Лекція. Друга частина. Використання методів інтерполяції для оцінки просторової мінливості якісних показників

Полігони Тиссена-Вороного (метод найближчого сусіда) (Thiessen-Voronoi polygons)

В якості оцінки змінної в деякій точці досліджуваної області береться значення, яке має найближча (по Евклідовій віддалі) вибіркова точка. Полігони Тиссена-Вороного становлять класифікаційну модель просторового прогнозу, яка для визначення атрибутів у необстежених місцеположеннях пропонує використовувати найближчі ділянки окремих точок. Полігони Тиссена-Вороного ділять територію способом, який повністю визначається конфігурацією мережі точок вимірювань. Цей метод рекомендується використовувати в тому випадку, якщо вихідні вибіркові точки розташовані в просторі регулярно або майже регулярно.

Оцінка досліджуваної функції в точці визначається за формулою:

$$Z_0 = Z_i,$$

де Z_i – значення в вибірковій точці, що розташована ближче інших до місцеположення (X_0, Y_0).

Полігони Тиссена-Вороного часто використовуються в ГІС і географічному аналізі як швидкий спосіб поширення точкових даних у просторі. Побудований просторовий розподіл не є плавним, оскільки має місце стрибкоподібна зміна значень змінної на межах полігонів, що суперечить її дійсній безперервній зміні в просторі. У зв'язку з тим, що є тільки одна точка вимірювань або спостережень на полігоні, при використовуванні даного методу немає можливості оцінки внутрішньої мінливості змінної .

Метод раціональних функцій

Суть методу полягає у представленні інтерпольованої функції (ряду табличних значень) у вигляді відношення двох поліномів. Ряд функцій, що невдало інтерполюються поліноміальними методами, вдається добре наблизити раціональною функцією з поліномом в чисельнику і знаменнику. Особливо це стосується функцій з нерегулярним характером поведінки.

Інтерполяція раціональними функціями полягає у представленні функції інтерполятора $f(x)$ у вигляді відношення двох поліномів:

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_px^p}{b_0+b_1x+\ldots+b_qx^q},\, p+q+1=n\,.$$

Коефіцієнти a_i і b_i визначаються із набору відношень $R(x_j)=f(x_j)$, де $j=1,\ldots,n$, які записуються у вигляді

$$\sum_{j=1}^{p}a_jx_i^j-f(x_i)\sum_{j=0}^{q}b_jx_i^j=0\,,$$

де $i=1,\ldots,n$.

Її перевагами є висока точність і несхильність проблемам властивим поліноміальній інтерполяції, а саме інтерполятор може будувати растр, мінімальне і максимальне значення якого не перевищують мінімальне і максимальне значення вхідного файлу просторових даних. Крім того, обчислені поверхні не чутливі до випадних значень. Для будь-якого набору точок існує інтерполяційний поліном, але не завжди можна побудувати інтерполяційну раціональну функцію. Також велику проблему представляють полюса, які мають тенденцію з'являтися там, де їх ніхто не очікує побачити [].

Нерегулярна тріангуляційна мережа (Triangulated Irregular Network)

Створюється поверхня, що складається з трикутників, формованих найближчими точками. Для цього навколо точок збору даних проводяться кола і їх перетини з'єднуються в мережу компактних трикутників, що примикають один одному без перетинів і розривів (тріангуляція Делоне).

Нехай точка, яка інтерполюється попала в трикутник, утворений точками з координатами (X_1,Y_1), (X_2,Y_2) і (X_3,Y_3). Тоді в тримірному (X,Y,Z) просторі будується площина, що проходить через точки з координатами

(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) і (X_3, Y_3, Z_3). Рівняння площини: $aX + bY + cZ + d = 0$, де коефіцієнти можуть бути обчислені за формулами:

$$a = Y_1(Z_2 - Z_3) + Y_2(Z_3 - Z_1) + Y_3(Z_1 - Z_2);$$

$$b = Z_1(X_2 - X_3) + Z_2(X_3 - X_1) + Z_3(X_1 - X_2);$$

$$c = X_1(Y_2 - Y_3) + X_2(Y_3 - Y_1) + X_3(Y_1 - Y_2);$$

$$d = X_1(Y_2Z_3 - Y_3Z_2) + X_2(Y_3Z_1 - Y_1Z_3) + X_3(Y_1Z_2 - Y_2Z_1).$$

Оцінкою змінної Z в точці (X_0, Y_0) буде відповідне значення на цій площині:

$$Z_0 = \frac{-aX_0 - bY_0 - d}{c}.$$

Відмінною особливістю і перевагою такої моделі є те, що в ній немає перетворень вихідних даних. З одного боку, це не дає можливості використовувати такі моделі для детального аналізу, але з іншого боку, дослідник завжди знає, що в цій моделі немає привнесених помилок, якими грішать моделі, отримані при використанні інших методів інтерполяції. Важливий і той факт, що це найшвидший метод інтерполяції. Головний недолік методу в тому, що підсумкова поверхня виглядає не гладкою. Це викликано тим, що одержані ухили носять переривчастий характер, тобто мають перепади в місцях стикування складових трикутників. Крім того, тріангуляція працює тільки між точками збору даних, але не навколо, і нерегулярність точок веде до несподіваних результатів.

Метод поліноміальної регресії (Polynomial Regression)

Рівняння поліноміальної регресії будується з використанням методу найменших квадратів на основі всіх вхідних даних (околиця пошуку не застосовується), і метод можна вважати глобальним і згладжуючим інтерполятором. Використовується для виділення значних трендів і структур у вхідних даних. Особливістю такого методу є те, що згенерована поверхня не проходить через експериментальні точки. Оцінка досліджуваної функції в точці визначається за формулою:

$$Z_0 = Q(X_0, Y_0),$$

де $Q(X,Y)$ – побудований поліном.

Простота реалізації і відносно непогана якість одержаних інтерполянтів. Коли застосовується порядок полінома вище одиниці, інтерполятор може будувати растр, мінімальне і максимальне значення якого перевищують мінімальне і максимальне значення вхідного файлу просторових даних. Крім того, обчислені поверхні дуже чутливі до випадних значень.

Метод Шепарда (Shepard's Method)

Подібний методу обернених зважених відстаней. Він також використовує обернені відстані при обчисленні вагових коефіцієнтів, за допомогою яких значення експериментальних точок в місцях спостереження набирають вагу. Відмінність полягає у тому, що при побудові інтерполяційної функції в локальних областях використовується метод найменших квадратів. Оцінка досліджуваної функції в точці визначається за формулою:

$$Z_0 = \frac{\sum_{i \in N_0}^{n} w_{i0} \cdot Q_i(X_0, Y_0)}{\sum_{i \in N_0}^{n} w_{i0}}, w_{i0} = \left(\frac{d_{\max 0} - d_{io}}{d_{\max 0} d_{io}} \right)^2,$$

$$Q_i(X,Y) = a + bX + cY + dXY + eX^2 + fY^2.$$

де Z_0 – зважене значення змінної в вибіркових точках;

d_{i0} – відстань від точки інтерполяції до *i*-ої точки вимірювання;

$d_{\max 0}$ – відстань до максимально віддаленої вибіркової точки, серед тих, які враховуються при обчисленні оцінки.

Використиння методу Шепарда зменшує ймовірність появи на згенерованій поверхні структур типу "биче око". Метод Шепарда може бути як точним, так і згладжуючим інтерполяційним методом.

Спосіб обернених зважених відстаней (Inverse Distance Weighted)

Метод інтерполяції обернених зважених відстаней полягає в тому, що відбувається зважування точок таким чином, що вплив відомого значення точки згасає із збільшенням відстані до невідомої точки, значення якої треба визначити.

Оцінка досліджуваної функції в точці визначається за формулою:

$$Z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_{i0} \cdot Z_i}{\sum_{i=1}^{n} w_{i0}}; w_{i0} = \frac{1}{\left(\sqrt{d_{i0}^2 + \delta^2}\right)^{\beta}}$$

де Z_0 – зважене значення змінної в вибіркових точках;

w_{i0} – вага вибіркових точок;

d_{i0} – відстань між точкою, де обчислювалась оцінка і i-ою точкою вимірювання;

δ – параметр згладжування;

β – степеневий параметр, який визначає, як швидко зменшуватиметься вага зі збільшенням відстані.

Метод оберненої дистанції є гнучким і малоємним з погляду використання обчислювальних ресурсів. Якість результату може знизитися, якщо розподіл точок збору даних носить нерівномірний характер. Крім цього, максимальні і мінімальні значення інтерпольованої поверхні можуть бути зафіксовані тільки в точках збору даних. Це часто призводить до так званих "волових очей" – областей підвищених або занижених значень овальної форми.

Інтерполяція B-сплайнами (B-spline)

Інтервал інтерполяції розбивається на невеликі відрізки, на кожному з яких функція задається поліномом певного ступеня. Коефіцієнти полінома підбираються таким чином, щоб виконувалися певні умови (які саме, залежить від способу інтерполяції). Загальні для всіх типів сплайнів третього порядку вимоги – безперервність функції і проходження через запропоновані їй точки.

Кожна координата точки (x, y) B-сплайн кривої описується рівнянням:

$$P(t)=\sum_{k=0}^{L} P_k N_{k,m}(t),$$

де $(L+1)$ – кількість контрольних точок;

$P_k = (x_k, y_k)$ – координати контрольних точок;

$N_{k,m}(t); t \in 0,...,t_{\max}$ ($t_{\max}$ – максимальне значення у вузловому векторі t, рівне $L - m + 2$, де m – порядок полінома).

Простота в обчисленні та чисельна стійкість. Достатня гладкість і підтримка на невеликій ділянці проміжку. Інтерполяція певних контрольних точок. B-сплайн крива інтерполює першу і останню точки, в той час як до інших точок вона наближається. Головним недоліком сплайнів є те, що на кожному інтервалі функція наближається окремим поліномом, а також інтерполяції B-сплайном відносно мало відповідають реальних фізичних процесів.

Метод радіальних базисних функцій (Radial Basis Functions)

У цьому методі оцінка змінної Z в довільній точці галузі дослідження знаходиться як лінійна комбінація значень радіальних базисних функцій. Метод радіальних базисних функцій є методом жорсткої інтерполяції, тобто інтерполяційна поверхня повинна проходити через кожне виміряне опорне значення. Метод використовує одну з п'яти базових функція (плоский сплайн, сплайн з натягом, повністю регуляризоване сплайн, функція мультиквадриків, функція зворотних мультиквадриків) для обробки кожного з виміряних значень, створюючи поверхню жорсткою інтерполяцією.

Оцінка досліджуваної функції в точці визначається за формулою:

$$Z_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B(d_{i0}),$$

де d_{i0} – відстань між точкою де обчислюється оцінка і i-ою точкою вимірювання;

λ_i – коефіцієнт *i*-ої точки вимірювання;

$B()$ – радіальна базисна функція, аргументом якої є d_{i0}.

Наприклад:

1) мультиквадратична функція (Multiquadric)

$$B(d) = \sqrt{d^2 + R^2};$$

2) обернена мультиквадратична функція (Inverse Multiquadric)

$$B(d) = \frac{1}{\sqrt{d^2 + R^2}};$$

3) мультилогарифмічна функція (Multilog)

$$B(d) = \log\left(d^2 + R^2\right);$$

4) плоский сплайн (ThinPlate Spline)

$$B(d) = \left(d^2 + R^2\right)\log\left(d^2 + R^2\right);$$

5) кубічний сплайн (Natural Cubic Spline)

$$B(d) = \left(d^2 + R^2\right)^{3/2},$$

де d – відстань від точки інтерполяції до вибіркової точки з врахуванням анізотропії;

R^2 – параметр згладжування.

Коефіцієнти λ_i отримують рішенням системи *n* рівнянь, які складаються із умов точної інтерполяції:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i B(d_{ij}) = Z_j,\ j = 1, \ldots, n.$$

Радіальні базисні функції аналогічні варіограмам, які використовуються в методі Кріге. Ці функції визначають оптимальну мережу ваг, за допомогою яких зважуються значення функції в точках спостережень при побудові інтерполяційної функції. Радіальні базисні функції можуть інтерполювати значення вище максимального або нижче мінімального виміряного значення.