних, відсутність просочування спектральних складових, гребінцевого спотворення, розмивання спектра і зміщення вагової функції. Оскільки параметричні методи дуже важливі, розглянемо найпоширеніший із них – метод авторегресійного моделювання. Тим не менш, крім переваг, параметричні методи мають і недоліки, які можна усунути за допомогою альтернативних сучасних підходів, наприклад, послідовного або адаптивного та методу максимальної правдоподібності.

Параметричний підхід вимагає параметричного моделювання даних, процесу, добре вивченого у сфері аналізу за допомогою часових рядів, плюс інтерполяції даних, які розглядаються як вихід лінійної системи, збудженої білим шумом. Ця система є поліноміальною передаточною функцією, вираженою через параметри моделі. Далі за цією передаточною функцією обчислюється спектр даних.

5. Авторегресійна оцінка спектру

У даному методі оцифрований сигнал моделюється як авторегресійний (АР)

часовий ряд плюс доданок білого шуму. Після цього спектр знаходиться з параметрів АР-моделі та дисперсії доданку шуму. Параметри моделі - це рішення системи лінійних рівнянь, отриманих мінімізацією середньоквадратичної помилки (потужності білого шуму) за всіма даними. Важливим моментом є вибір числа членів у АР-моделі – порядку моделі. При надто малому порядку оцінка щільності потужності буде надмірно згладженою, тому деякі максимуми можуть скрадатися. Якщо порядок занадто великий, можуть вводитися неправдиві максимуми. Отже, для кожного набору даних потрібно визначити відповідний порядок моделі. Описаний метод застосовується до сигналів, спектр щільності потужності яких містить гострі максимуми. Якщо сигнали не задовольняють цьому критерію, можна використовувати інші моделі, такі як модель ковзного середнього або авторегресійного руху. Оскільки авторегресійний підхід дає рівняння, що вирішуються, його варто використовувати, коли тільки можливо.

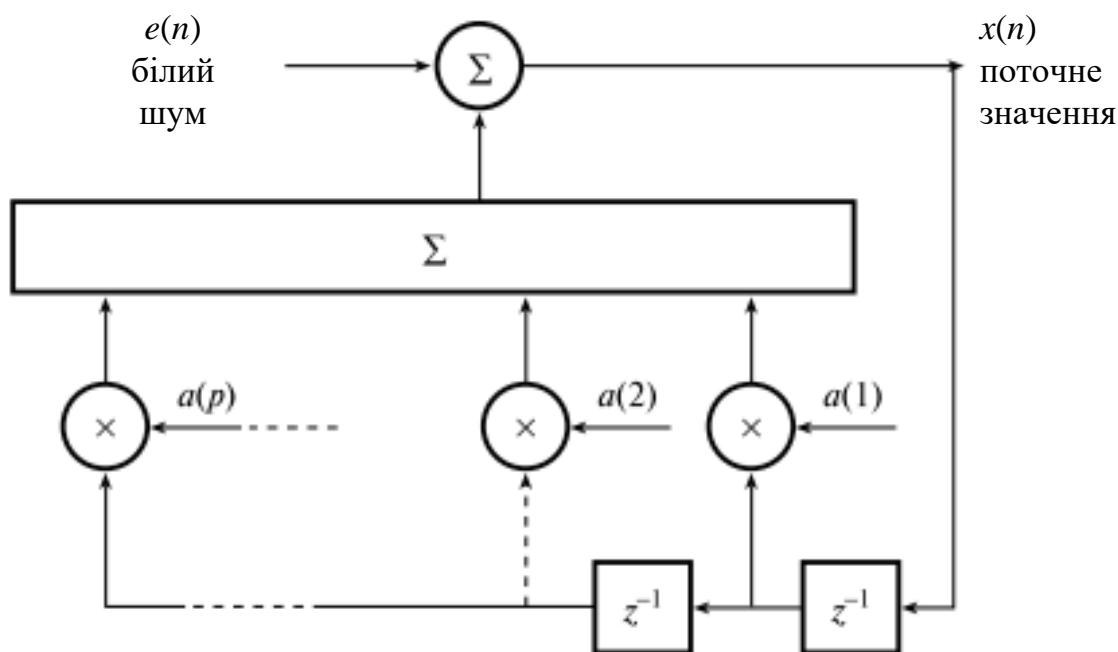


Рис. 20. АР-фільтр

5.1.і Авторегресійна модель та авторегресійний фільтр

В АР-моделі часового ряду поточне значення ряду $x(n)$ є лінійною функцією попередніх значень плюс помилка $e(n)$:

$$x(n) = -a(1)x(n-1) - a(2)x(n-2) - \dots - a(k)x(n-k) - \dots - a(p)x(n-p) + e(n). \quad (37)$$

Це рівняння містить p попередніх членів і представляє модель порядку p . Його можна записати в більш компактній формі:

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) + e(n) = - \sum_{k=1}^p a(k)z^{-k}x(n) + e(n), \quad (38)$$

де z^{-k} – оператор запізнення, яким позначена затримка на k інтервалів вибірки. Далі перепишемо рівняння (38):

$$x(n) + \sum_{k=1}^p a(k)z^{-k}x(n) = \left(1 + \sum_{k=1}^p a(k)z^{-k}\right)x(n) = e(n). \quad (39)$$

Звідси

$$x(n) = \frac{e(n)}{1 + \sum_{k=1}^p a(k)z^{-k}}. \quad (40)$$

Із відношення $x(n)/e(n)$, отримуємо

$$\frac{x(n)}{e(n)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a(k)z^{-k}} = H(z). \quad (41)$$

Тут $H(z)$ інтерпретується як z - перетворення цифрового БІХ-фільтра з одними полюсами, який має коефіцієнти $a(k)$. Подібний фільтр називається авторегресійним. З рівняння (41) $x(n)$ можна як виходи даного фільтра, породжені випадковими входами $e(n)$. Величина $e(n)$ є помилкою між значенням, передбаченим моделлю, $\hat{x}(n)$ і істинним значенням вибірки $x(n)$). Зазвичай, передбачається, що $e(n)$ має властивості білого шуму, тобто. гаусовий розподіл щільності ймовірностей та рівномірний спектр щільності потужності. Отже, можна вважати, що $x(n)$ генерується АР-фільтром, на вході якого джерело білого шуму. Частотна характеристика фільтра $H(f)$ виходить підстановкою $z = e^{i\omega T}$ у рівняння (39), де ω - кутова частота, а T - період дискретизації. Отже,

$$H(f) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a(k)e^{-ik\omega T}}. \quad (42)$$

5.2. Спектральна щільність потужності авторегресійного ряду

Потрібно знайти спектральну густину потужності $P_x(f)$ АР-ряду $x(n)$. Ця величина пов'язана зі спектральною щільністю потужності сигналу білого шуму $P_e(f)$, що дорівнює її дисперсії $\sigma_e^2(n)$:

$$P_x(f) = |H(f)|^2 P_e(f) = |H(f)|^2 \sigma_e^2(n) = \frac{\sigma_e^2(n)}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a(k) e^{-ik\omega T} \right|^2}. \quad (43)$$

Дисперсія білого шуму дорівнює її середньоквадратичному значенню, яке, у свою чергу, дорівнює квадрату середнього значення $e(n)$, а цю величину/ ми позначили через E . Отже, значення $\sigma_e^2(n)$ (або E) можна виразити через параметри моделі, а оскільки параметри моделі визначають можна, то спектральна щільність потужності також знаходиться.

5.3. Розрахунок параметрів моделі - рівняння Юла-Уокера

Оптимальними параметрами моделі вважаються ті, які мінімізують помилку $e(n)$ для всіх вибірок $x(n)$, представлених виразом, подібним до рівняння (38). Виразимо ці помилки з рівняння (38):

$$e(n) = x(n) + \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k). \quad (44)$$

Далі потрібно міра загальної помилки за всіма вибірками, N ($1 \leq n \leq N$). Кожна помилка $e(n)$ може бути позитивною чи негативною, й у великих наборів вибірок середня помилка зазвичай мала. Отже, середня помилка — це зручна міра точності моделі, тому зазвичай використовується середній квадрат помилки (середньоквадратична помилка). Середньоквадратична помилка визначається наступним чином:

$$E = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(x(n) + \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) \right)^2. \quad (45)$$

Вище зазначалося, що $E = \sigma_e^2(n)$. Отже, тепер потрібно вибрати параметри моделі, що мінімізують E . Щоб отримати оптимальне значення кожного параметра в рівнянні (45), потрібно покласти часткову похідну за параметром моделі, що дорівнює нулю. Таким чином для k -го параметра отримуємо рівняння:

$$\frac{\partial E}{\partial a(k)} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N \left(x(n) + \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) \right) \frac{\partial}{\partial a(k)} \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) = 0, \quad (46)$$

$$(1 \leq k \leq p)$$

Тепер

$$\frac{\partial}{\partial a(k)} \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) = x(n-k),$$

оскільки рівняння (46) спрощується до вигляду

$$\frac{\partial E}{\partial a(k)} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \left(x(n) + \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) \right) x(n-k) = 0. \quad (47)$$

Для k -го параметра отримуємо наступне рівняння:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) \right) x(n-k) = -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n)x(n-k). \quad (48)$$

Проілюструємо отриманий результат на прикладі. Записуючи ліву частину рівняння (48) для $k=1$, отримуємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (a(1)x(n-1) + a(2)x(n-2) + \dots + a(p)x(n-p))x(n-1) = \\ & = \frac{1}{N} (a(1)x(0)x(0) + a(2)x(-1)x(0) + \dots + a(p)x(1-p)x(0)) + \\ & + \frac{1}{N} (a(1)x(1)x(1) + a(2)x(0)x(1) + \dots + a(p)x(2-p)x(1)) + \dots + \\ & + \frac{1}{N} (a(1)x(N-1)x(N-1) + a(2)x(N-2)x(N-1) + \dots + a(p)x(N-p)x(N-1)). \end{aligned}$$

Вивчаючи перші члени у кожному рядку, бачимо, що й сума дає автокореляційну функцію з нульової затримкою $R_{xx}(0)$ ряду $x(n)$, помножену на $a(1)$. Отже, сума других членів дає автокореляційну функцію з одиничною затримкою $R_{xx}(-1)$, помножену на $a(2)$, а сума n -х членів рядків дає добуток $R_{xx}(-(p-1))$ та $a(p)$. Оскільки для автокореляційних функцій справедливо співвідношення $R_{xx}(-j) = R_{xx}(j)$, даний вираз можна записати як

$$R_{xx}(0)a(1) + R_{xx}(1)a(2) + \dots + R_{xx}(k-1)a(k) + \dots + R_{xx}(p-1)a(p).$$

Права частина рівняння (48) дорівнює $-R_{xx}(1)$. Прирівнюючи ліву та праву частини, отримуємо

$$\begin{aligned} & R_{xx}(0)a(1) + R_{xx}(1)a(2) + \dots + R_{xx}(k-1)a(k) + \dots + \\ & + R_{xx}(p-1)a(p) = -R_{xx}(1). \end{aligned} \quad (49)$$

Подібне рівняння можна записати для кожного значення k , $1 \leq k \leq p$. У матричній формі ці рівняння виглядають так:

$$\begin{pmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \cdots & R_{xx}(p-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \cdots & R_{xx}(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}(p-1) & R_{xx}(p-2) & \cdots & R_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ a(p) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_{xx}(1) \\ R_{xx}(2) \\ \vdots \\ R_{xx}(p) \end{pmatrix} \quad (50)$$

Тепер із цієї системи рівнянь, відомих як рівняння Юла-Уокера (Yule-Walker), можна отримати параметри моделі $a(k)$. У матричній формі рівняння (50)

$$\mathbf{R}_{xx}(k-j)\mathbf{a}(k) = -\mathbf{R}_{xx}(k). \quad (51)$$

Значить, у принципі,

$$\mathbf{a}(k) = -\mathbf{R}_{xx}^T(k-j)\mathbf{R}_{xx}(k). \quad (52)$$

Видно, що матриця $\mathbf{R}_{xx}(k-j)$ симетрична, і оскільки всі елементи головної діагоналі однакові (і рівні $R_{xx}(0)$), матриця є матрицею Теплиця. Вона також позитивно визначена, звідки випливає, що $x(n)$ не складається виключно з синусоїд. Далі залишилося тільки знайти $a(k)$ із системи рівнянь (50), використавши один із безлічі існуючих способів.

Значення E можна обчислити з рівняння (45) або отримати інший вираз через автокореляційні функції та знайти $a(k)$ так, як описано нижче. Припускаючи, що $a(k)$ та $x(n)$ – дійсні та розписуючи рівняння (45), отримуємо:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left\{ x(n) + \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) \right\} \left\{ x(n) + \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) \right\} = \\ &= \frac{1}{N} \left[\left\{ x(n) + \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) \right\} x(n) + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ x(n) + \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) \right\} \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

З рівняння (47), яке справедливе для всіх k , знаходимо, що в рівнянні (53)

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left\{ x(n) + \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) \right\} \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k),$$

таким чином, рівняння (53) спрощується до виду

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left\{ x(n) + \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) \right\} x(n) = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x^2(n) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) \right) x(n) = \\
&= R_{xx}(0) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a(k)x(n)x(n-k),
\end{aligned}$$

так що остаточно отримуємо р

$$E = R_{xx}(0) + \sum_{k=1}^p a(k)R_{xx}(k). \quad (54)$$

Рівняння (54) або (45) і параметри моделі з рівняння (52) тепер можна підставити в рівняння (43) і отримати авторегресійний спектр густини потужності. Опишемо спочатку методи знаходження $a(k)$ із системи (50) та вибір порядку моделі p .

5.4. Рішення рівнянь Юла-Уокера

Середньоквадратична помилка E , представлена в рівнянні (45), обчислюється з використанням наявних вибірок $x(n)$ для n від 1 до N . Попередні або майбутні значення $x(n)$ вважаються рівними нулю. Як пояснювалося вище, це еквівалентно зважуванню даних та при використанні непараметричних методів оцінки спектру призводить до спектрального згладжування, викликаного впливом бічних пелюсток та зниженим дозволом. Втім, для авторегресійного методу це твердження неправильне. В даному методі неявно оцінюються автокореляційні функції для затримок, що перевищують p , навіть якщо відповідних значень $x(n)$ не існує. Отже, авторегресійні методи дають покращений спектральний дозвіл. У той самий час можна поліпшити спектральні оцінки, наприклад, використовуючи у методі лише існуючі дані. При такому підході значення n ($0 \leq n < N$) не потрібні, а отже їх не потрібно вважати рівними нулю.

5.4.1. Автокореляційний метод

Автокореляційний метод ґрунтується на виразі для середньоквадратичної помилки (45). Із системи рівнянь (50) за допомогою алгоритму Левінсона-Дурбіна (Levinson-Durbin) можна обчислювально ефективно визначити параметри моделі. Даний метод дає найгірший дозвіл за частотою, ніж методи, описані нижче, а отже, він менш підходить для коротких послідовностей вибірок.

5.4.2. Коваріаційний метод

У цьому методі межі підсумовування рівняння (45) встановлюються рівними від $n = p$ до $n = N$. Це означає, що з обчислення автокореляційної функції потрібні лише доступні значення $x(n)$. Крім того, середнє обчислюється за $N - p$ доданками, а не

за N . Таким чином, рівняння (45) наводиться до виду

$$E = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^N \left(x(n) + \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) \right)^2. \quad (55)$$

Крім того, використовується наступний еквівалент рівняння (50):

$$\begin{pmatrix} C_{xx}(1,1) & C_{xx}(1,2) & \cdots & C_{xx}(1,p) \\ C_{xx}(2,1) & C_{xx}(2,2) & \cdots & C_{xx}(2,p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{xx}(p,1) & C_{xx}(p,2) & \cdots & C_{xx}(p,p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ a(p) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} C_{xx}(1,0) \\ C_{xx}(2,0) \\ \vdots \\ C_{xx}(p,0) \end{pmatrix}, \quad (56)$$

де

$$C_{xx}(j,k) = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^N x(n-j)x(n-k), \quad (57)$$

Е виражається так:

$$E = C_{xx}(0,0) + \sum_{k=1}^p a(k)C_{xx}(0,k). \quad (58)$$

Матриця $C_{xx}(j,k)$ розміром $p \times p$ ермітова та невід'ємно визначена. Для розв'язання рівняння (56) можна використовувати метод розкладання Холецкого. Підсумовується тільки $N-p$ запізнюваних компонентів, так що для коротких послідовностей даних можуть мати місце деякі крайові ефекти. Зазначимо, що підступний метод дає кращий спектральний дозвіл, ніж автокореляційний.

5.4.3. Модифікований ковараційний метод

У модифікованому ковараційному методі мінімізується середня оцінка помилок передбачення з випередженням і запізненням. Як і раніше використовуються рівняння (56) і (58), але рівняння (57) модифікується до виду

$$C_{xx}(j,k) = \frac{1}{2(N-p)} \left\{ \sum_{n=p}^N x(n-j)x(n-k) + \sum_{n=1}^{N-p} x(n+j)x(n+k) \right\}. \quad (59)$$

Матриця $C_{xx}(j,k)$ розміром $p \times p$ знову ермітова і не негативно визначена, а для рішення рівняння (56) використовується метод розкладання Холецкого. Цей підхід не гарантує суворої стійкості фільтра з одними полюсами, але на практиці такі фільтри зазвичай стійкі. Крім того, метод дає статистично стійкі спектральні оцінки з високою роздільною здатністю.

5.5. Порядок моделі

Порядок авторегресійної моделі, яка найкраще апроксимує дані, потрібно вибирати акуратно для кожного набору даних, оскільки порядок залежить від статистичних властивостей даних. На даний момент можна проілюструвати даних

ЕЕГ, де різні сегменти даних вимагають моделей різних порядків. Моделі низького порядку краще, оскільки потрібно підбирати мінімум параметрів. Втім, якщо порядок надто низький, оцінка спектра буде надто згладженою. З іншого боку, надто високий порядок призведе до появи хибних максимумів та спектральної нестійкості. Для оцінки порядку Екейком (Akaike) було запропоновано два параметри. Перший - це помилка остаточного передбачення (Final Prediction Error - FPE), яка визначається наступним чином:

$$FPE(p) = \frac{N + p}{N - p} E(p). \quad (60)$$

Другий параметр - це інформаційний критерій Екейка (Akaike Information Criterion), який визначається так:

$$AIC(p) = N \ln E(p) + 2p. \quad (61)$$

Параметр $AIC(p)$ застосовується для невеликих наборів даних, тоді як $FPE(p)$ рекомендується використовувати для більших наборів. Насправді зазвичай намагаються вибрати p , щоб одночасно мінімізувати $FPE(p)$ і $AIC(p)$,

6. Порівняння методів оцінки

З непараметричних методів найбільшу добротність має метод Блекмена-Тьюки, отже, він найкращий, хоча для зручності може вибиратися й інший метод.

Параметричні методи пропонують більшу роздільну здатність за частотою і не вимагають використання вагових функцій. Метод максимальної правдоподібності Кейпена дає незміщену оцінку з мінімальною дисперсією, при якій спектральний дозвіл знаходиться між роздільною здатністю методу Бега (методу найменших квадратів без обмежень) і непараметричних методів. Для нестационарних даних найкраще підходять методи адаптивної фільтрації, що наголошують на найбільш свіжих даних.