Тема 5. Прогнозування та аналіз економічних процесів
Частина 2. Аналіз та прогнозування рядів динаміки. Прості методи прогнозування на основі екстраполяції

1. Часовий ряд та його компоненти
2. Прості методи прогнозування на основі екстраполяції
2.1. Особливості простих методів прогнозування
2.2. «Наївні» екстраполяційні моделі
2.3. Метод двох крайніх точок
2.4. Метод середніх групових точок
2.5. Екстраполяція на основі аналітичних показників рядів динаміки
2.6. Екстраполяція на основі плинної середньої
2.7. Екстраполяція на основі індексу сезонності

1. Часовий ряд та його компоненти

Ряди динаміки (часові ряди) характеризують процеси розвитку соціально-економічних явищ. Цим процесам властиві дві взаємопов'язані риси: динамічність та інерційність. Динамічність проявляється зміною рівнів і варіації показників, що характеризують процес, інерційність — сталістю механізму формування процесу, напрямку та інтенсивності динаміки протягом певного часу. Поєднуючи ці риси, динамічний ряд у будь-який момент t містить залишки минулого, основи сучасного і зародки майбутнього.

Діалектична єдність мінливості й сталості, динамічності й інерційності формує закономірність розвитку. Під впливом безлічі факторів довгострокової і короткострокової дії в одних рядах рівні протягом тривалого часу зростають або зменшуються з різною інтенсивністю, в інших зростання і зменшення рівнів чергуються з певною періодичністю (наприклад, одинадцятирічні цикли градових опадів, зумовлені циклами сонячної активності). З року в рік більш-менш регулярно повторюються сезонні піднесення і спади (використання виробничих потужностей і робочої сили, попит на ринку споживчих товарів тощо). Окрім закономірних коливань рівнів, динамічним рядам притаманні також випадкові коливання, пов'язані з масовим процесом.

Ряди, в яких рівні коливаються навколо постійної середньої, називаються стаціонарними. Економічні ряди, як правило, нестаціонарні. Для більшості з них характерна систематична зміна рівнів з нерегулярними коливаннями, коли піки і западини чергуються з різною інтенсивністю. Скажімо, економічні цикли (промислові, будівельні, фондового ринку тощо) повторюються з різною тривалістю і різною амплітудою коливань. Рисунок 1 ілюструє характер динаміки виплат страхового відшкодування VAR2, коливання якого залежать від кількості постраждалих об’єктів. Поквартальні (n = 18) обсяги виплат коливаються від 7,9 до 19,2 млн. грн., на графіку вони представлені відхиленнями від мінімального рівня.

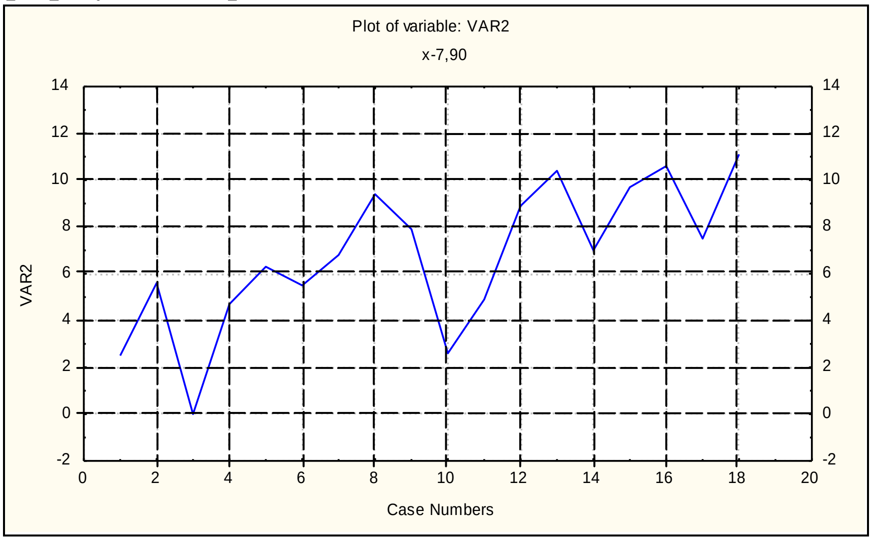

Рис. 1. Динаміка виплат страхового відшкодування

При моделюванні динамічних процесів причинний механізм формування властивих їм особливостей у явному вигляді не враховується. Будь-який процес розглядається як функція часу. Певна річ, час не є фактором конкретного соціально-економічного процесу, змінна часу t просто акумулює комплекс постійно діючих умов і причин, які визначають цей процес.

У моделях динаміки процес умовно поділяється на чотири складові:

- довгострокову, детерміновану часом еволюцію — тренд $f(t)$;
- періодичні (циклічні) коливання різних частот C_t;
- сезонні коливання S_t;
- випадкові коливання e_t.

Зв’язок між цими складовими може представлятися адитивно (сумою) або мультиплікативно (добутком):

$$y_t = f(t) + C_t + S_t + e_t, \qquad (1)$$

$$y_t = f(t)\ C_t\ S_t\ e_t. \qquad (2).$$

Така умовна конструкція дає змогу, залежно від мети дослідження, вивчати тренд, елімінуючи коливання, або вивчати коливання, елімінуючи тренд. При прогнозуванні здійснюється зведення прогнозів різних елементів в один кінцевий прогноз.

Характерною властивістю будь-якого динамічного ряду є залежність рівнів: значення y_t певною мірою залежить від попередніх значень: y_{t-1}, y_{t-2} і т. д. Для оцінювання ступеня залежності рівнів ряду використовують *коефіцієнти автокореляції* r_p з часовим лагом $p = 1, 2, \ldots, m$.

Переважна більшість методів прогнозування з використанням часових рядів ґрунтується на ідеї екстраполяції, тобто уявному продовженні на майбутнє тенденції зміни значень досліджуваного показника, яка спостерігалася в минулому до моменту розрахунку прогнозу. При цьому робиться припущення, що фактори, які впливали на результуючий показник в минулому, суттєво не змінять характер свого впливу на період прогнозування. Під тенденцією розуміють деякий загальний характер змін досліджуваного показника, обумовлений внутрішніми взаєзв'язками факторів, які впливають на розвиток процесу.

Кожна з вищезазначених складових моделі має свій характер впливу на результуючий показник:

- *тренд* віддзеркалює вплив причинно-наслідкових закономірностей, властивих досліджуваному процесу та обумовлених довгодіючими факторами його природи;
- *сезонна складова*, з допомогою якої враховують можливі повторення впливу деяких тимчасових факторів на результуючу змінну протягом відносно короткого проміжку часу – пори року, місяця, тижня;
- *циклічна складова*, з допомогою якої враховують можливі періодично повторювані умови змін в розвитку досліджуваного процесу;
- *випадкова складова*, з допомогою якої враховують вплив на результуючу змінну випадкових і неспостережуваних факторів.

Через труднощі в одночасному врахуванні характеру впливу на результат усіх чотирьох компонент, виділяють тільки дві складові: закономірну та випадкову. Закономірна складова об'єднує тренд, сезонну та циклічну компоненти і називається *трендом*. В цьому контексті тренд характеризує природну закономірність зміни значень досліджуваного показника в часі, звільнену від впливу випадкових факторів.

Отже, рівні $y(t)$ часового ряду доцільно представити у вигляді залежності

$$y(t)=f(t)+\varepsilon(t), \qquad (3)$$

де $f(t)$ – аналітичне представлення тренду з урахуванням можливих циклічних та сезонних складових;

$\varepsilon(t)$ – міра відхилення наявних експериментальних даних від відповідних аналітичних величин, обумовлена дією випадкових факторів.

Причиною широкого використання методів екстраполяції тенденції зміни часових рівнів є відсутність іншої інформації, крім дискретних значень самого показника. Іншими словами – інколи стає проблематично, нерентабельно або ж взагалі неможливо зібрати інформацію про значення факторів, які впливають на значення досліджуваного показника протягом тривалого періоду часу.

Використання методів екстраполяції ґрунтується на наступних припущеннях:

1) тенденція зміни в часі кількісної міри досліджуваного показника може бути представлена певною аналітичною залежністю;

2) умови, які визначали тенденцію зміни в минулому, несуттєво зміняться в недалекому майбутньому.

Основні види тенденції в часових рядах:

– *тенденція середнього рівня* – відображається, як правило, рівнянням лінії, навколо якої змінюються фактичні рівні досліджуваного явища, тобто $y(t)=f(t)+\varepsilon(t)$. Зміст даної функції полягає в тому, що значення тренду в окремі моменти часу є математичними сподіваннями ряду динаміки;

– *тенденція дисперсії* – характеризує тенденцію зміни відхилень між емпіричними рівнями та детермінованою компонентою ряду;

– *тенденція автокореляції* – характеризує зв'язок окремими рівнями ряду динаміки.

Перед побудовою тренду доцільно перевірити виконання гіпотез, чи дійсно рівні ряду змінюються в часі, чи наявні значення різниць їх величин обумовлені лише дією випадкових факторів. Для цього проводять перевірку гіпотез про зміну середнього, дисперсії, автокореляції.

Основні етапи прогнозування з використанням трендових моделей:

1. Попередній аналіз даних (перевірка ряду на стаціонарність).
2. Формування набору моделей (відбір декількох, як правило, нелінійних моделей, котрі візуально найкраще описують закономірність розвитку процесу).
3. Кількісна оцінка параметрів моделей.
4. Перевірка оцінених моделей на адекватність, а параметрів – на статистичну значимість.
5. Вибір найкращої моделі (на основі логічного, економічного та математико-статистичного аналізу).
6. Розрахунок точкового та інтервальних прогнозів.
7. Верифікація прогнозу.

2. Особливості простих методів прогнозування

Метод екстраполяції – один з основних методів у прогнозуванні економічних явищ та процесів. Сутність методу – на основі статистичних даних досліджують закономірності й тенденції розвитку економічних явищ та процесів. Даний метод ґрунтується на припущенні, що ті фактори, які впливали на розвиток певного явища в минулому, будуть діяти і в майбутньому. При формуванні прогнозу за допомогою екстраполяції виходять з тенденцій зміни кількісних характеристик об'єкта дослідження.

Методи екстраполяції можуть бути простими і складними. *Прості методи* прогнозування на основі екстраполяції використовують в управлінні виробництвом, оскільки вони мають ряд переваг:

– достатньо простий апарат дослідження;
– можливість використання для розрахунків портативних і нескладних обчислювальних засобів;
– швидкість виконання розрахунків в оперативному режимі;
– наявність відносно невеликого масиву інформації.

Складні методи екстраполяції передбачають виявлення основної тенденції, тобто застосування статистичних формул, що описують тренд. Методи цієї групи можна розділити на два основні типи: аналітичні й адаптивні.

В основу аналітичних методів прогнозування покладений принцип отримання за допомогою методу найменших квадратів оцінки детермінованої компоненти, що характеризує основну тенденцію.

Метод аналітичного вирівнювання тренду (метод найменших квадратів) може бути застосований тільки в тому випадку, коли розвиток явища досить добре описується побудованою моделлю й умови, що визначають тенденцію розвитку в минулому, істотно не зміняться у майбутньому.

Основу екстраполяційних методів прогнозування складають *динамічні ряди.* Ряд динаміки – це числова послідовність, що характеризує зміну економічного явища у часі.

При побудові динамічних рядів слід в першу чергу приділити увагу на порівнянність рівнів ряду. Це значить, що усі рівні повинні виражатися в однакових одиницях виміру, розраховуватися по єдиній методології, включати єдине коло об'єктів.

Завдання прогнозування економічних показників по рядах динаміки зводиться до наступного:

1. Заданий один часовий ряд показників Y_t (t=1,2,3.,n). Потрібно спрогнозувати значення показника Y для $t > t_n$.

2. Дана система рядів динаміки, в яких показник одного ряду залежить від інших. Необхідно знайти цю залежність, спрогнозувати в кожному ряду показники і лише потім спрогнозувати по знайденій залежності основний показник.

Тенденція ряду динаміки – це загальний напрям розвитку процесу, явища, показника, довгострокова закономірність. Тенденція виражається за допомогою тренду – рівняння, в якому основним чинником виступає час.

При прогнозуванні методами екстраполяції виходять з інерційності явищ (процесів), що досліджуються і прогнозуються.

Ступінь інерційності залежить від розміру і масштабу процесу, що вивчається. На мікрорівні вплив окремого фактору може миттєво змінити ситуацію, в той час, коли на макрорівні, через дії багатьох факторів, які здійснюють часом протилежний один одному вплив, інерційність зберігається у більшій мірі.

При значній інерційності економічних процесів (явищ), що досліджуються, можна з достатнім ступенем імовірності сподіватися, що закономірності, які виникли в «передісторії», будуть з незначними змінами діяти і в прогнозованому періоді.

При побудові ряду оперативних соціально-економічних прогнозів дослідник стикається з проблемою здобуття достатнього обсягу необхідної інформації. Як правило, в цій ситуації доводиться мати справу з короткими часовими рядами, довжина яких може не перевищувати десяти точок. У зв'язку з неповнотою кількісної інформації використовувати досить складні методи формального прогнозування не доцільно. На практиці при побудові кількісних прогнозів використовують відносно прості методи екстраполяції. Ці методи дозволяють отримати хоча і «грубі», однак кількісні оцінки, на основі яких приймаються управлінські рішення.

Методи простої екстраполяції засновані на припущенні про практично незмінний характер поточного процесу, про відсутність істотних змін у стані зовнішнього та внутрішнього середовища об'єкту прогнозування. Це, у свою чергу, накладає певні обмеження на можливості використання даних методів. Як правило, вони використовуються для отримання оперативних і короткострокових прогнозів за умов неповної інформації.

Операцію екстраполяції в загальному вигляді можна подати у вигляді визначення значення функції:

$$y_{j+h}=f(y_j^*, h) \tag{4}$$

де y_{j+h} – значення рівня, що екстраполюється;

h – період упередження;

y_j^* – рівень, прийнятий за базу екстраполяції.

Існують різноманітні прийоми екстраполяції, серед яких будуть розглянуті: метод побудови «наївної моделі»; метод екстраполяції на основі середньої; метод екстраполяції на основі середнього темпу зростання; екстраполяція на основі лінійного тренду, побудованого по двох крайніх точках або двох середніх групових точках.

2.1. «Наївні» екстраполяційні моделі

Розглянемо найпростішу модель, яка використовується при прогнозуванні, – так звану «наївну модель». Значення моделі задаються наступною формулою:

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_t \tag{5}$$

Ідея наївної моделі полягає в припущенні, що дане значення у момент часу t приблизно рівне попередньому значенню.

Стовпець значень Y_t виходить з початкових даних просто зрушенням на один рядок вниз. На рис. 2 представлений графік цієї наївної моделі, який виходить відповідно з початкового графіка шляхом зрушення на одиницю вправо. Прогноз для всіх кварталів, починаючи з 18-го, один і той же і рівний останньому значенню ряду даних: 248.

Рис. 2. Графік наївної моделі

Тобто, *«наївні» екстраполяційні моделі* використовують у прогностичних дослідженнях, коли будується прогноз в припущенні абсолютної незмінності значень попередніх рівнів або абсолютних приростів (коефіцієнтів або темпів зростання) в майбутньому. Ці моделі для рядів y_j або Δy_j можна записати в такому вигляді:

$$y_j=y_{j-1} \tag{6}$$

або

$$\Delta y_j=\Delta y_{j-1}. \tag{7}$$

Формула (6) означає незмінність рівня, (7) – постійність абсолютних змін. Очевидно, що перша та друга формули між собою взаємозв'язані.

Зазвичай формула (6) використовується не до вихідного ряду, а до його модифікацій. Формула (7) для абсолютних приростів може бути використана для кумулятивного ряду відхилень фактичних рівнів ряду від плану, від середнього з вихідних рівнів або іншого рівня, прийнятого за норму.

Наївна модель застосовується в тих випадках, коли потрібно зробити короткостроковий прогноз, за умови, що не очікується великих змін в характері процесу. Важливість цієї моделі для прогнозування в першу чергу полягає у тому, що разом з лінійною моделлю і моделлю постійного зростання наївна модель служить мірилом для визначення ефективності будь-якої іншої моделі. На практиці це означає, що, перш ніж придбати яку-небудь нову модель, треба порівняти її характеристики з їх аналогами.

Природно, що такі моделі через надмірну «наївність» не є надійним інструментом прогнозування. У цілях короткострокового прогнозування ці методи інколи дають цілком задовільні результати. Такі моделі можуть практично застосовуватися і для інших цілей – для здобуття бази й оцінювання якості короткострокових прогнозів. У цьому випадку помилки «наївного прогнозу» розглядаються як певний еталон, з якими зіставляються помилки прогнозів, отриманих іншими методами.

2.2. Метод двох крайніх точок

У ряді випадків за відсутності достатньої кількості даних (наприклад, кількість точок ряду менше 5) для простого прогнозу можна використовувати метод прогнозування по прямій, проведеній через дві крайні точки. Цей метод може бути використаний і в інших випадках, наприклад: для здобуття експрес-прогнозу (коли важливішим є оперативне здобуття прогностичних оцінок, ніж їх точність); для здобуття моделі як першого наближення соціально-економічного процесу (коли дана модель береться за основу і потім уточнюється). Недоліком цього методу є припущення про лінійний характер тенденції зміни показника в часі, що не завжди так, а також низька якість оцінок параметрів моделі. Але у тому випадку, коли вибірки даних украй малі, для прогнозування не використовують більш складні методи.

Доцільно розглянути сутність методу прогнозування на основі прямої, проведеної через дві крайні точки. З упорядкованої вибірки беруть дві крайні точки (t_1, y_1) і (t_N, y_N) і через них проводять пряму вигляду

$$y = b_0 + b_1 t. \quad (8)$$

Оцінки параметрів b_0 та b_1 обчислюються за формулами:

$$b_1 = \frac{y_N - y_1}{t_N - t_1} \quad (9)$$

$$b_0 = y_1 - b_1 t \quad (10)$$

Отримані таким чином оцінки є незміщеними, але вони не будуть обґрунтованими і, тим більше, ефективними.

Схема методу пояснюється на рис. 3.

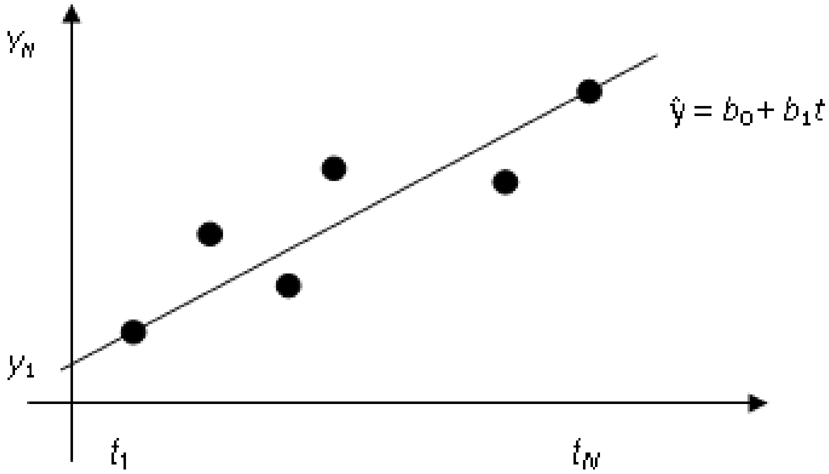

Рис. 3. Метод двох крайніх точок

Приклад 1. Відома динаміка прибутку підприємства за період 2012-2020 рр., табл. 1.

Таблиця 1

Динаміка прибутку підприємства, млн грн.

Роки	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Ti	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Yi	40,8	50,5	48,6	40,2	16,6	10,2	14,6	22,0	24,8

Обчислення оцінок параметрів моделі:

$$b_1 = \frac{y_N - y_1}{t_N - t_1} = \frac{24{,}8 - 40{,}8}{8 - 0} = -2{,}5$$

$$b_0 = y_1 - b_1 t = 40{,}8 - (-2{,}5) \times 0 = 40{,}8$$

Таким чином, модель має вигляд:

$y\hat{}$ = 40,8 – 2,5t.

Отримана модель може бути використана для простого прогнозу наступним чином. Обчислимо значення прибутку підприємства на 2021 (t=*9*) та 2022 (t=*10*) роки. Отже, прогнозні значення

*y*ˆ (2021)= *40,8 – 2,5×9=18,3 млн. грн.*

*y*ˆ (2022)= *40,8 – 2,5×10=15,8 млн. грн.*

2.3. Метод середніх групових точок

Цей метод є узагальненням попереднього. Тут також для прогнозування використовується лінійна модель, але оцінки параметрів моделі кращі, ніж в методі, заснованому на двох крайніх точках.

Сутність методу прогнозування по прямій, проведеній по координатах двох середніх групових точок, полягає в тому, що дану сукупність розбивають на дві приблизно рівні частини, а потім знаходять координати середніх точок для крайніх груп.

Позначимо через ($\overline{t_I}$, $\overline{y_I}$), ($\overline{t_{II}}$, $\overline{y_{II}}$) – координати середніх точок для крайніх груп. Тоді оцінки лінійної моделі b_0 та b_1 обчислюються за формулою:

$$b_1 = \frac{\overline{y_{II}} - \overline{y_I}}{\overline{t_{II}} - \overline{t_I}} \qquad (11)$$

$$b_0 = \overline{y_I} - b_1\overline{t_I} \qquad (12)$$

Оцінки, отримані цим методом, є незміщеними і обґрунтованими, але неефективними.

Приклад 2. Використовуючи вихідні дані *прикладу 1*, знайти оцінки параметрів моделі b_0 і b_1, заздалегідь розбивши вибірку на дві частини.

I група – дані з 2012-2015 рр.

$$\overline{t_I} = \frac{0+1+2+3}{4} = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

$$\overline{y_I} = \frac{40{,}8+50{,}5+48{,}6+40{,}2}{4} = \frac{180{,}1}{4} = 45{,}02$$

II група – дані з 2016-2020 рр.

$$\overline{t_{II}} = \frac{4+5+6+7+8}{5} = 6$$

$$\overline{y_{II}} = \frac{16{,}6+10{,}2+14{,}6+22{,}0+24{,}8}{5} = 17{,}64$$

Використовуючи формули (11) та (12), знайдемо параметри моделі:

$$b_1 = \frac{\overline{y_{II}} - \overline{y_I}}{\overline{t_{II}} - \overline{t_I}} = \frac{17{,}64 - 45{,}02}{6 - 1{,}5} = \frac{-27{,}38}{4{,}5} = -6{,}084$$

$$b_0 = \overline{y_I} - b_1\overline{t_I} = 45{,}02 - (-6{,}084) = 54{,}146$$

Таким чином, модель має вигляд:

$\hat{y} = 54{,}146 - 6{,}084t$.

Отримана модель може бути використана для простого прогнозу наступним чином. Обчислимо значення прибутку підприємства на 2021 ($t=9$) та 2022 ($t=10$) роки. Отже, прогнозні значення:

$\hat{y}$ (2021)= $54{,}146 - 6{,}084\times9=-0{,}61$ *млн. грн.*

$\hat{y}$ (2022)= $54{,}146 - 6{,}084\times10=-6{,}694$ *млн. грн.*

Порівнюючи параметри для двох лінійних моделей, побудованих різними методами, можна переконатися в істотній відмінності оцінок параметрів. Отримана друга модель – точніша та доцільніша для простого прогнозу.

2.4. Екстраполяція на основі аналітичних показників рядів динаміки

Динамічним рядом (рядом динаміки) називається послідовність показників, які характеризують зміну явища (процесу, об'єкта) у часі. Окремі спостереження динамічного ряду називаються рівнями.

За часом, відображеним у динамічних рядах, вони поділяються на моментні й інтервальні.

В моментних рядах динаміки рівні виражають величину явища на відповідну дату, наприклад, залишки готової продукції на перше число кожного місяця, вартість основних фондів на початок, чи кінець року та ін.

В інтервальних рядах рівні виражають розміри явищ за проміжок часу, наприклад, випуск продукції за місяць, квартал, рік.

При побудові динамічних рядів слід в першу чергу приділити увагу на порівнянність рівнів ряду. Це значить, що усі рівні повинні виражатися в однакових одиницях виміру, розраховуватися по єдиній методології, включати єдине коло об'єктів.

У табл. 2 наведена класифікація часових рядів за різними класифікаційними ознаками. Дана класифікація не претендує на повноту, а тільки показує складність поняття «часовий ряд».

Таблиця 2

Класифікація часових рядів

Класифікаційна ознака	Види рядів динаміки
Спосіб вираження рівнів ряду	Абсолютних значень
	Середніх величин
	Відносних величин
Спосіб подання хронології	Моментні ряди
	Інтервальні ряди
Відстань між періодами та датами	Рівновіддалені (повні)
	Нерівновіддалені (неповні)
Наявність основних тенденцій у ряді	Стаціонарні

	Нестаціонарні
Кількість показників	Ізольовані
	Багатовимірні

При аналізі часових рядів, як було зазначено раніше, вирішуються різноманітні завдання, у тому числі завдання визначення природи ряду; дослідження його поведінки в найбільш стислому вигляді, що ґрунтується на абсолютних і відносних порівняннях рівнів ряду. За методикою розрахунку або базою порівняння розрізняють дві групи показників: *базисні та ланцюгові. Базисні* показники розраховуються відносно деякого базисного рівня. *Ланцюгові* – відносно суміжного значення, значення показника на попередньому часовому відрізку.

Також показники аналізу рядів динаміки слід розподілити на дві групи: *поточні та середні* показники.

Для характеристики розвитку явища в часі можуть застосовуватися такі *поточні показники* тенденції динаміки:

1) абсолютні прирости Δy;
2) темпи (коефіцієнти) зростання T_p (K_p);
3) темпи (коефіцієнти) приросту ΔT_p (ΔK_p);
4) коефіцієнт випередження K_{op}.

Позначимо:
y_l — початкове значення рівня динамічного ряду;
y_n — кінцеве значення рівня динамічного ряду;
y_i — умовно прийнятий (i-й) рівень динамічного ряду;
$y_б$ — базисний рівень динамічного ряду;
n — кількість елементів динамічного ряду.
Показники абсолютного приросту обчислюються за допомогою співвідношень:

1) ланцюговий $\Delta y_i^{л}$

$$\Delta y_i^{л} = y_i - y_{i-1}; \qquad (13)$$

2) базисний $\Delta y_i^{б}$

$$\Delta y_i^{б} = y_i - y_б; \qquad (14)$$

Ланцюгові абсолютні прирости називаються швидкістю росту або першими різницями рівнів ряду. Ланцюгові та базисні прирости пов'язані між собою: сума послідовних ланцюгових абсолютних приростів дорівнює базисному, тобто спільному приросту за аналізований проміжок часу.

Для характеристики відносної зміни рівня часового ряду за будь-який проміжок часу використовують *темпи* або *коефіцієнти зростання*.

Темп зростання є відношенням абсолютного рівня ряду до попереднього або базового рівня динамічного ряду:

1) ланцюговий

$$T^{л}P_{i} = \frac{y_i}{y_{i-1}} \times 100\%; \qquad (15)$$

2) базисний

$$T^{б}P_{i} = \frac{y_i}{y_б} \times 100\%; \qquad (16)$$

Коефіцієнти зростання (зниження) знаходять аналогічно. Проте вони обчислюються не у відсотках (%):

1) ланцюговий

$$K^{л}P_{i} = \frac{y_i}{y_{i-1}}; \qquad (17)$$

2) базисний

$$K^{б}P_{i} = \frac{y_i}{y_б} \qquad (18)$$

Якщо ланцюгові показники характеризують інтенсивність зміни рівнів від року до року (місяця до місяця), то базисні показники фіксують інтенсивність зростання за весь період спостереження.

Якщо розвиток відбувається з постійним темпом зростання, то це розвиток за експонентою:

$$y_j = y_b e^{K_p j}. \qquad (19)$$

Відносну оцінку швидкості зміни рівня ряду в одиницю часу дають показники коефіцієнтів (темпів) приросту. *Темп приросту* показує на скільки відсотків (відносних одиниць) порівнюваний рівень більше (менше) рівня прийнятого за базисний.

1) ланцюговий

$$\Delta T^{л}P_{i} = \left(\frac{y_i}{y_{i-1}} - 1\right) \times 100\%; \qquad (20)$$

2) базисний

$$\Delta T^{б}P_{i} = \left(\frac{y_i}{y_б} - 1\right) \times 100\%; \qquad (21)$$

Коефіцієнт приросту обчислюється аналогічно:

$$K_{пр} = k_p - 1 \qquad (22)$$

Щоб знати, що приховано за кожним відсотком приросту, розраховується *абсолютне значення 1 % приросту* як відношення абсолютного приросту рівня за інтервал часу до темпу приросту за той же проміжок часу:

1) ланцюговий

$$\Delta y_{1\%} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} 100} = \frac{y_{i-1}}{100}; \qquad (23)$$

2) за весь період

$$\overline{\Delta} y_{1\%} = \frac{\overline{\Delta} y}{\overline{k}_{np}}; \qquad (24)$$

Коефіцієнт випередження розраховується як відношення подальшого темпу зростання до попереднього:

$$k = \frac{y_i}{y_{i-1}} : \frac{x_i}{x_{i-1}}; \qquad (25)$$

Коефіцієнт випередження прийнято використовувати при порівняльному аналізі декількох рядів динаміки. У цьому випадку їх приводять до однакової порівняльної бази.

Для узагальнення даних за рядами динаміки можуть бути використані *середні:*

середній рівень ряду;

середній рівень зростання;

середній абсолютний приріст;

середній темп зростання та приросту.

Абсолютне значення показника, наприклад чисельність населення, безперервно змінюється в часі. Переписи фіксують величину цього показника на певний момент часу. Якщо в розпорядженні є дані декількох переписів (принаймні два), можна вивчати середню величину та її зміни в часі впродовж того або іншого періоду.

Нехай є інтервальний динамічний ряд з абсолютних величин з рівними інтервалами. У цьому випадку *середній рівень* обчислюється за допомогою середньої арифметичної простої.

Якщо з усереднюваними рівнями ряду пов'язані кількісні характеристики, то середнє визначається за допомогою зважування.

Якщо усереднюються значення не інтервального, а моментного ряду, в якому вказані значення рівнів на теперішні моменти часу, то середня визначається як середня хронологічна.

Середній абсолютний приріст визначається наступним чином:

$$\overline{\Delta} y = \frac{y_n - y_1}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \Delta' y_i}{n-1}; \qquad (26)$$

Коефіцієнт росту за весь період:

$$K_{P_n} = \frac{y_n}{y_1}; \qquad (27)$$

Середній коефіцієнт росту

$$\bar{k}_p = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}; \tag{28}$$

Середній коефіцієнт приросту

$$\bar{k}_{np} = \bar{k}_p - 1; \tag{29}$$

Добуток ланцюгових коефіцієнтів росту дорівнює базисному коефіцієнту росту за весь період, тобто

$$k'_{p_1} \cdot k'_{p_2} \cdot k'_{p_3} .....k'_{p_n} = k_{p_n} \tag{30}$$

що може бути доведено таким чином.

Нехай маємо динамічний ряд за 5 років та рівень показника за базисний рік, що передує рокам п'ятирічки (y_0). Добуток ланцюгових коефіцієнтів росту складе

$$\frac{y_1}{y_0} \cdot \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} \cdot \frac{y_4}{y_3} \cdot \frac{y_5}{y_4} = \frac{y_5}{y_0}; \tag{31}$$

тобто підтверджується залежність (30).

Екстраполяція на основі середньої використовується для здобуття прогнозу в припущенні незмінності в майбутньому середніх значень попередніх рівнів. У цьому випадку середній рівень ряду не повинен мати тенденцій до зміни або ця зміна є несуттєвою. Можна прийняти, що прогнозований рівень дорівнює середньому значенню рівнів у минулому, тобто $y_{j+h} = y_{сер.}$. Отже, прогнозований рівень дорівнює середньому значенню рівнів у минулому.

Дійсно, відрізок часового ряду, охоплений спостереженням, можна уподібнити вибірці. Збільшення або зменшення довжини ряду або щільності спостереження в кожному часовому інтервалі змінює обсяг спостереження та склад рівнів, що входять до розрахунку середньої. Таким чином, значення середньої для даного відрізку ряду можна розглядати як своєрідну вибіркову оцінку деякого «дійсного» середнього, тобто як вибіркове середнє. Звідси можна визначити його похибку та довірчий інтервал, в якому із заданою вірогідністю знаходиться відповідне середнє.

До простих способів прогнозування також відноситься підхід, який формує прогнозну оцінку від фактично досягнутого рівня за допомогою *середнього абсолютного приросту*. Відповідно до нього, прогноз на h кроків вперед на момент часу $t = N + h$ одержуємо за формулою:

$$Y_p(N+h) = Y(N) + h \times \Delta \tag{32}$$

де Δ – середній абсолютний приріст.

Цей спосіб привабливий завдяки своїй простоті та легкості реалізації. Проте, окрім переваг, він має декілька істотних недоліків. По-перше, всі фактичні спостереження є результатом закономірності та випадковості, отже, «відштовхуватися» від останнього спостереження неправомірно. По-друге, немає можливості оцінити правомірність використання середнього приросту у кожному конкретному випадку. По-третє, даний підхід не дозволяє сформувати інтервал, всередину якого потрапляє прогнозована величина, і визначити міру упевненості в цьому. У зв'язку з цим даний підхід застосовується лише як орієнтир майбутнього розвитку або якщо неможливо використовувати описувані нижче статистичні методи (наприклад, при дуже малому обсязі спостережень).

Дуже часто вдосконалений підхід до екстраполяції на основі абсолютних приростів входить як одна із складових в адаптивні моделі прогнозування часових рядів (наприклад, моделі Холта, Уїнтера). Це характерно переважно для часових рядів, що мають досить складну структуру, де на окремих ділянках часового періоду можуть бути подані різноманітні види залежностей. Абсолютний темп приросту в цьому випадку досить швидко реагує на зміни тенденцій, що і дозволяє вказаним моделям мати властивість адаптивності.

Слід також відзначити, що для деяких залежностей абсолютні прирости можуть закономірно змінюватися. Тому на основі аналізу значень абсолютних приростів можна підбирати можливі теоретичні залежності.

На основі наведених аналітичних показників, які широко застосовуються для оцінки динамічних рядів, можна вивести залежності, що можуть бути використані для побудови прогнозів:

$$\widehat{y}_{n+1} = y_n + \Delta' y_n ; \Delta' y_n = y_n - y_{n-1} \qquad (33)$$

$$\hat{\hat{\hat{y}}}_{n+T} = y_n + \overline{\Delta} y \cdot T \qquad (34)$$

де T — величина горизонту прогнозу (T = 1; 2; 3 ...).

Також до простих способів прогнозування також відноситься підхід, який формує прогнозну оцінку від фактично досягнутого рівня за допомогою *середньорічного коефіцієнт росту*

$$\widehat{\widehat{y}}_{n+1} = y_n \cdot k_{p_n} ; k_{p_n} = \frac{y_n}{y_{n-1}} \qquad (35)$$

$$\widehat{\widehat{y}}_{n+T} = y_n \cdot \overline{k}_p^T \qquad (36)$$

Приклад 3. В таблиці 3 наведені дані про середнє споживання кондитерських виробів на одну людину по області за рік. Використовуючи рівняння (34) та (36), побудуємо прогноз споживання кондитерських виробів на наступні 5 років.

Таблиця 3

Середньорічне споживання кондитерських виробів по області

Номер року, t	*Споживання кондитерських виробів на одну людину в рік, кг.*
1	10,7
2	11,5
3	12,2
4	13,4
5	15,0
6	15,0

Середній абсолютний приріст

$$\overline{\Delta y} = \frac{y_k - y_0}{k-1} = \frac{15{,}0 - 10{,}7}{6-1} = \frac{4{,}3}{5} = 0{,}9 кг.$$

На основі залежності (3.34) складемо прогноз споживання кондитерських виробів на наступні 5 років методом середніх абсолютних приростів:

$$\hat{\hat{y}}_{k+1} = 15 + 0{,}9 \cdot 1 = 15{,}9 кг; \qquad \hat{\hat{y}}_{k+2} = 15 + 0{,}9 \cdot 2 = 16{,}8 кг;$$

$$\hat{\hat{y}}_{k+3} = 15 + 0{,}9 \cdot 3 = 17{,}7 кг; \qquad \hat{\hat{y}}_{k+4} = 15 + 0{,}9 \cdot 4 = 18{,}6 кг;$$

$$\hat{\hat{y}}_{k+5} = 15 + 0{,}9 \cdot 5 = 19{,}5 кг;$$

Середньорічний коефіцієнт росту

$$\bar{k}_p = \sqrt[k-1]{\frac{y_k}{y_1}} = \sqrt[6-1]{\frac{15{,}0}{10{,}7}} = \sqrt[5]{1{,}40} = 1{,}07.$$

Складемо прогноз споживання кондитерських виробів на основі формули (36) методом середнього коефіцієнта росту:

$$\hat{\hat{y}}_{k+1} = 15 \cdot 1{,}07^1 = 16 кг; \qquad \hat{\hat{y}}_{k+2} = 15 \cdot 1{,}07^2 = 17{,}2 кг;$$

$$\hat{\hat{y}}_{k+3} = 15 \cdot 1{,}07^3 = 18{,}4 кг; \qquad \hat{\hat{y}}_{k+4} = 15 \cdot 1{,}07^4 = 19{,}7 кг;$$

$$\hat{\hat{y}}_{k+5} = 15 \cdot 1{,}07^5 = 21 кг;$$

Суттєвим недоліком показників середнього абсолютного приросту та середнього коефіцієнта росту є те, що значення їх цілком залежить тільки від крайніх рівнів динамічного ряду. Проміжні значення, які багато в чому, а іноді і в вирішальній мірі визначають тенденцію змін показників, по суті в розрахунках не беруть участі. Зазначений недолік багато в чому усувається шляхом аналітичного вирівнювання рядів динаміки.

Приклад 4. В управлінні бурякоцукровим виробництвом дуже важлива об'єктивна оцінка очікуваних урожайності та цукристості буряка, на основі яких визначається валовий збір буряка та обсяг виготовленого цукру. Першочергове значення мають короткострокові прогнози показників, що орієнтовані на поточний виробничий рік, який охоплює приблизно період вересень-січень.

В основу розрахунків середньої урожайності буряка та середньої цукристості заготовленого буряка покладені значення вказаних показників за станом на перше жовтня.

Для одержання названих показників у агропромисловому комплексі щодекадно роблять оцінки маси кореня (з 1 липня по 1 жовтня) та цукристості буряка (з 20 липня по 1 жовтня). Задача полягає у тому, щоб на основі одержаних даних, оцінити значення цих показників за станом на 1 жовтня.

З множини методів, які рекомендовані для оцінки значення вказаних показників на 1 жовтня, найбільш простий та доступний — це використання значень приросту буряка за декади. Для розрахунку приросту використовуються середні значення маси кореня на кожну декаду, яка визначається за формулою:

$$\overline{p}_i = \frac{\sum_j p_{ij} s_j m_j}{\sum_j s_j m_j}, \qquad (37)$$

де $\overline{p}_i$ — середнє значення маси кореня на i-у декаду;

P_{ij}— маса кореня в i-у декаду j-го року;

s_j — площа посіву j-го року;

m_j— густота насадження коренеплодів по стану на 20 серпня j-го року.

Прирости розраховуються за формулою (37), тобто:

$$\Delta\overline{p}_1 = \overline{p}_{10.07} - \overline{p}_{1.07};\ \Delta\overline{p}_2 = \overline{p}_{20.07} - \overline{p}_{10.07};\ \Delta\overline{p}_3 = \overline{p}_{1.08} - \overline{p}_{20.07};\ldots;\Delta\overline{p}_9 = \overline{p}_{1.10} - \overline{p}_{20.09}$$

В таблиці 4 наведені дані про абсолютні прирости маси кореня, які розраховані на основі середніх значень маси кореня за 10 років.

Таблиця 4

Абсолютні прирости маси кореня (г)

$\Delta\overline{p}_1 = \overline{p}_{10.07} - \overline{p}_{1.07}$	$\Delta\overline{p}_2 = \overline{p}_{20.07} - \overline{p}_{10.07}$	$\Delta\overline{p}_3 = \overline{p}_{1.08} - \overline{p}_{20.07}$
39	46	54
$\Delta\overline{p}_4 = \overline{p}_{10.08} - \overline{p}_{1.08}$	$\Delta\overline{p}_5 = \overline{p}_{20.08} - \overline{p}_{10.08}$	$\Delta\overline{p}_6 = \overline{p}_{1.09} - \overline{p}_{20.08}$
55	50	42
$\Delta\overline{p}_7 = \overline{p}_{10.09} - \overline{p}_{1.09}$	$\Delta\overline{p}_8 = \overline{p}_{20.09} - \overline{p}_{1.09}$	$\Delta\overline{p}_9 = \overline{p}_{1.10} - \overline{p}_{1.09}$
33	24	14

Отримавши дані про масу кореня станом на 1.07, можна, використовуючи показники таблиці 4, визначити очікуване значення названого показника станом на 1.10

$$\hat{\hat{p}}_{1.10} = p_{1.07} + (\Delta\overline{p}_1 + \Delta\overline{p}_2 + \Delta\overline{p}_3 + \Delta\overline{p}_4 + \Delta\overline{p}_5 + \Delta\overline{p}_6 + \Delta\overline{p}_7 + \Delta\overline{p}_8 + \Delta\overline{p}_9) \qquad (38)$$

Якщо поступає інформація за наступні декади, то розрахунки виконуються таким чином:

$$\hat{\hat{p}}_{1.10} = p_{10.07} + (\Delta\overline{p}_2 + \Delta\overline{p}_3 + \Delta\overline{p}_4 + \Delta\overline{p}_5 + \Delta\overline{p}_6 + \Delta\overline{p}_7 + \Delta\overline{p}_8 + \Delta\overline{p}_9), \qquad (39)$$

$$\hat{\hat{p}}_{1.10} = p_{20.07} + (\Delta\overline{p}_3 + \Delta\overline{p}_4 + \Delta\overline{p}_5 + \Delta\overline{p}_6 + \Delta\overline{p}_7 + \Delta\overline{p}_8 + \Delta\overline{p}_9)$$

і т.д.

Припустимо, що станом на 1.07 поточного року маса кореня становила 25*г*. Тоді очікувана маса кореня за станом на 1.10 становить

$$\hat{\hat{P}} = 25 + (39 + 46 + 54 + 55 + 50 + 42 + 33 + 24 + 14) = 382г$$

В таблиці 5 наведені результати послідовних прогнозів на основі застосування абсолютних приростів.

Результати прогнозу достатньо точні. Враховуючи, що фактичне значення маси кореня за станом на 1.10 дорівнює 376 г, то розходження по той, чи інший бік становило від 376 - 382 = -6 г, або 1,6%, до 376 - 367 = 9 г, або 2,4%.

За таким ж самим методом прогнозується цукристість буряка.

Слід відмітити, що прогнозування найважливіших показників буряко-цукрового виробництва функціонувало у реальному режимі часу протягом тривалого часу.

Таблиця 5

Результати прогнозу маси кореня

За станом на:	Маса кореня, *г.*									
	01.07	10.07	20.07	01.08	10.08	20.08	01.09	10.09	20.09	01.10
01.07	25	<u>64</u>	110	164	219	269	311	344	368	382
10.07	25	64	<u>110</u>	164	219	269	311	344	368	382
20.07	25	64	111	<u>165</u>	220	269	312	345	369	382
01.08	25	64	111	161	<u>216</u>	266	308	341	365	379
10.08	25	64	111	161	212	<u>262</u>	305	337	361	375
20.08	25	64	111	161	212	257	<u>300</u>	332	356	370
01.09	25	64	111	161	212	257	297	<u>330</u>	354	367
10.09	25	64	111	161	212	257	297	336	<u>360</u>	373
20.09	25	64	111	161	212	257	297	336	363	<u>376</u>
01.10	25	64	111	161	212	257	297	336	363	376

Примітка: над рискою таблиці 5 подані прогнозовані значення, під рискою — фактичні.

2.5. Екстраполяція на основі плинної середньої

Метод плинної середньої, як і решта методів екстраполяції, ґрунтується на припущенні, що тенденція змін показника, яка була виявлена в минулому буде перенесена на майбутні періоди, тобто базується на використанні залежності:

$$\hat{\hat{y}}_{t+k} = y_{t+k-1} + \Delta y_{t+k} \qquad (40)$$

де k — величина горизонту прогнозу (k = 1; 2; 3 ...).

Δy_{t+k} — це приріст, що обраховується за формулою для k = 1:

$$\Delta y_{t+1} = \lambda_t y_t + \lambda_{t-1}\Delta y_{t-1} + \lambda_{t-2}\Delta y_{t-2} + \ldots + \lambda_{t-(n-1)}\Delta y_{t-(n-1)}, \qquad (41)$$

$$\Delta y_{t+1} = \lambda_{t-1}\Delta y_{t-1} + \lambda_{t-2}\Delta y_{t-2} + \ldots + \lambda_{t-(n-1)}\Delta y_{t-(n-1)}, \qquad (41)$$

$$y_{t+1} = \lambda_t y_t + \lambda_{t-1}\Delta y_{t-1} + \lambda_{t-2}\Delta y_{t-2} + \ldots + \lambda_{t-(n-1)}\Delta y_{t-(n-1)},$$

де n — кількість років «передісторії».

Коефіцієнт λ_i розраховується за формулою:

$$\lambda_i = \frac{i \cdot \beta}{n}; \qquad (42)$$

де i — число, яке означає послідовний натуральний ряд «передісторії», починаючи з останнього;

β — визначається за табл. 6.

Таблиця 6

Визначення β

N	3	4	5	6	7	8
β	0,500	0,400	0,333	0,286	0,250	0,222

Визначимо значення λ_i для п'ятирічки.

Згідно з даними наведеної вище таблиці при N=5, β=0,333.

Звідси, за формулою (42):

$$\lambda_1 = \frac{1 \cdot 0{,}333}{5} = 0{,}067, \qquad \lambda_2 = \frac{2 \cdot 0{,}333}{5} = 0{,}133,$$

$$\lambda_3 = \frac{3 \cdot 0{,}333}{5} = 0{,}200, \qquad \lambda_4 = \frac{4 \cdot 0{,}333}{5} = 0{,}267,$$

$$\lambda_5 = \frac{5 \cdot 0{,}333}{5} = 0{,}333.$$

Якщо підставити розраховані значення λ_i у формулу (41), отримаємо:

$$\Delta y_{t+1} = 0{,}333\Delta y_t + 0{,}267\Delta y_{t-1} + 0{,}200\Delta y_{t-2} + 0{,}133\Delta y_{t-3} + 0{,}067\Delta y_{t-4} \qquad (43)$$

Особливістю методу плинної середньої є те, що рівень показників, який знаходиться ближче до прогнозованого періоду, чинить більший вплив на значення прогнозованих показників, порівняно з віддаленими періодами. Досягається це завдяки коефіцієнту λ.

Прогнозні значення показників розраховуються наступним чином:

$$\Delta y_{t+1} = \lambda_t y_t + \lambda_{t-1}\Delta y_{t-1} + \lambda_{t-2}\Delta y_{t-2} + ... + \lambda_{t-(n-1)}\Delta y_{t-(n-1)},$$

$$\hat{\hat{y}}_{t+1} = y_t + 0{,}333\Delta y_t + 0{,}267\Delta y_{t-1} + 0{,}200\Delta y_{t-2} + 0{,}133\Delta y_{t-3} + 0{,}067\Delta y_{t-4} \qquad (44)$$

$$\hat{\hat{y}}_{t+2} = \hat{\hat{y}}_{t+1} + 0{,}333\Delta y_t + 0{,}267\Delta y_{t-1} + 0{,}200\Delta y_{t-2} + 0{,}133\Delta y_{t-3}$$

$$\hat{\hat{y}}_{t+3} = \hat{\hat{y}}_{t+2} + 0{,}333\Delta y_t + 0{,}267\Delta y_{t-1} + 0{,}200\Delta y_{t-2}$$

$$\hat{\hat{y}}_{t+4} = \hat{\hat{y}}_{t+3} + 0{,}333\Delta y_t + 0{,}267\Delta y_{t-1}$$

$$\hat{\hat{y}}_{t+5} = \hat{\hat{y}}_{t+4} + 0{,}333\Delta y_t$$

Приклад 5. На основі даних *прикладу 3* (таблиця 3) складемо прогноз споживання кондитерських виробів на основі методу плинної середньої. Розрахуємо абсолютні прирости:

$$\Delta y_t = y_6 - y_5 = 15{,}0 - 15{,}0 = 0;$$

$$\Delta y_{t-1} = y_5 - y_4 = 15{,}0 - 13{,}4 = 1{,}6;$$

$$\Delta y_{t-2} = y_4 - y_3 = 13{,}4 - 12{,}2 = 1{,}2;$$

$$\Delta y_{t-3} = y_3 - y_2 = 12{,}2 - 11{,}5 = 0{,}7;$$

$$\Delta y_{t-4} = y_2 - y_1 = 11{,}5 - 10{,}7 = 0{,}8;$$

Виходячи з наведених вище залежностей (41):

$$\hat{\hat{Y}}_{t+1} = 15{,}0 + 0{,}333 \cdot 0 + 0{,}267 \cdot 1{,}6 + 0{,}200 \cdot 1{,}2 + 0{,}133 \cdot 0{,}7 + 0{,}067 \cdot 0{,}8 = 15{,}8 \text{ кг}.$$

$$\hat{\hat{Y}}_{t+2} = 15{,}8 + 0{,}333 \cdot 0 + 0{,}267 \cdot 1{,}6 + 0{,}200 \cdot 1{,}2 + 0{,}133 \cdot 0{,}7 = 16{,}6 \text{ кг}$$

$$\hat{\hat{\hat{Y}}}_{t+3} = 16{,}6 + 0{,}333 \cdot 0 + 0{,}267 \cdot 1{,}6 + 0{,}200 \cdot 1{,}2 = 17{,}3 \text{ кг}$$

$$\hat{\hat{\hat{Y}}}_{t+4} = 17{,}3 + 0{,}333 \cdot 0 + 0{,}267 \cdot 1{,}6 = 17{,}7 \text{ кг}.$$

$$\hat{\hat{\hat{Y}}}_{t+5} = 17{,}7 + 0{,}333 \cdot 0 = 17{,}7 \text{ кг}$$

Разом з тим перевага методу плинної середньої в тому, що на значення прогнозованих показників впливають в тій чи іншій мірі усі дані «передісторії», в той час, коли значення середньорічного коефіцієнта росту визначається тільки крайніми величинами динамічного ряду.

Наявність альтернативних варіантів прогнозу дозволяє спеціалістам на основі досвіду, знання, інтуїції відібрати найбільш прийнятний.

2.7. Екстраполяція на основі індексу сезонності

В процесі господарської діяльності окремі галузі промисловості, торгівля, побут стикаються з циклічними коливаннями, які викликані сезонним характером виробництва та споживання товарів і послуг.

Сезонні коливання — це більш чи менш сталі внутрішньорічні коливання в ряді динаміки, що обумовлені специфічними умовами виробництва і споживання даного товару чи послуг. Для організації виробництва і реалізації продукції сезонних виробництв надзвичайно важливо вивчити тенденцію сезонних коливань, що склалися, і розробити прогноз на найближчу перспективу, головним чином, на наступний рік.

Для вивчення сезонних коливань використовуються спеціальні показники, які називаються індексами сезонності, а сукупність їх утворює сезонну хвилю.

За даними, які характеризують обсяг реалізації продукції хлібозаводами об'єднання (таблиця 7), розрахуємо індекси сезонності, побудуємо сезонну хвилю і прогноз обсягу реалізації продукції на окремі місяці наступного року.

Індекс сезонності визначається за формулою:

$$i_c = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}} \times 100\%, \qquad (45)$$

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_i y_i}{k}, \qquad (46)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_j \bar{y}_i}{n} = \frac{\sum_j \sum_i y_{ij}}{k \cdot n}, \qquad (47)$$

де $\bar{y}_i$ —середнє значення показника за прийнятий проміжок часу (у нашому прикладі середня величина за кожний місяць, гр.7);

$\bar{y}$ —середнє значення показника за весь період;

$к$ —кількість років *(к* = 1, 2, 3, 4);

n — кількість місяців *(n* = 1, 2, 3, ..., 12)

Розраховані для даних таблиці 3.7 індекси сезонності подані у графі 8, а їх ряд створює сезонну хвилю.

Таблиця 7

Обсяг реалізації хлібобулочних виробів (тис.т)

Рік / *місяць*	*1-й рік*	*2-й рік*	*3-й рік*	*4-й рік*	*Разом за 4 роки*	*В середньому за 4 роки,* $\bar{y}_i$	*Індекс сезонності* $\left(\frac{\bar{y}_i}{\bar{y}}\right)100$	*Прогноз обсягу реалізації продукції на наступний рік*
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6=2+3+4+5*	*7=(гр.6) /4*	*8*	*9*
01	5,3	5,4	5,5	6,4	22,6	5,65	74,6	6,1
02	5,4	5,6	5,7	6,7	23,4	5,85	77,2	6,3
03	6,2	6	5,9	6,9	25,0	6,25	82,5	6,7
04	6,4	6,6	6,7	7,3	27,0	6,75	89,1	7,3
05	7,0	7,2	7,5	7,7	29,4	7,35	97,0	7,9
06	7,5	7,7	8,0	8,2	31,4	7,85	103,6	8,5
07	8,0	8,1	8,5	8,7	33,3	8,33	110,0	9,0
08	8,5	8,6	8,8	9,1	35,0	8,75	115,5	9,4
09	8,9	9,0	9,2	9,5	36,6	9,15	180,8	9,9
10	8,3	8,5	9,0	9,1	34,9	8,72	115,1	9,4
11	8,0	8,3	8,6	8,4	33,3	8,33	110,0	9,0
12	7,5	7,9	8,3	8	31,7	7,93	104,7	8,5
Разом	87,0	88,9	91,7	96,0	363,6	-	1200,0	98,0
В середньому						7,575	100,0	

Для прикладу визначимо індекс сезонності для першого місяці – січня. Він визначається як відношення середнього обсягу споживання в січні місяці за чотири роки 5,65 тис.т до середнього споживання за 12 місяців протягом чотирьох років (7,575 тис.т) і множимо на 100%:

$$i_c(\text{за січень}) = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}} \times 100 = \frac{5{,}65}{7{,}575} \times 100 = 74{,}6\%$$

За інші місяці визначають аналогічно.

Індекс сезонності для складання прогнозу використовується таким чином. Припустимо, що на наступний рік об'єднання передбачає реалізувати 98 тис. т. хлібобулочних виробів. Для того, щоб сформувати помісячний план реалізації продукції можна використати наступну залежність:

$$\hat{\hat{Q}}_i = \frac{\frac{\hat{Q} \cdot i_c}{n}}{100}, \qquad (48)$$

де $\hat{\hat{Q}}_i$ — очікуваний місячний об'єм реалізації продукції (i = 1, 2, 12);

$\hat{\hat{Q}}$ — очікуваний річний обсяг реалізації продукції;

i_c — індекс сезонності;

n — кількість періодів $(n = 12)$.

Для прикладу визначимо прогнозні значення обсягу реалізації продукції на наступний рік на січень місяць. Для цього скористаємось формулою (48). Тобто для того, аби визначити обсяг реалізації продукції в січні очікуваний річний обсяг реалізації продукції (98 тис. т) множимо на індекс сезонності січня – 74,6% і ділимо на 12 та 100:

$$\hat{\hat{Q}}_{січень} = \frac{\frac{\hat{Q} \cdot i_{c\,(січень)}}{n}}{100} = \frac{\frac{98 \times 74{,}6}{12}}{100} = 6{,}1\,тис.\,т$$

Результати розрахунків наведені в графі 9 таблиці 7.

Застосування індексу не обмежується тільки дослідженням сезонного характеру виробництва і споживання продукції. В декількох галузях промисловості коливання виробництва продукції пов'язані з особливостями технології, характером сировини та іншими факторами. Так, у цукровій промисловості встановлена добова норма переробки цукрового буряка на початку виробничого сезону і в кінці його, як правило, не виконується, а в середині виробництва є умови для перевиконання. Це пов'язано, головним чином, з технологічними властивостями сировини — цукрового буряка.

Звідси важлива задача визначення таких добових норм переробки цукрового буряка по декадах на наступний сезон, щоб в середньому була забезпечена норма переробки не менше 100%. Норма переробки в цілому на сезон визначається як добуток добової потужності на встановлений коефіцієнт використання потужності. В таблиці 8 наведені дані про процент виконання добової норми переробки буряка (відношення фактичної добової переробки буряка до встановленої норми на сезон) і порядок розрахунку прогнозованого (планового) завантаження цукрового заводу.

Позначимо: N — добова потужність заводу;

P_m — добова продуктивність заводу, яка встановлена на друге півріччя.

$\bar{\bar{y}}$ — розрахункове значення виконання плану добової переробки буряка в середньому за друге півріччя, яке визначається за формулою:

$$\bar{\bar{y}} = \frac{\sum_i (\bar{\bar{y}}_i \sum Q_{ij})}{\sum_j \sum_i Q_{ij}}, \tag{49}$$

де Q_{ij} — обсяг переробленого буряка в i-ї декаді j-го року.

Таблиця 8

Прогноз добової переробки цукрового буряка по декадах на наступний сезон

Декади	*Виконання плану добової переробки цукрового буряка, %*			*Добова продуктивність, т*	
	Фактично в середньому за п'ятиріччя, $\bar{y}_i$	*Вирівняне по рівнянню тренда*,* $\hat{y}_i$	*Індекс сезонності* $(\bar{y}_i : \bar{\bar{y}})\cdot 100$	*При нормі переробки буряка, що склалася* $(p_0 \cdot \bar{y}_i):100$	*При прогнозованому завантаженні (гр4-p_0):100*
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
10,09	76,02	79,76	87,5	836,3	962,5
20,09	96,2	91,95	100,88	1058,2	1109,7
01,1	99,34	96,8	106,2	1092,2	1168,2
10,1	102,96	98,17	107,7	1132,6	1184,8
20,1	96,61	97,55	107,24	1062,7	1177,8
01,11	99,46	95,69	106,8	1094,0	1154,8
10,11	90,33	93,03	102,06	993,0	1122,6
20,11	82,67	89,85	98,57	909,3	1084,3
01,12	89,83	86,35	94,73	988,2	1042,1
10,12	78,38	82,66	90,69	862,2	997,5
20,12	64,42	78,88	85,54	686,6	951,9
01,01	97,43	75,07	82,36	1071,7	905,9
2-півріччя	91,63	91,15	100,0	1007,9	1100,0

В таблиці 8 $\bar{\bar{y}}$ подана в підсумковому рядку графи 3. Початкові дані для розрахунку граф 5 і 6 є: добова потужність — N = 1220т.;

Установлений коефіцієнт використання потужності на друге півріччя — K = 0,92.

Отже, планова добова продуктивність на друге півріччя складає $P_0 = KN$ = 0,92 - 1220 = 1100 т.

Дані таблиці 8 свідчать про те, що норма переробки буряка заводом не виконувалась. В графі 6 наведені розрахункові, з використанням індексу сезонності, значення добової переробки цукрового буряка по декадах, які дозволяють забезпечити ритмічну роботу заводу і виконання норми загрузки заводу в цілому на друге півріччя.