

Лекція 3

Розробка фільтрів з кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ-фільтрів)

1. Вступ

1.1. Ключові особливості КІХ-фільтрів

1. Стандартний КІХ-фільтр характеризується такими рівняннями:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \quad (1,а)$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k} \quad (1,б)$$

де $h(k)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$ – коефіцієнти імпульсної характеристики, $H(z)$ – передатна функція фільтра, а N – довжина фільтра, тобто. кількість коефіцієнтів фільтра. Формула (1, а) - це різницеве рівняння КІХ-фільтра. Дане рівняння записано в часовій області і представляє КІХ-фільтр в його нерекурсивній формі: поточна вихідна вибірка $y(n)$ - це функція тільки поточного та минулих значень на вході $x(n)$. За реалізації КІХ-фільтрів у такій формі, тобто через пряме представлення формули (1, а), фільтри завжди стійкі. У формулі (1, б) записана передатна функція фільтра, потрібна для аналізу фільтра, наприклад, розрахунку частотної характеристики.

2. КІХ-фільтри можуть мати точну лінійну фазову характеристику.

3. КІХ-фільтри дуже просто реалізувати. Архітектура всіх існуючих процесорів ЦОС підходить для фільтрації з кінцевою імпульсною характеристикою. Крім того, нерекурсивні КІХ-фільтри менш схильні до ефектів кінцевої розрядності, ніж БІХ-фільтри. Існують також рекурсивні КІХ-фільтри, використання яких іноді обчислювально вигідніше.

Отже, КІХ-фільтри варто використовувати, якщо необхідно скористатись описаними вище перевагами, зокрема, можливістю отримання лінійної фазової характеристики.

1.2. Лінійна фазова характеристика та її наслідки

Однією з найважливіших властивостей КІХ-фільтрів є можливість отримання точної лінійної фазової характеристики. При проходженні сигналу через фільтр модифікації піддається амплітуда та/або фаза сигналу. Природа та величина зміни сигналу залежать від амплітудної та фазової характеристик фільтра. Зручною мірою модифікації фазової характеристики сигналу є фазова чи групова затримка фільтра. Якщо сигнал складається з кількох частотних компонентів (наприклад, мовний або модульований сигнал), фазова затримка фільтра - це величина часової затримки, яку відчуває кожен частотний

компонент сигналу під час проходження через фільтр. Групова затримка – це середня часова затримка складового сигналу. Математично фазова затримка дорівнює мінус куту зсуву фази, поділеному на частоту, тоді як групова затримка - це мінус похідна фази за частотою:

$$T_p = -\theta(\omega) / \omega \quad (2,а)$$

$$T_g = -d\theta(\omega) / d\omega \quad (2,б)$$

Фільтр з нелінійною фазовою характеристикою спотворюватиме фазу сигналу, що проходить через цей фільтр. Це пояснюється тим, що частотні компоненти сигналу затримуватимуться на величину, не пропорційну частоті, порушуючи в такий спосіб їх гармонійний зв'язок. Подібне порушення небажано в багатьох ситуаціях (наприклад, передачі даних, відтворенні музики та відео, біомедицині) і його можна уникнути, використовуючи фільтри з лінійними фазовими характеристиками у робочому діапазоні частот.

Говорять, що фільтр має лінійну фазову характеристику, якщо виконується одне з наступних співвідношень:

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega \quad (3,а)$$

$$\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega \quad (3,б)$$

де α і β – константи. Якщо фільтр задовольняє умові (3 а), у нього постійні групова і фазова затримки. Умова (3, а) задовольняється, якщо імпульсна характеристика фільтра має позитивну симетрію. Фазова характеристика в цьому випадку є просто функцією довжини фільтра:

$$h(n) = h(N - n - 1), \begin{cases} n = 0, 1, \dots, (N - 1) / 2 & (N - \text{непарне}) \\ n = 0, 1, \dots, (N / 2) - 1 & (N - \text{парне}) \end{cases} \quad (3,а)$$

$$\alpha = (N - 1) / 2$$

Умова (3 б) задовольняється, коли фільтр має тільки постійну групову затримку. В цьому випадку імпульсна характеристика фільтра має негативну симетрію:

$$h(n) = -h(N - n - 1),$$

$$\alpha = (N - 1) / 2,$$

$$\beta = \pi / 2.$$

КІХ-фільтри з лінійною фазовою характеристикою формують важливий клас у сімействі КІХ-фільтрів. Вони мають унікальний набір властивостей, що впливають на розробку і реалізацію даних фільтрів. Продемонструємо деякі з цих властивостей на прикладі.

Приклад .1

1. Коротко опишіть умови, необхідні для того, щоб реальний цифровий фільтр мав лінійну фазову характеристику, та переваги фільтрів з такою характеристикою.

2. Цифровий КІХ-фільтр має фазову характеристику $h(n)$, яка визначена в інтервалі $0 \leq n \leq N-1$. Покажіть, що при $N = 7$ і $h(n)$, що задовольняє умову симетрії

$$h(n) = h(N-n-1),$$

фільтр має лінійну фазову характеристику.

3. Повторіть п. 2 при $N = 8$.

Рішення

1. Необхідною та достатньою умовою того, що фільтр має лінійну фазову характеристику, є симетрія його імпульсної характеристики.

$$h(n) = h(N-n-1) \text{ або } h(n) = -h(N-n-1).$$

Для нерекурсивних КІХ-фільтрів пам'ять для зберігання коефіцієнтів і число арифметичних операцій менше приблизно вдвічі. Для рекурсивних КІХ-фільтрів коефіцієнти можна вибрати так, щоб вони були простими цілими числами, що підвищує швидкість обробки. У фільтрах з лінійною фазовою характеристикою всі частотні компоненти при проходженні через фільтр затримуються на той же самий час, так що в цьому випадку фазове спотворення відсутнє.

2. Використовуючи умову симетрії, знаходимо, що при $N = 7$

$$h(0) = h(6); h(1) = h(5); h(2) = h(4).$$

Підставимо $z = e^{i\omega T}$ у формулу (1, б) і отримаємо частотну характеристику фільтра $H(\omega)$:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H(e^{i\omega T}) = \\ &= \sum_{k=0}^6 h(k)e^{-ik\omega T} = \\ &= h(0) + h(1)e^{-i\omega T} + h(2)e^{-2i\omega T} + \\ &\quad + h(3)e^{-3i\omega T} + h(4)e^{-4i\omega T} + h(5)e^{-5i\omega T} + h(6)e^{-6i\omega T} = \\ &= e^{-3i\omega T} [h(0)e^{3i\omega T} + h(1)e^{2i\omega T} + h(2)e^{i\omega T} + h(3) + h(4)e^{-i\omega T} + \\ &\quad + h(5)e^{-2i\omega T} + h(6)e^{-3i\omega T}]. \end{aligned}$$

Використовуючи умову симетрії, можна згрупувати члени, коефіцієнти яких чисельно рівні:

$$H(\omega) = e^{-3i\omega T} [h(0)(e^{3i\omega T} + e^{-3i\omega T}) + h(1)(e^{2i\omega T} + e^{-2i\omega T}) + h(2)(e^{i\omega T} + e^{-i\omega T})] = \\ = e^{-3i\omega T} [2h(0) \cos(3\omega T) + 2h(1) \cos(\omega T) + 2h(2) \cos(\omega T)].$$

Якщо покласти $\alpha(0) = h(3)$ і $\alpha(k) = 2h(3-k)$, $k = 1, 2, 3$, то $H(\omega)$ можна записати в компактній формі:

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^3 a(k) \cos(n\omega T) e^{-3i\omega T} = \pm |H(\omega)| e^{i\theta(\omega)},$$

де

$$\pm |H(\omega)| = \sum_{k=0}^3 a(k) \cos(n\omega T); \theta(\omega) = -3\omega T.$$

Вочевидь, що фазова характеристика лінійна.

3. В даному випадку з умови симетрії випливає

$$h(0) = h(7); h(1) = h(6); h(2) = h(5); h(3) = h(4).$$

Використовуючи схему міркувань, подібну до наведеної вище, та умову симетрії, отримуємо:

$$H(\omega) = e^{-7i\omega T/2} [h(0)(e^{7i\omega T/2} + e^{-7i\omega T/2}) + h(1)(e^{5i\omega T/2} + e^{-5i\omega T/2}) + \\ + h(2)(e^{3i\omega T/2} + e^{-3i\omega T/2}) + h(3)(e^{i\omega T/2} + e^{-i\omega T/2})] = \\ = e^{-7i\omega T/2} [2h(0) \cos(7\omega T/2) + \\ + 2h(1) \cos(5\omega T/2) + 2h(2) \cos(3\omega T/2) + 2h(3) \cos(\omega T/2)] = \\ = \pm |H(\omega)| e^{i\theta(\omega)},$$

де

$$\pm |H(\omega)| = \sum_{k=1}^4 b(k) \cos[\omega T(k - 1/2)]; \theta(\omega) = -(7/2)\omega T. \\ b(k) = 2h(N/2 - k), k = 1, 2, \dots, N/2.$$

Результати, наведені вище, можна поширити на всі КІХ-фільтри (табл. 1).

1.3. Типи КІХ-фільтрів з лінійною фазовою характеристикою

Існує чотири типи КІХ-фільтрів з лінійною фазовою характеристикою, що відрізняються парністю N і типом симетрії $h(n)$ (позитивна або негативна). Два з чотирьох типів фільтрів з лінійною фазовою характеристикою розглянуті на прикладі вище. На рис. 1 показано, як відрізняються імпульсні характеристики всіх чотирьох типів фільтрів із лінійною фазовою характеристикою. Ключові особливості цих типів фільтрів зведені в табл. 1.

Таблиця 1. Ключові відмінності чотирьох типів КІХ-фільтрів з лінійною фазовою характеристикою

Симетрія імпульсної характеристики	Число коефіцієнтів N	Частотна характеристика	Тип лінійної фазової характеристики
Позитивна симетрія	непарне	$e^{-i\omega(N-1)/2} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos(\omega n)$	1
$h(n) = h(N-n-1)$	парне	$e^{-i\omega(N-1)/2} \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos(\omega(n-1/2))$	2
Негативна симетрія	непарне	$e^{-i[\omega(N-1)/2-\pi/2]} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \sin(\omega n)$	3
$h(n) = -h(N-n-1)$	парне	$e^{-i[\omega(N-1)/2-\pi/2]} \sum_{n=1}^{N/2} a(n) \sin(\omega(n-1/2))$	4

$$\alpha(0) = h(N-1)/2; \alpha(n) = 2h[(N-1)/2-n]$$

$$\beta(n) = 2h(N/2-n)$$

Частотна характеристика фільтра типу 2 (позитивно-симетричні коефіцієнти та парна довжина) завжди дорівнює нулю при $f = 0,5$ (половина частоти дискретизації, оскільки всі частоти нормовані на частоту дискретизації); задача 1. Отже, фільтри даного типу не використовуються як фільтри верхніх частот. Фільтри типів 3 і 4 (негативно-симетричні коефіцієнти) вводять зсув фази на 90° , а частотна характеристика таких фільтрів завжди дорівнює нулю при $f = 0$, так що такі фільтри не можна використовувати як фільтри нижніх частот. Крім того, характеристика фільтрів третього типу завжди дорівнює нулю при $f = 0,5$, тому даний фільтр не варто застосовувати і як фільтр верхніх частот. Фільтри першого типу є найбільш універсальними. Фільтри третього і четвертого типу часто використовуються при проектуванні диференціаторів і фільтрів, що реалізують перетворення Гільберта, оскільки фільтри цього типу можуть давати зсув фази на 90° .

Важливо, що фазову затримку (фільтри типу 1 і 2) або групову затримку (фільтри всіх чотирьох типів) можна виразити через число коефіцієнтів фільтра, які, відповідно, можна підібрати таким чином, щоб фільтр давав нульову фазову або групову затримку. Наприклад, для фільтрів першого та другого типів фазова затримка записується наступним чином:

$$T_p = \left(\frac{N-1}{2} \right) \quad (4,a)$$

а групова затримка для фільтрів третього та четвертого типів виражається як

$$T_g = \left(\frac{N-1-\pi}{2} \right) \quad (4,6)$$

де T – період дискретизації.

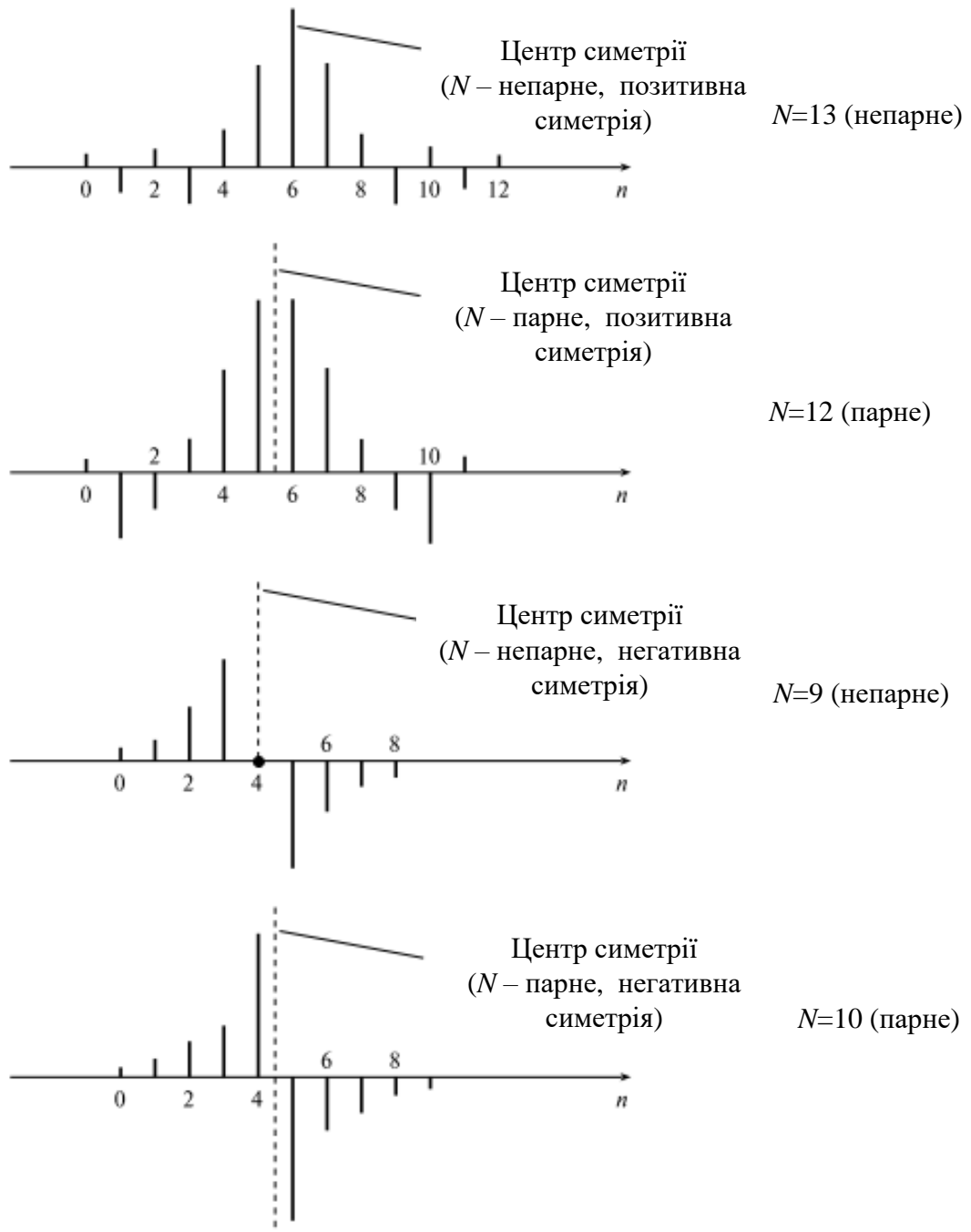


Рис. 1. Коефіцієнти імпульсної характеристики чотирьох типів фільтрів з лінійною фазовою характеристикою

2. Розробка КІХ-фільтрів

Як було розглянуто у лекції 2, розробка цифрового фільтра включає п'ять етапів.

1. *Специфікація фільтра.* На даному етапі може задаватися тип фільтра,

наприклад, фільтр нижніх частот, потрібна амплітудна та/або фазова характеристика і дозволені допуски (якщо ϵ), частота дискретизації та довжина слів, якими будуть представлені вхідні дані.

2. *Обчислення коефіцієнтів.* На цьому етапі визначаються коефіцієнти передавальної функції $H(z)$, яка задовольняє специфікаціям, отриманим на етапі 1. На вибір методу розрахунку коефіцієнтів впливає кілька факторів, найважливішими з яких є критичні вимоги, сформульовані на етапі 1.

3. *Вибір структури.* Даний етап включає перетворення передавальної функції, отриманої на попередньому етапі, у відповідну фільтруючу структуру або мережу.

4. *Аналіз наслідків кінцевої розрядності.* Тут оцінюється вплив квантування на коефіцієнти фільтра та вхідні дані, а також вплив на продуктивність фільтру операції фільтрації зі словами кінцевої довжини.

5. *Реалізація.* На даному етапі розробляється програмний код та/або апаратний блок та виконується власне фільтрація.

Перераховані п'ять етапів та їх зв'язок позначені на рис. 2. Всі етапи розробки КІХ-фільтра детально розглянуті нижче,

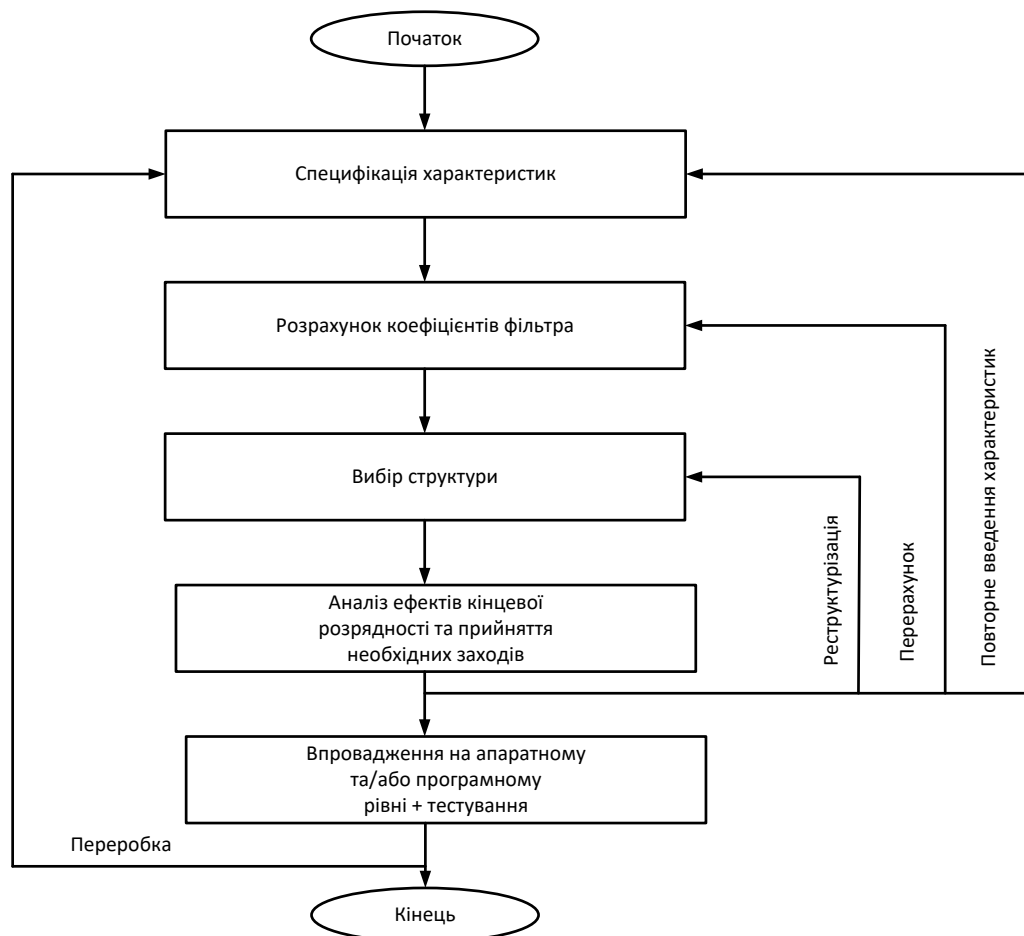


Рис. 2. Етапи розробки цифрових фільтрів

3. Специфікації КІХ-фільтра

Специфікації фільтрів взагалі докладно розглянуті у лекції 2. У розділі увага акцентується на деталях специфікацій КІХ-фільтрів.

Отже, під час розгляду фазової характеристики досить зазначити, яка потрібна симетрія — парна чи непарна (передбачається, що фазова характеристика лінійна). Амплітудно-частотна характеристика КІХ-фільтра часто задається у вигляді схеми допусків. Така схема для фільтра нижніх частот показано на рис. 3. Подібну схему можна легко отримати і для інших частотно-вибіркових фільтрів.

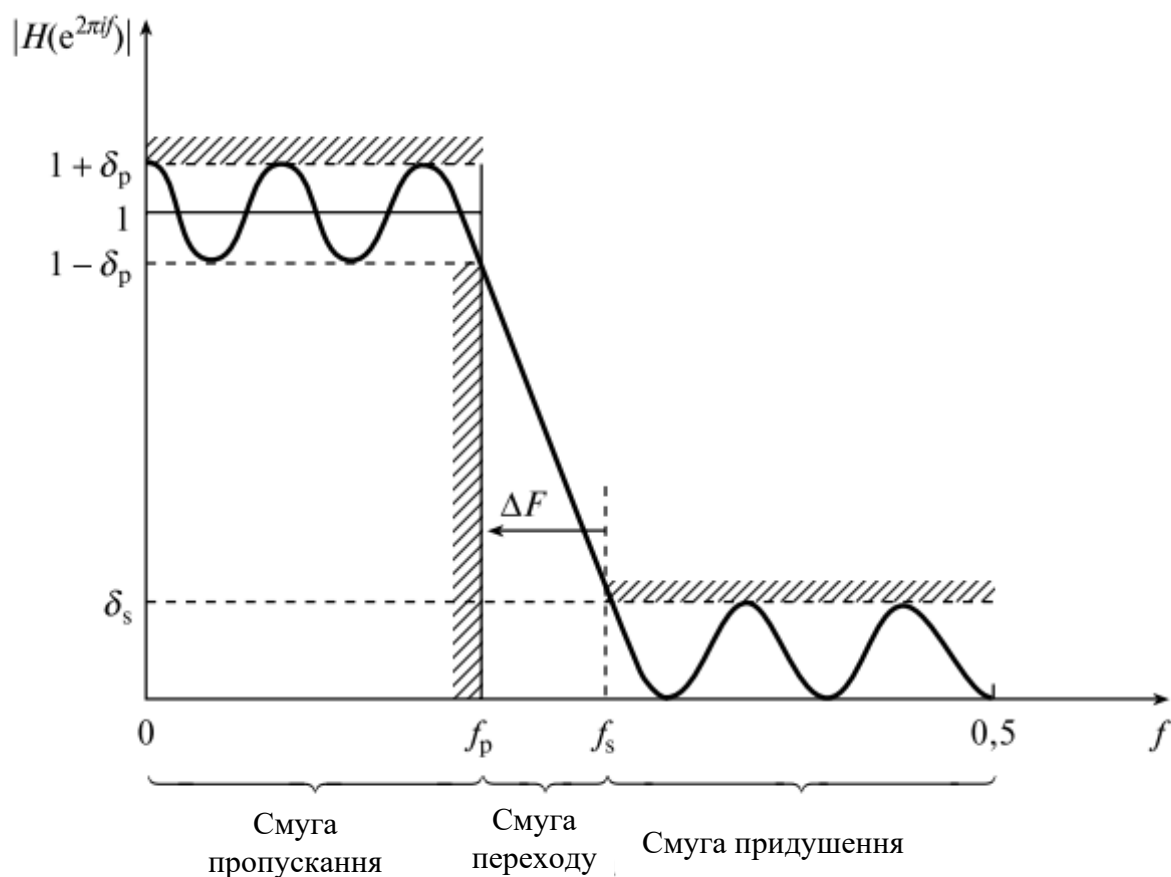


Рис. 3. Специфікація амплітудно-частотної характеристики фільтра нижніх частот. Відхилення в смугах пропускання та пригнічення часто виражаються в децибелах: відхилення у смузі пропускання дорівнює $20\lg(1 + \delta_p)$ дБ;

відхилення в смузі придушення дорівнює $-20\lg \delta_s$, дБ

З рис. 3 інтерес представляють такі параметри:

δ_p – відхилення в смузі пропускання(або нерівномірність);

δ_s – відхилення в смузі придушення;

f_p – гранична частота смуги пропускання;

f_s – гранична частота смуги придушення;

F_s – частота дискретизації.

На практиці часто зручніше виражати δ_p і δ_s в децибелах, як зроблено на наведеному малюнку. Відстань між f_s та f_p дорівнює ширині смуги переходу фільтра. Інший важливий параметр – це довжина фільтра N , яка визначає кількість коефіцієнтів фільтра. Найчастіше зазначені параметри повністю визначають частотну характеристику КІХ-фільтра.

Існують і інші специфікації, які можуть представляти практичний інтерес; це, наприклад, специфікація максимальної прийнятної кількості коефіцієнтів фільтра (таке обмеження вводиться у певних додатках, наприклад, якщо можлива швидкість обробки фіксована). У конкретному випадку може бути неясно, який вибір набору параметрів вдалий, так що може використовуватися метод спроб і помилок.

Приклад 2

Приклад амплітудної специфікації. Для придушення фізіологічного шуму потрібно цифровий фільтр нижніх частот. Фільтр повинен задовольняти наступній специфікації:

гранична частота смуги пропускання	10 Гц,
гранична частота смуги придушення	<20 Гц,
згасання у смузі придушення	>30 дБ,
нерівномірність у смузі пропускання	<0,026 дБ,
частота дискретизації	256 Гц.

Основні вимоги в даному випадку такі:

1) фільтр повинен вводити у внутрішньо-смугові сигнали мінімально можливе спотворення;

2) довжина фільтра повинна бути мінімальною і не перевищувати 37.

4. Методи розрахунку коефіцієнтів КІХ-фільтрів

Нагадаємо, що КІХ-фільтр характеризується такими рівняннями:

$$y(m) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)x(m-n)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

Єдиною метою більшості методів обчислення (або наближеного обчислення) коефіцієнтів КІХ-фільтрів є отримання значень $h(n)$, при яких фільтр задовольняє специфікаціям, зокрема, що належать до амплітудно-частотної характеристики, і вимог до пропускну здатності. Розроблено кілька методів отримання $h(n)$. Найбільш широко використовуваними є метод вирізання, оптимальний метод і метод частотної вибірки. Всі три методи дозволяють отримувати КІХ-фільтри з лінійною фазовою характеристикою.

5. Метод зважування

У цьому методі використовується факт, що частотна характеристика фільтра $H_D(\omega)$ і відповідна імпульсна характеристика $h_D(n)$ пов'язані зворотним перетворенням Фур'є:

$$h_D(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(\omega) e^{i\omega n} d\omega. \quad (5)$$

Індекс D використовується, щоб розрізнити ідеальну та практичну імпульсні характеристики. Якщо $H_D(\omega)$ відома, $h_D(n)$ можна отримати, застосувавши перетворення Фур'є до обох частин рівняння (5). Для ілюстрації припустимо, що потрібно розробити фільтр нижніх частот. Почати можна з ідеальної фазової характеристики, поданої на рис. 4 а, де ω_c - частота зрізу, і шкала частот нормована ($T = 1$).

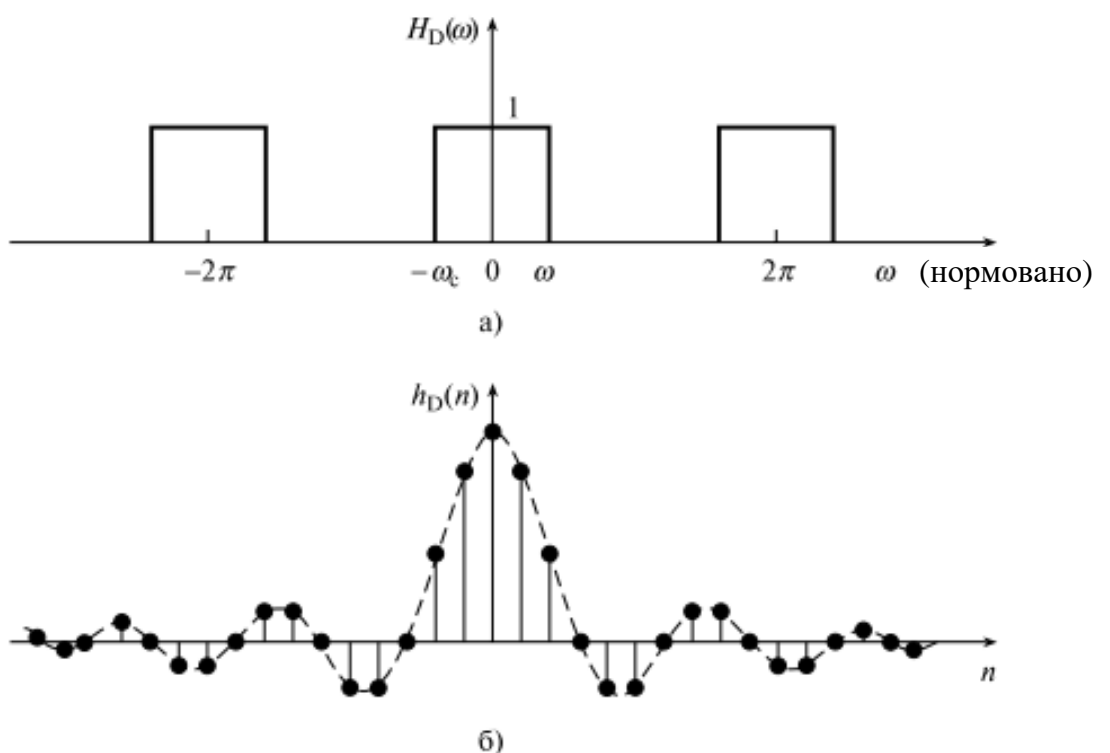


Рис. 4. Ідеальна частотна характеристика фільтра нижніх частот (а). Імпульсна характеристика ідеального фільтра нижніх частот (б)

Припустимо, що характеристика йде від $-\omega_c$ до ω_c , спростуємо інтегрування та отримуємо наступну імпульсну характеристику:

$$\begin{aligned}
 h_D(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \times e^{i\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega n} d\omega = \\
 &= \frac{2f_c \sin(n\omega_c)}{n\omega_c}, \quad n \neq 0, \quad -\infty \leq n \leq \infty \\
 &= 2f_c, \quad n = 0 \text{ (використовуємо правило Лопіталя)}.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Імпульсні характеристики ідеальних фільтрів верхніх частот, смугових фільтрів та режекторних фільтрів також знаходяться з рівняння (6) і всі вони наведені в табл. 2. Імпульсна характеристика фільтра нижніх частот зображено на рис. 4 б, з якої видно, що $h_D(n)$ симетрична щодо $n = 0$ (тобто $h_D(n) = h_D(-n)$), так що фільтр матиме лінійну (в даному випадку - нульову) фазову характеристику. Описаний простий підхід пов'язаний з деякими проблемами. Найважливіша з них – хоча характеристика $h_D(n)$ зменшується при віддаленні від точки $n = 0$, вона триває теоретично до $n = \pm\infty$. Отже, отриманий фільтр не є КІХ-фільтром.

Таблиця 2. Ідеальні імпульсні характеристики стандартних частотно-вибіркових фільтрів

Тип фільтра	Ідеальна частотна характеристика	
	$h_D(n), n \neq 0$	$h_D(0)$
Фільтр нижніх частот	$2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$2f_c$
Фільтр верхніх частот	$-2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$1 - 2f_c$
Смуговий фільтр	$2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2} - 2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}$	$2(f_2 - f_1)$
Фільтр, що загороджує	$2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1} - 2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2}$	$1 - 2(f_2 - f_1)$

Очевидним є рішення зрізати ідеальну імпульсну характеристику, поклавши $h_D(n) = 0$ для n , більше, ніж число M . При цьому вводиться небажана нерівномірність і викиди - має місце так званий ефект Гіббса. То, як відкидання коефіцієнтів позначається на характеристиці фільтра, показано на рис. 5. Чим

більше коефіцієнтів залишилося, тим ближче спектр фільтра до ідеальної характеристики (див. рис. 5 б і в). Пряме усічення $h_D(n)$, як воно описано вище, рівнозначно множенню ідеальної імпульсної характеристики на прямокутну вагову функцію виду

$$w(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq 0, 1, \dots, N/2 \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

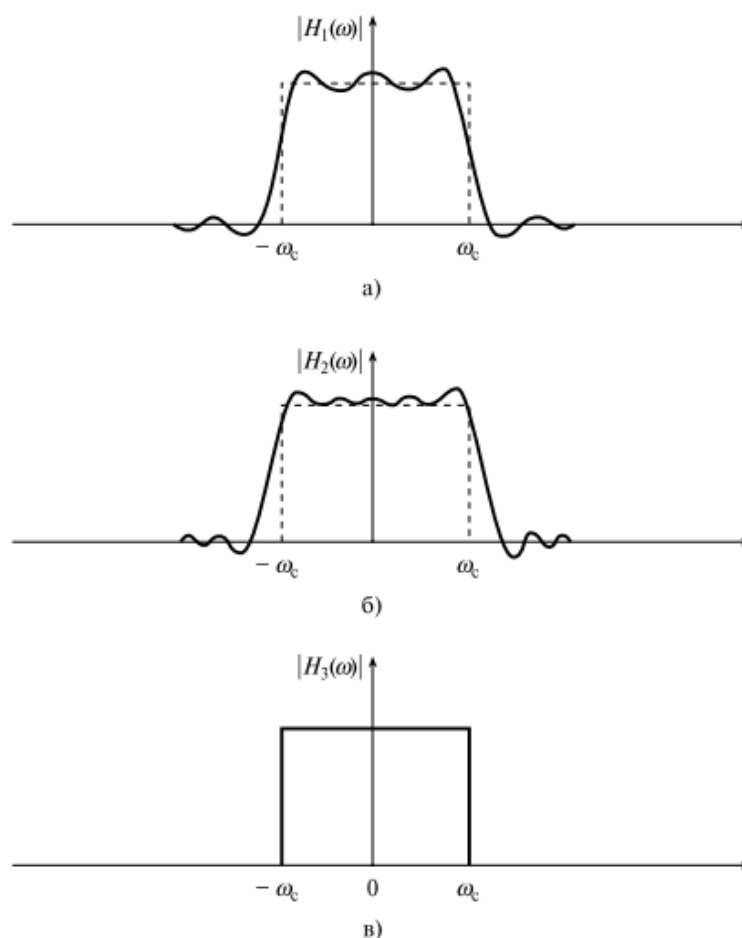


Рис. 5. Вплив на частотну характеристику округлення ідеальної імпульсної характеристики до а) 13 коефіцієнтів; б) 25 коефіцієнтів; в) нескінченної кількості коефіцієнтів

У частотній області це еквівалентно згортці $H_D(\omega)$ з $W(\omega)$, де $W(\omega)$ – Фур'є-образ $w(n)$. Тоді як $W(\omega)$ має класичний вид функції $\sin x/x$, усічення $h_D(n)$ призводить до появи частотної характеристики викидів.

На практиці ідеальна частотна характеристика h_D множиться на відповідну вагову функцію $w(n)$ з кінцевою тривалістю. Таким чином, імпульсна характеристика, що отримується, гладко згасає до нуля. Цей процес ілюструється на рис. 6. На рис. 6, а показана ідеальна частотна характеристика і

відповідна ідеальна імпульсна характеристика. На рис. 6, б показана вагова функція кінцевої тривалості і її спектр. На рис. 6,в показана функція $h(n)$, яка отримується перемноженням $h_D(n)$ і $w(n)$. З відповідної частотної характеристики видно, що нерівномірності та викиди, характерні для прямого усічення, значною мірою пригнічені. У той же час, ширина смуги переходу більша, ніж для прямокутної функції. Відомо, що ширина смуги переходу фільтра визначається шириною основної пелюстки вагової функції. Бічні пелюстки призводять до появи нерівномірності у смугах пропускання та придушення.

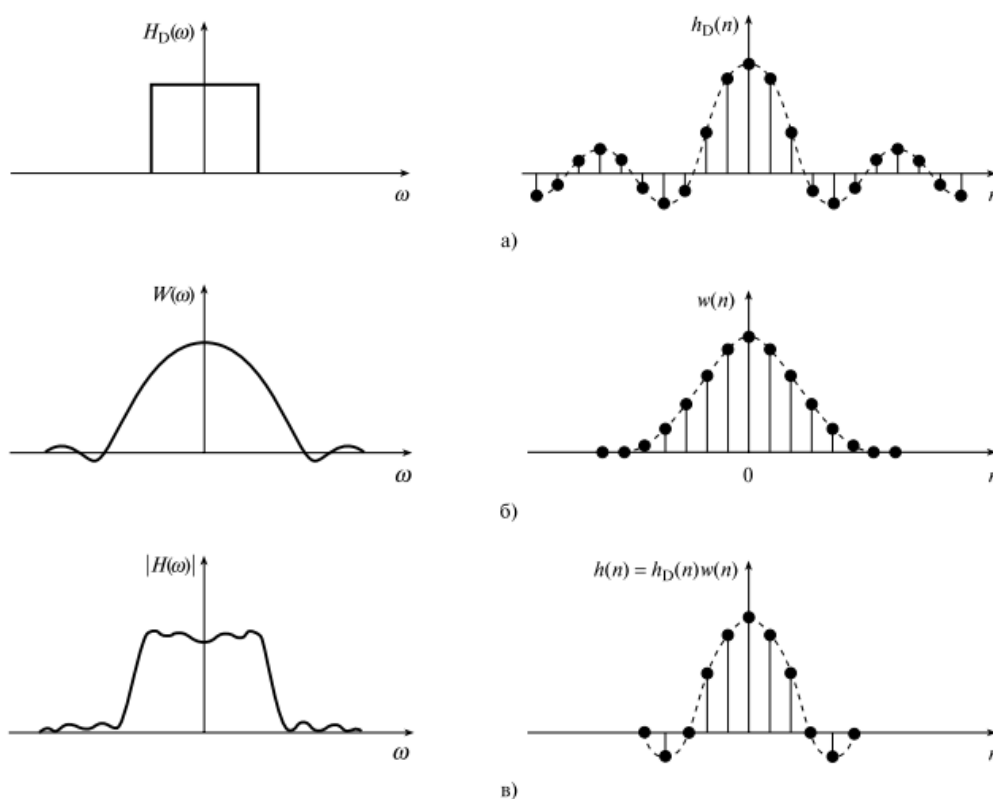


Рис. 6. Ілюстрація визначення коефіцієнтів фільтру $h(n)$ за допомогою методу зважування

5.1. Деякі поширені вагові функції

Було запропоновано кілька функцій, що вирізають. Однією, що найбільш широко використовується, є вагова функція Хеммінга, яка визначається наступним чином:

$$w(n) = \begin{cases} -(N-2)/2 \leq n \leq (N-1)/2 & (N - \text{непарне}) \\ -N/2 \leq n \leq N/2 & (N - \text{парне}). \end{cases} \quad (7)$$

= 0, в інших випадках.

Характеристики функції Хеммінгу та прямокутної функції порівнюються на рис. 7 у часовій та частотній областях. У часовій області функція Хеммінга

м'якше виходить на нуль з обох боків. У частотній області амплітуда її головні пелюстки ширше (приблизно вдвічі), ніж амплітуда прямокутної функції, але її бічні пелюстки менші у порівнянні з головним (приблизно на 40 дБ менше головної пелюстки порівняно з 14 дБ для прямокутної функції). Внаслідок цього функція Хеммінга дасть фільтр з більшою смугою переходу (оскільки у неї ширша головна пелюстка), але й великим загасанням у смузі придушення (оскільки рівні бічних пелюсток менше).

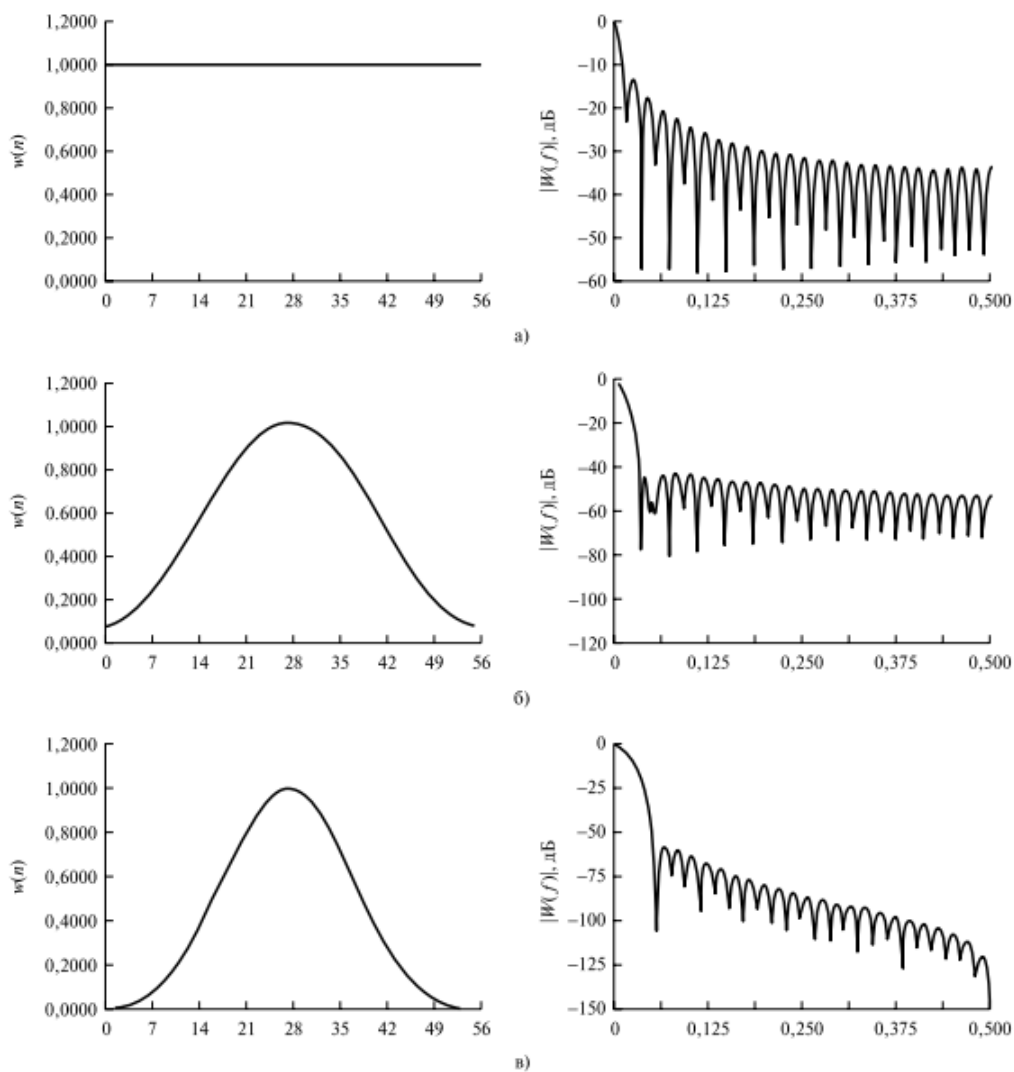


Рис. 7. Порівняння характеристик поширених вагових функцій у часовій та частотній областях: а) прямокутна функція; б) функція Хеммінгу; в) функція Блекмена

Зв'язок ширини смуги переходу (від смуги пропускання до смуги придушення) фільтра, побудованого на основі функції Хеммінга, з довжиною фільтра виражається такою формулою:

$$\Delta f = 3,3 / N, \quad (8)$$

де N – довжина фільтра, а Δf – нормована ширина смуги переходу. Максимальне згасання в смузі придушення, можливе при використанні функції Хеммінга, становить близько 53 дБ, а мінімальна амплітуда нерівномірності смуги пропускання становить близько 0,0194 дБ.

Основні характеристики найпоширеніших вагових функцій зібрані у табл. 3.

Таблиця 3. Важливі особливості поширених вагових функцій (початок)

Функція	Ширина переходу (нормована) (Гц)	Нерівномірність у смузі пропускання (дБ)	Головна пелюстка щодо бічної пелюстки
Прямокутна	$0,9 / N$	0,7416	13
Хеннінга	$3,1 / N$	0,0546	31
Хеммінга	$3,3 / N$	0,0194	41
Блекмена	$5,5 / N$	0,0017	57
Кайзера	$2,93 / N (\beta = 4,54)$	0,0274	
	$4,32 / N (\beta = 6,76)$	0,00275	
	$5,71 / N (\beta = 8,96)$	0,000275	

Таблиця 3. Важливі особливості поширених вагових функцій (закінчення)

Функція	Згасання у смузі придушення	Формула
Прямокутна	21	1
Хеннінга	44	$0,5 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Хеммінга	53	$0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Блекмена	75	$0,42 + 0,5 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$
	50	$\frac{I_0(\beta[1 - [2N/(N-1)]^{2^{1/2}}])}{I_0(\beta)}$
	70	
	90	

Зазначимо, що перші чотири функції мають фіксовані характеристики, такі як ширина переходу та загасання у смузі придушення. Отже, їхнє використання обмежує свободу розробника. Відзначимо також, що фільтр, побудований за допомогою методу зважування, має рівні нерівномірності у смузі пропускання

та смузі придушення, тобто $\delta_p = \delta_s$ (див. рис. 3). Насправді це обмеження може дати фільтр, нерівномірність якого у смузі пропускання буде зайве малою.

Вікно Кайзера (Kaiser window function) дещо згладжує окреслені вище проблеми, оскільки має параметр, що керує нерівномірністю, β , що дозволяє розробнику грати на компромісах між шириною переходу і нерівномірністю. Функція Кайзера задається так:

$$w(n) = I_0 \left(\beta \left[1 - \left(\frac{2n}{N-1} \right)^2 \right]^{1/2} \right) / I_0(\beta) \quad -(N-1)/2 \leq n \leq (N-1)/2 \quad (9)$$

= 0, в інших випадках.

де $I_0(x)$ - модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку. Керуючий параметр β відповідає за спад функції, що вирізає, на краях (у часовій області). Для обчислення $I_0(x)$ зазвичай використовується наступне розкладання в ступеневий ряд [14]:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^L \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2,$$

причому зазвичай $L < 25$. Ефективною реалізацією зазначеного рівняння є алгоритм Кайзера [14].

При $\beta = 0$ функція Кайзера відповідає прямокутній ваговій функції, а при $\beta = 5,44$ функція дуже схожа на функцію Хеммінга (хоча і не ідентична їй). Значення β визначається вимогами до загасання в смузі придушення і його можна оцінити за допомогою одного з наведених нижче емпіричних співвідношень:

$$\beta = 0, \quad \text{якщо } A \leq 21 \text{ дБ} \quad (10,а)$$

$$\beta = 0,5842(A - 21)^{0,4} + 0,7886(A - 21), \quad \text{якщо } 21 \text{ дБ} < A < 50 \text{ дБ} \quad (10,б)$$

$$\beta = 0,1102(A - 8,7) \quad \text{якщо } A \geq 50 \text{ дБ} \quad (10,в)$$

де $A = -20 \lg(\delta)$ – загасання в смузі придушення, $\delta = \min(\delta_p, \delta_s)$, оскільки нерівномірності в смузі пропускання та смузі придушення приблизно рівні, δ_p

– бажана нерівномірність у смузі пропускання, а δ_s – бажана нерівномірність смугу придушення. Число коефіцієнтів фільтра N підпорядковується залежності

$$N \geq \frac{A - 7,95}{14,36 \Delta f} \quad (11)$$

де Δf - нормована ширина смуги переходу. Далі отримані значення β і N використовуються для обчислення коефіцієнтів функції Кайзера $w(n)$.

5.2. Метод зважування: висновки

Етап 1. Задати “ідеальну” або бажану частотну характеристику фільтра $H_D(\omega)$.

Етап 2. Отримати імпульсну характеристику $h_D(n)$ бажаного фільтра, знайшовши для цього Фур'є образ частотної характеристики (формула (6)). Вирази для $h_D(n)$ стандартних частотно-виборчих фільтрів наведено у табл. 2.

Етап 3. Вибрати вагову функцію, яка задовольняє вимогам до смуги пропускання або загасання, а потім визначити кількість коефіцієнтів фільтра, використовуючи відповідний вираз для зв'язку довжини фільтра з шириною переходу, Δf (записуються через частоту дискретизації).

Етап 4. Отримати значення обраної вагової функції $w(n)$ та значення коефіцієнтів реального КІХ-фільтра $h(n)$, помноживши $h_D(n)$ на $w(n)$:

$$h(n) = h_D(n)w(n) \quad (12)$$

Очевидно, що метод вирізання - це прямолінійний метод, що включає мінімум обчислень. Насправді за такого підходу коефіцієнти можна обчислити за допомогою кишенькового калькулятора. Втім, існують і комп'ютерні програми обчислення $h(n)$, але слід зазначити, що фільтр, отриманий описаним способом, не є оптимальним, тобто. у багатьох випадках інші методи дозволяють отримати аналогічний фільтр із меншим числом коефіцієнтів.

Приклад 3

За допомогою методу зважування обчисліть коефіцієнти КІХ-фільтра нижніх частот, який задовольняє наступним специфікаціям:

граничні частоти смуги пропускання	1,5 кГц,
ширина смуги переходу	0,5 кГц,
згасання у смузі придушення	>50 дБ,
частота дискретизації	8 кГц.

Рішення

Використовуючи табл. 2, виберемо $h_D(n)$ для фільтра нижніх частот:

$$h_D(n) = 2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}, \quad n \neq 0,$$

$$h_D(n) = 2f_c, \quad n = 0.$$

З табл. 3 видно, що вимогам до загасання в смузі придушення задовольняють функції Хеммінгу, Блекмена або Кайзера. Для простоти виберемо функцію Хеммінгу. Тоді $\Delta f = 0,5/8 = 0,0625$. Оскільки $N = 3,3/\Delta f = 3,3/0,0625 = 52,8$, покладемо $N = 53$, і коефіцієнти дорівнюватимуть

$$h_D(n)w(n), \quad -26 \leq n \leq 26,$$

де

$$h_D(n) = \frac{2f_c \sin(n\omega_c)}{n\omega_c}, \quad n \neq 0$$

$$h_D(n) = 2f_c, \quad n = 0,$$

$$w(n) = 0,54 + 0,46 \cos(2\pi n/53), \quad -26 \leq n \leq 26.$$

Внаслідок ефекту змащення характеристики фільтра, що вводиться ваговою функцією, частота зрізу фільтра, що виходить, відрізнятиметься від представленої в специфікації. Щоб врахувати цей ефект, використовуємо f'_c – центр смуги переходу:

$$f'_c = f_c + \Delta f/2 = (1,5 + 0,25) \text{ кГц} = 1,75 \text{ кГц} \rightarrow 1,75/8 = 0,21875.$$

Оскільки $h(n)$ – симетрична функція, обчислити потрібно лише значення $h(0), h(1), \dots, h(26)$, а інші можна отримати з умови симетрії.

$$n = 0: \quad h_D(0) = 2f_c = 2 \times 0,21875 = 0,4375$$

$$w(0) = 0,54 + 0,46 \cos(0) = 1$$

$$h(0) = h_D(0)w(0) = 0,4375$$

$$n = 1: \quad h_D(1) = \frac{2 \times 0,21875}{2\pi \times 0,21875} \sin(2\pi \times 0,21875)$$

$$= \frac{\sin(360^\circ \times 0,21875)}{\pi} = 0,31219$$

$$w(1) = 0,54 + 0,46 \cos(2\pi/53)$$

$$= 0,54 + 0,46 \cos(360^\circ/53) = 0,99677$$

$$h(1) = h(-1) = h_D(1)w(1) = 0,31118$$

$$\begin{aligned}
n = 2 : \quad h_D &= \frac{2 \times 0,21875}{2 \times 2\pi \times 0,21875} \sin(2 \times 2\pi \times 0,21875) \\
&= \frac{\sin(157,5^\circ)}{2\pi} = 0,06013 \\
w(2) &= 0,54 + 0,46 \cos(2\pi \times 2/53) \\
&= 0,54 + 0,46 \cos(720^\circ/53) = 0,98713 \\
h(2) &= h(-2) = h_D(2)w(2) = 0,06012 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
n = 26 : \quad n_D(26) &= \frac{2 \times 0,21875}{26 \times 2\pi \times 0,21875} \sin(26 \times 2\pi \times 0,21875) \\
&= -0,01131 \\
w(26) &= 0,54 + 0,46 \cos(2\pi \times 26/53) = \\
&= 0,54 + 0,46 \cos(9360^\circ/53) = 0,08081 \\
h(26) &= h(-26) = h_D(26)w(26) = -0,000914
\end{aligned}$$

Таблиця 4. Коефіцієнти КІХ-фільтра з прикладу 3 ($N = 53$, функція Хеммінга, $f_c = 1750$ Гц)

$h[0] =$	$-9,1399895e - 04$	$= h[52]$
$h[1] =$	$2,1673690e - 04$	$= h[51]$
$h[2] =$	$1,3270280e - 03$	$= h[50]$
$h[3] =$	$3,2138355e - 04$	$= h[49]$
$h[4] =$	$-1,9238177e - 03$	$= h[48]$
$h[5] =$	$-1,4683633e - 03$	$= h[47]$
$h[6] =$	$2,3627318e - 03$	$= h[46]$
$h[7] =$	$3,4846558e - 03$	$= h[45]$
$h[8] =$	$-1,9925839e - 03$	$= h[44]$
$h[9] =$	$-6,2837232e - 03$	$= h[43]$
$h[10] =$	$4,5320247e - 09$	$= h[42]$
$h[11] =$	$9,2669460e - 03$	$= h[41]$
$h[12] =$	$4,3430586e - 03$	$= h[40]$
$h[13] =$	$-1,1271299e - 02$	$= h[39]$
$h[14] =$	$-1,1402453e - 02$	$= h[38]$
$h[15] =$	$1,0630714e - 02$	$= h[37]$
$h[16] =$	$2,0964392e - 02$	$= h[36]$
$h[17] =$	$-5,2583216e - 03$	$= h[35]$
$h[18] =$	$-3,2156086e - 02$	$= h[34]$
$h[19] =$	$-7,5449714e - 03$	$= h[33]$
$h[20] =$	$4,3546153e - 02$	$= h[32]$
$h[21] =$	$3,2593190e - 02$	$= h[31]$
$h[22] =$	$-5,3413653e - 02$	$= h[30]$
$h[23] =$	$-8,5682029e - 02$	$= h[29]$
$h[24] =$	$6,0122145e - 02$	$= h[28]$
$h[25] =$	$3,1118568e - 01$	$= h[27]$
$h[26] =$	$4,3750000e - 01$	$= h[26]$

Індекси коефіцієнтів пробігають значення від -26 до 26. Щоб фільтр був причинним (необхідна умова реалізації), до кожного індексу було додано 26, так що нова нумерація починалася з нуля. Коефіцієнти фільтра із зазначеними

індексами наведені в табл. 4. Зі спектру фільтра випливає, що специфікація задовольняється.

Приклад 4

Потрібно, щоб КІХ-фільтр задовольняв наступним специфікаціям:

смуга пропускання	150-250 Гц,
ширина смуги переходу	50 Гц,
нерівномірність у смузі пропускання	0,1 дБ,
загасання у смузі придушення	60 дБ,
частота дискретизації	1 кГц.

Визначіть коефіцієнти та спектр фільтра, використовуючи метод вирізання.

Рішення

Зі специфікації видно, що нерівномірність у смузі пропускання і нерівномірність у смузі придушення рівні:

$$20\lg(1 + \delta_p) = 0,1 \text{ дБ, звідки } \delta_p = 0,0115$$

$$- 20\lg \delta_s = 60 \text{ дБ, звідки } \delta_s = 0,001.$$

Отже,

$$\delta = \min(\delta_p, \delta_s) = 0,001.$$

Вимоги до загасання можна задовольнити лише при використанні функції Кайзера або Блекмена. Для функції Кайзера кількість коефіцієнтів фільтра дорівнює

$$N \geq \frac{A - 7,95}{14,36\Delta f} = \frac{60 - 7,95}{14,36(50 / 1000)} = 72,49$$

Нехай $N = 73$. Параметр нерівномірності виражається таким чином:

$$\beta = 0,1102(60 - 8,7) = 5,65.$$

Значення $N = 73$ і $\beta = 5,65$ використовуються як вхід програми window.c, на виході якої виходять значення $w(n)$, ідеальна імпульсна характеристика $h(n)$ і коефіцієнти фільтра. Щоб врахувати ефект змащення, при обчисленні ідеальної імпульсної характеристики використовувалися частоти зрізу $f_{c1} - \Delta f / 2$ і $f_{c2} + \Delta f / 2$, тобто. $f_{c1} = 125$ Гц і $f_{c2} = 275$ Гц відповідно. Коефіцієнти фільтра представлені у табл. 5 а спектр фільтра зображений на рис. 8.

При використанні функції Блекмена кількість коефіцієнтів фільтра оцінюється як

$$N = 5,5 / \Delta f = 5,5 / (50/1000) \approx 110.$$

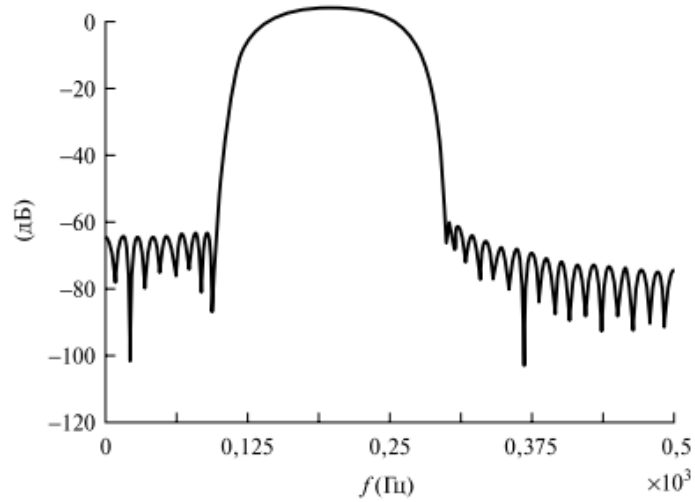


Рис. 8. Спектр фільтра (приклад 4)

Таблиця 5. Коефіцієнти фільтра Кайзера (приклад 4)

$h[0] =$	$-1,0627330e - 04$	$= h[72]$
$h[1] =$	$-3,9118142e - 04$	$= h[71]$
$h[2] =$	$-7,5561629e - 05$	$= h[70]$
$h[3] =$	$-1,3695577e - 04$	$= h[69]$
$h[4] =$	$-6,8122013e - 04$	$= h[68]$
$h[5] =$	$5,0929290e - 04$	$= h[67]$
$h[6] =$	$2,3413494e - 03$	$= h[66]$
$h[7] =$	$8,0280013e - 04$	$= h[65]$
$h[8] =$	$-1,7031635e - 04$	$= h[64]$
$h[9] =$	$-5,5034956e - 04$	$= h[63]$
$h[10] =$	$-4,9912488e - 04$	$= h[62]$
$h[11] =$	$-4,4036355e - 03$	$= h[61]$
$h[12] =$	$-2,1639856e - 03$	$= h[60]$
$h[13] =$	$6,9094151e - 03$	$= h[59]$
$h[14] =$	$6,6067599e - 03$	$= h[58]$
$h[15] =$	$-1,6445200e - 03$	$= h[57]$
$h[16] =$	$4,5229777e - 09$	$= h[56]$
$h[17] =$	$2,1890066e - 03$	$= h[55]$
$h[18] =$	$-1,1720511e - 02$	$= h[54]$
$h[19] =$	$-1,6377726e - 02$	$= h[53]$
$h[20] =$	$6,8804519e - 03$	$= h[52]$
$h[21] =$	$1,8882837e - 02$	$= h[51]$
$h[22] =$	$2,9068601e - 03$	$= h[50]$
$h[23] =$	$4,3925286e - 03$	$= h[49]$
$h[24] =$	$1,8839744e - 02$	$= h[48]$
$h[25] =$	$-1,2481155e - 02$	$= h[47]$
$h[26] =$	$-5,2063428e - 02$	$= h[46]$
$h[27] =$	$-1,6557375e - 02$	$= h[45]$
$h[28] =$	$3,3298453e - 02$	$= h[44]$
$h[29] =$	$1,0439025e - 02$	$= h[43]$
$h[30] =$	$9,4320244e - 03$	$= h[42]$
$h[31] =$	$8,5673629e - 02$	$= h[41]$
$h[32] =$	$4,5314758e - 02$	$= h[40]$
$h[33] =$	$-1,6657147e - 01$	$= h[39]$
$h[34] =$	$-2,0669512e - 01$	$= h[38]$
$h[35] =$	$8,9135544e - 02$	$= h[37]$
$h[36] =$	$3,0000000e - 01$	$= h[36]$

Функція Кайзера ефективніша за функцію Блекмена з точки зору числа коефіцієнтів, необхідних для відповідності тим же специфікаціям. Взагалі, за цим пунктом функції Кайзера ефективніше інших вагових функцій.

Приклад .5

Використовуючи функцію Кайзера, отримайте коефіцієнти КІХ-фільтра з лінійною фазовою характеристикою, який задовольняє наступним специфікаціям амплитудної характеристики:

загасання в смузі придушення	40 дБ,
нерівномірність у смузі пропускання	0,01 дБ,
ширина переходу	500 Гц,
частота дискретизації	10 кГц,
ідеальна частота зрізу	1200 Гц.

Рішення

Із специфікації отримуємо

$$20\lg(1 + \delta_p) = 0,01 \text{ дБ, звідки } \delta_p = 0,00115$$

$$-20\lg \delta_s = 40 \text{ дБ, звідки } \delta_s = 0,01.$$

Оскільки в методі вирізання нерівномірність у смузі пропускання дорівнює нерівномірності в смузі придушення (бо їх не можна задати окремо), використовуємо меншу з нерівномірностей:

$$\delta = \delta_p = \delta_s = 0,00115.$$

Це означає, що згасання в смузі придушенні більше, ніж фактично необхідно; у цьому випадку $-20\lg(0,00115) = 55,8$ дБ.

З формули (11) одержуємо кількість необхідних коефіцієнтів фільтра:

$$n = \frac{A - 7,95}{14,36\Delta f} = \frac{58,8 - 7,95}{14,36(500 / 10000)} \approx 71.$$

Якби використовувалася задана в специфікації величина 40 дБ, N дорівнювало б 45. Отже, вимога, щоб δ_p дорівнювало δ_s (умова використання методу зважування) призвело до збільшення необхідного числа коефіцієнтів фільтра.

Параметри нерівномірності обчислюють на основі рівнянні (10):

$$\beta = 0,5842 (58,8 - 21)^{0,4} + 0,07886 (58,8 - 21) = 5,48.$$

Коефіцієнти КІХ-фільтра отримують з співвідношення $h(n) = h_D(n)w(n)$, де

$$h_D(n) = 2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}, n \neq 0$$

$$h_D(n) = 2f_c, n = 0 \text{ (з табл. 2),}$$

а $w(n)$ представлено у рівнянні (9).

Як пояснювалось вище, частота зрізу, f_c , що використовується для обчислення $h(n)$, відрізняється від тієї, що дана в специфікації, оскільки це дозволить врахувати ефект змащення, характерний для методу зважування. Виберемо в якості f_c середину смуги пропускання:

$$f'_c = 1200 + \Delta f / 2 = 1450 \text{ Гц.}$$

Далі у програмі *window.c* використовуються наступні параметри фільтра:

частота зрізу	1450 Гц,
параметр нерівномірності	5,48,
число коефіцієнтів фільтра	71,
частота дискретизації	10 кГц.

Отримані коефіцієнти фільтра представлені у табл. 6 а спектр фільтра зображений на рис. 9.

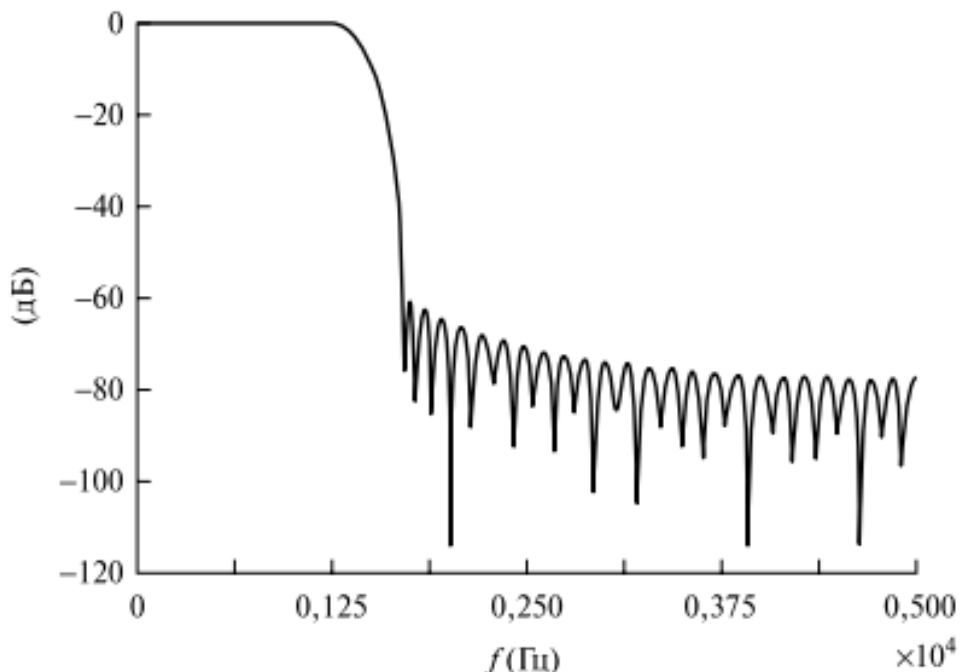


Рис. 9. Спектр фільтра, отриманого за допомогою функції Кайзера (приклад 5)

Таблиця 6. Коефіцієнти фільтру, отриманого за допомогою функції Кайзера (приклад 5)

$h[0] =$	$9,8470163e - 05$	$= h[70]$
$h[1] =$	$-1,3972411e - 04$	$= h[69]$
$h[2] =$	$-4,5442489e - 04$	$= h[68]$
$h[3] =$	$-4,8756977e - 04$	$= h[67]$
$h[4] =$	$2,6173965e - 05$	$= h[66]$
$h[5] =$	$8,6653647e - 04$	$= h[65]$
$h[6] =$	$1,2967984e - 03$	$= h[64]$
$h[7] =$	$6,1688894e - 04$	$= h[63]$
$h[8] =$	$-1,0445340e - 03$	$= h[62]$
$h[9] =$	$-2,4646644e - 03$	$= h[61]$
$h[10] =$	$-2,1059775e - 03$	$= h[60]$
$h[11] =$	$4,4371801e - 04$	$= h[59]$
$h[12] =$	$3,5954580e - 03$	$= h[58]$
$h[13] =$	$4,5526695e - 03$	$= h[57]$
$h[14] =$	$1,5922295e - 03$	$= h[56]$
$h[15] =$	$-3,8904820e - 03$	$= h[55]$
$h[16] =$	$-7,6398162e - 03$	$= h[54]$
$h[17] =$	$-5,6061945e - 03$	$= h[53]$
$h[18] =$	$2,2010888e - 03$	$= h[52]$
$h[19] =$	$1,0450148e - 02$	$= h[51]$
$h[20] =$	$1,1760002e - 02$	$= h[50]$
$h[21] =$	$2,8239875e - 03$	$= h[49]$
$h[22] =$	$-1,1380549e - 02$	$= h[48]$
$h[23] =$	$-1,9631856e - 02$	$= h[47]$
$h[24] =$	$-1,2665935e - 02$	$= h[46]$
$h[25] =$	$8,0061777e - 03$	$= h[45]$
$h[26] =$	$2,8182781e - 02$	$= h[44]$
$h[27] =$	$2,9474031e - 02$	$= h[43]$
$h[28] =$	$3,8724896e - 03$	$= h[42]$
$h[29] =$	$-3,5942288e - 02$	$= h[41]$
$h[30] =$	$-5,9766794e - 02$	$= h[40]$
$h[31] =$	$-3,7113570e - 02$	$= h[39]$
$h[32] =$	$4,1378026e - 02$	$= h[38]$
$h[33] =$	$1,5291289e - 01$	$= h[37]$
$h[34] =$	$2,5100632e - 01$	$= h[36]$
$h[35] =$	$2,9000000e - 01$	$= h[35]$

5.3. Переваги і недоліки методу зважування

Важливою перевагою методу зважування є простота: його просто застосувати і легко зрозуміти. Цей метод включає мінімальний обсяг обчислень навіть за використання більш складної функції Кайзера.

Головний недолік методу – відсутність гнучкості. Максимальна нерівномірність у смузі пропускання і нерівномірність у смузі придушення приблизно рівні, так що розробник може отримати фільтр з або дуже маленькою нерівномірністю в смузі пропускання, або з великим загасанням у смузі придушення.

Внаслідок того, що в методі фігурує згортка спектра функції, що вирізає, та бажаної характеристики, неможливо точно встановити граничні частоти смуги пропускання та смуги придушення.

Для даної функції (за винятком функції Кайзера) максимальна амплітуда коливачь у характеристиці фільтра фіксована незалежно від того, наскільки більшим робити N . Отже, згасання в смузі придушення фіксовано для цієї функції. Таким чином, для даної специфікації загасання розробник повинен

знайти функцію, що підходить.

У деяких додатках вирази формули для $H_D(\omega)$ будуть настільки складними, що з рівняння (5) аналітично знаходити $h_D(n)$ немає сенсу. У таких випадках $h_D(n)$ можна отримати за допомогою методу частотної вибірки, а вже потім застосовувати вагову функцію (див. розділ 7.1).

6. Оптимізаційні методи

Метод обчислення оптимальних (за Чебишевим) коефіцієнтів КІХ-фільтра є надзвичайно потужним, і завдяки гарним програмам розробки його досить просто застосовувати. З цих причин і ще тому, що даний метод дає гарні фільтри, він широко використовується в багатьох сферах, де вимагаються КІХ-фільтри.

6.1. Основні концепції

При обчисленні коефіцієнтів фільтра методом вирізання виникає проблема вибору вдалої апроксимації бажаної чи ідеальної частотної характеристики. Максимальні коливання характеристики фільтрів, розроблених за допомогою методу зважування, виникають біля країв смуги та зменшуються при віддаленні від них (рис. 10, а). Виявляється, що коли коливання розподілені рівномірніше по смузі пропускання і смузі придушення, як, наприклад, на рис. 10 б можна отримати кращу апроксимацію бажаної частотної характеристики.

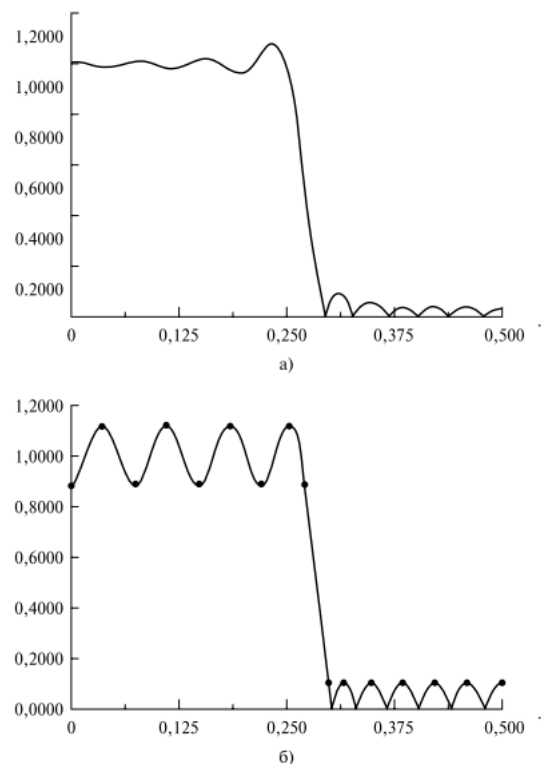


Рис. 10. Порівняння частотних характеристик: а) фільтра, отриманого методом вирізання, б) оптимального фільтра. На 10,а коливання характеристики більше межі смуги, а на 10,б коливання мають рівні амплітуди (смуги рівних коливань) у смузі пропускання та придушення

Оптимізаційні методи ґрунтуються на понятті смуг рівних коливань. Розглянемо частотну характеристику фільтра нижніх частот, зображену на рис. 11.

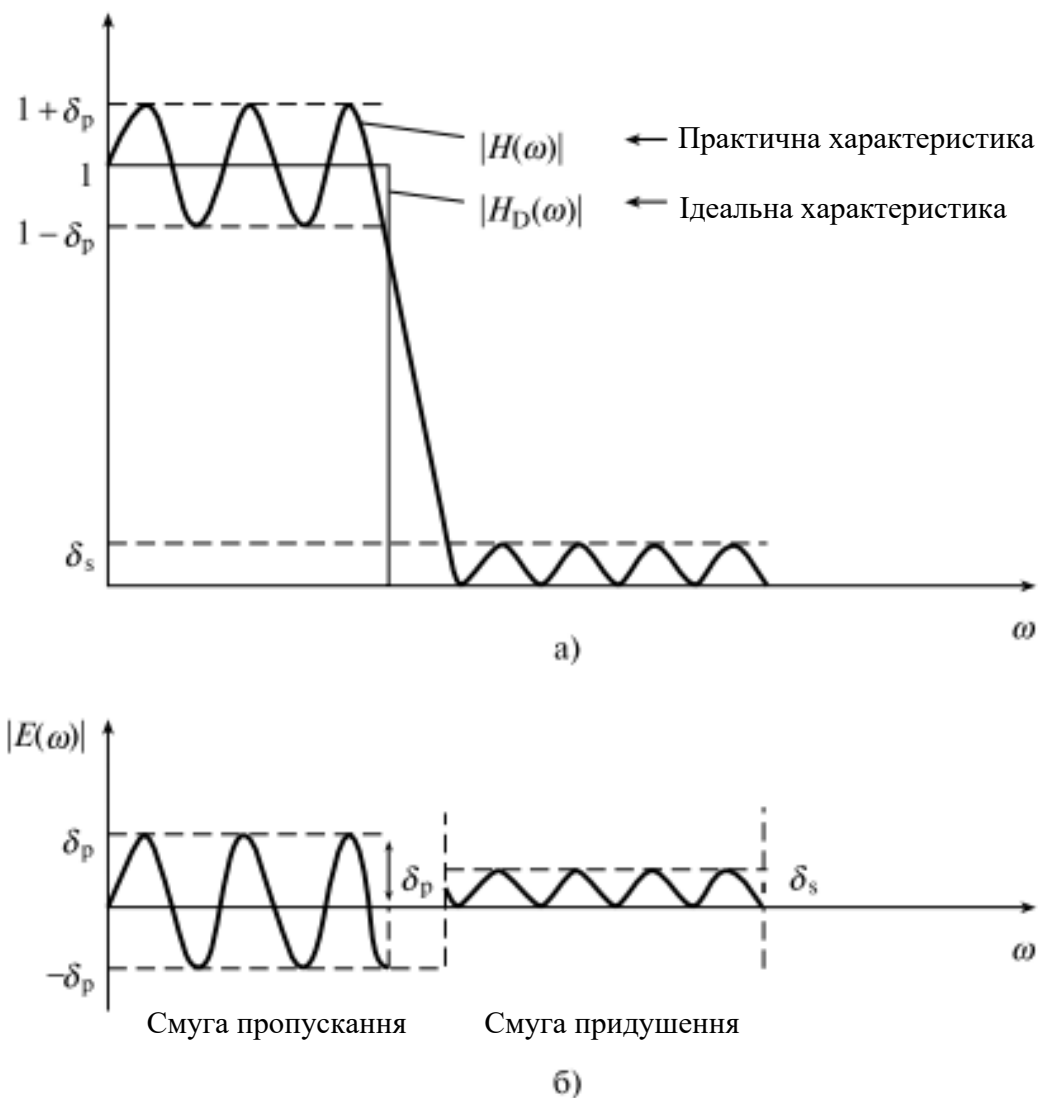


Рис. 11. Частотна характеристика оптимального фільтра нижніх частот (11,а). Характеристика помилки між ідеальною та практичною характеристиками

$$(\delta_p = 2\delta_s)(11,б)$$

У смузі пропускання реальна характеристика осцилює між значеннями $1 - \delta_p$ та $1 + \delta_p$. У смузі придушення характеристика фільтра між 0 і δ_s . Відмінність характеристик ідеального та реального фільтрів можна розглядати як функцію помилок

$$E(\omega) = W(\omega)[H_D(\omega) - H(\omega)], \quad (13)$$

де $H_D(\omega)$ - ідеальна або бажана характеристика, а $W(\omega)$ - вагова функція, яка дозволяє визначити відносну помилку апроксимації між різними смугами.

Мета оптимального методу – визначити коефіцієнти фільтра $h(n)$, у яких значення максимальної виваженої помилки $|E(\omega)|$ мінімізується в смузі пропускання та смузі придушення. Математично це можна записати:

$$\min[\max |E(\omega)|]$$

за смугами пропускання та смугами придушення. Було встановлено, що при мінімізації $\max |E(\omega)|$ характеристика фільтра матиме рівні коливання в межах смуг пропускання та придушення, причому модуль максимального відхилення буде постійним, і характеристика буде проходити між двома рівнями амплітуди з чергуванням знака відхилення (рис. 10, б). Далі ми часто не будемо розділяти мінімуми та максимуми характеристики, говорячи про екстремуми взагалі. Наприклад, у фільтрів нижніх частот з лінійною фазовою характеристикою присутні $r + 1$ або $r + 2$ екстремумів, де $r = (N + 1)/2$ (для фільтрів типу 1) або $r = N/2$ (для фільтрів типу 2). На рис. 10,б частоти екстремумів зображені маленькими кружечками.

При даному наборі специфікацій фільтра розташування екстремальних частот, крім тих, що розміщені на межі смуг (тобто на частотах $f = f_p$ і $f = F_s/2$), не відомо априорі. Отже, основне завдання оптимального методу – знайти положення екстремальних частот. Для вирішення цього завдання було розроблено потужний метод, в якому реалізовано алгоритм заміни Ремеза (Remez exchange algorithm). Знаючи положення екстремумів, отримати дійсну частотну характеристику (а значить, імпульсну характеристику) – справа техніки. Для даного набору специфікацій (тобто граничних частот смуги пропускання N відношення амплітуд коливань характеристики у смузі пропускання та смузі придушення) оптимальний метод включає наступні ключові етапи (див. рис. 12):

- використовувати алгоритм заміни Ремеза, щоб знайти оптимальний набір екстремальних частот;
- визначити частотну характеристику, використовуючи положення екстремумів;
- отримати коефіцієнти імпульсної характеристики.

Серцем оптимального методу є перший етап, де для визначення екстремальних частот фільтра, амплітудно-частотна характеристика якого задовольняє умові оптимальності, використовується ітеративна процедура. Даний етап залежить від теореми про диз'юнкцію (alternation theorem), що визначає кількість екстремальних частот, які можуть існувати при даному значенні N .

У кінці лекції розглянуто реалізацію оптимального методу у формі файлу **MATLAB**.

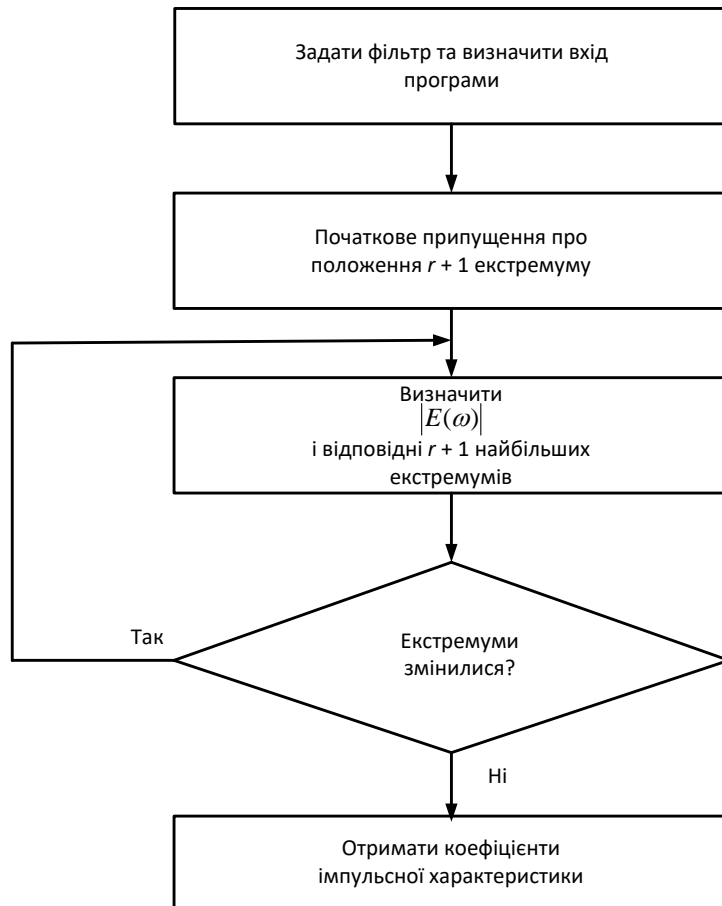


Рис. 7.12. Спрощена функціональна схема оптимального методу

6.2. Співвідношення для оцінки довжини фільтра

Насправді число коефіцієнтів фільтра невідомо. Його можна оцінити, використовуючи одне із співвідношень, наведених нижче.

6.2.1. Фільтр нижніх частот

$$N \approx \frac{D_{\infty}(\delta_p, \delta_s)}{\Delta F} - f(\delta_p, \delta_s)\Delta F + 1 \quad (14)$$

де ΔF -- ширина смуги пропускання, нормована на частоту дискретизації,

$$D_{\infty}(\delta_p, \delta_s) = \lg \delta_s [a_1 (\lg \delta_p)^2 + a_2 \lg \delta_p + a_3] + [a_4 (\lg \delta_p)^2 + a_5 \lg \delta_p + a_6]$$

$$f(\delta_p, \delta_s) = 11,01217 + 0,51244 [\lg \delta_p - \lg \delta_s]$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 5,309 \times 10^{-3} & a_2 &= 7,114 \times 10^{-2} \\ a_3 &= -4,761 \times 10^{-1} & a_4 &= -2,66 \times 10^{-3} \\ a_5 &= -5,941 \times 10^{-1} & a_6 &= -4,278 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

Тут δ_p – нерівномірність в смузі пропускання, а δ_s – нерівномірність, або коливання, показники в смузі придушення.

6.2.2. Смуговий фільтр

$$N \approx \frac{C_{\infty}(\delta_p, \delta_s)}{\Delta F} + g(\delta_p, \delta_s)\Delta F + 1 \quad (14)$$

де

$$C_{\infty}(\delta_p, \delta_s) = \lg \delta_s [b_1 (\lg \delta_p)^2 + b_2 \lg \delta_p + b_3] + \\ + [b_4 (\lg \delta_p)^2 + b_5 \lg \delta_p + b_6]$$

$$g(\delta_p, \delta_s) = -14,6 \lg \left(\frac{\delta_p}{\delta_s} \right) - 16,9$$

$$b_1 = 0,01201 \quad b_2 = 0,09664$$

$$b_3 = -0,51325 \quad b_4 = 0,00203$$

$$b_5 = -0,5705 \quad b_6 = -0,44314$$

ΔF – ширина смуги пропускання, нормована на частоту дискретизації.

6.3. Процедура обчислення коефіцієнтів фільтра за допомогою оптимального методу: висновки

Етап 1. Задати граничні частоти смуг (тобто смуг пропускання та смуг придушення), нерівномірність у смузі пропускання та загасання у смузі придушення (у децибелах або звичайних одиницях) та частоту дискретизації

Етап 2. Нормувати кожну граничну частоту, розділивши її на частоту дискретизації, та визначити нормовану ширину смуги переходу.

Етап 3. Використовувати нерівномірність у смузі пропускання та загасання у смузі переходу для оцінки довжини фільтра N із рівняння (14) або (15). Зазвичай значення N , необхідне для відповідності специфікації, береться на кілька одиниць (2 чи 3) більше, ніж значення, визначене із цих рівнянь.

Етап 4. Отримати вагові коефіцієнти для кожної смуги із відношення коливальності у смузі пропускання та придушення, виражених у звичайних одиницях. Вагові коефіцієнти кожної смуги зручно представити цілими числами. Наприклад, фільтр нижніх частот з коливальними характеристиками у смузі пропускання та смузі придушення 0,01 та 0,03 (нерівномірність у смузі пропускання та загасання у смузі придушення дорівнюють відповідно 0,09 дБ та 30,5 дБ) буде мати вагові коефіцієнти 3 для смуги пропускання та 1 для смуги придушення. Коливальні характеристики смугового фільтра, рівні 0,001 у смузі пропускання і 0,0105 у всіх смугах придушення, будуть мати вагові коефіцієнти 21 для смуги пропускання і 2 для кожної смуги придушення.

Етап 5. Ввести параметри в програму оптимальної розробки та отримати наступні величини: N , граничні частоти смуг та вагові коефіцієнти для кожної смуги, а також відповідну щільність сітки (зазвичай 16 або 32).

Етап 6. Перевірити нерівномірність у смузі пропускання та загасання у смузі придушення, отримані на виході програми, на предмет відповідності специфікаціям.

Етап 7. Якщо специфікації не задовольняються, збільшити значення N і повторити етапи 5 і 6, доки відповідність не буде досягнуто; далі отримати та перевірити частотну характеристику, щоб переконатися, що вона задовольняє специфікації.

Слід зазначити, що на етапі апроксимації оптимальна програма розглядає лише смугу пропускання та смугу придушення, вважаючи область переходу несуттєвою. Щоб уникнути проблем зі збіжністю алгоритму, найкраще при розробці смугових фільтрів або фільтрів з кількома смугами покласти області переходу рівними ширині найменшої області переходу. Якщо використовуються різні смуги переходу, слід завжди перевіряти частотну характеристику на предмет відповідності специфікаціям, оскільки в смугах переходу можуть з'являтися локальні максимуми і мінімуми, що призводять до несподіваних характеристик фільтра.

6.4. Приклади

Приклад 6

Потрібний смуговий фільтр з лінійною фазовою характеристикою, що задовольняє наступним специфікаціям:

смуга пропускання	900-1100 Гц,
нерівномірність у смузі пропускання	<0,87 дБ,
загасання у смузі придушення	>30 дБ,
частота дискретизації	15 кГц,
частота переходу	450 Гц.

Використовуйте оптимальний метод для отримання відповідних коефіцієнтів. Виявіть спектр фільтра.

Рішення

Зі специфікації випливає, що фільтр має три смуги: нижню смугу придушення (від 0 до 450 Гц), смугу пропускання (від 0100 до 1100 Гц) і верхню смугу придушення (від 1550 до 7500 Гц). Для використання програми раціональної розробки частоти країв смуг необхідно нормувати, тобто. виразити як частки частоти дискретизації:

$$450 \rightarrow 450/15\ 000 = 0,03,$$

$$900 \rightarrow 900/15\ 000 = 0,06,$$

$$1100 \rightarrow 1100/15\ 000 = 0,0733,$$

$$1550 \rightarrow 1550/15\ 000 = 0,1033,$$

$$7500 \rightarrow 7500/15\ 000 = 0,5.$$

Отже, у нормованій формі три смуги записуються як (від 0 до 0,03), (від 0,06 до 0,0733) та (від 0,1033 до 0,5).

Далі для кожної смуги потрібно вибрати ваговий коефіцієнт. Вагові коефіцієнти залежать від коливань характеристики у смузі пропускання та смузі придушення. Коливання (у звичайних одиницях) можна отримати з даних про нерівномірність у смузі пропускання та загасанні у смузі придушення:

$$\text{нерівномірність } 0,87 \text{ дБ: } 20\lg(1 + \delta_p), \text{ звідки } \delta_p = 0,10535$$

$$\text{загасання } 30 \text{ дБ: } -20\lg \delta_s, \text{ звідки } \delta_s = 0,031623.$$

Відношення δ_p до δ_s дорівнює $3,33 = 10/3$:

$$\frac{\delta_p}{\delta_s} = \frac{10}{3} = \frac{\text{ширина смуги придушення}}{\text{ширина смуги пропускання}}$$

Отже, можна використовувати ваговий коефіцієнт 3 для смуги пропускання і коефіцієнт 10 для смуги придушення (зазначимо, що вагові коефіцієнти присвоюються протилежно тому, як вони входять у відношення δ_p / δ_s). З рівним успіхом можна застосовувати ваговий коефіцієнт 1 для смуги пропускання та 3,33 для смуги придушення. Щільність ґратки дорівнює 32. Використовуємо програму оцінки N на основі наведених вище співвідношень і знаходимо, що довжина фільтра дорівнює 40. Візьмемо значення $N = 41$.

Результати роботи програми розробки наведено у табл. 7 а частотний спектр зображений на рис. 13.

Поясними результати.

– Коливання у смузі пропускання у 3,33 рази більше, ніж у смузі придушення. Це пояснюється тим, що помилки в смузі пропускання і смугах придушення враховані з ваговими коефіцієнтами 3 і 10 відповідно. Чим вище ваговий коефіцієнт смуги, тим менше коливання або відхилення.

– Коливання характеристики у смузі пропускання та загасання у смузі придушення задовольняють специфікаціям.

– Існує 22 екстремальні частоти, тобто. $(N + 3) / 2$ максимуму та мінімуму амплітудної характеристики. Краї смуг - це також екстремальні частоти, такими ж є частоти $f = 0$ і $f = 0,5$ Гц. Частоти країв смуг завжди є екстремальними.

– Імпульсна характеристика симетрична щодо середнього коефіцієнта.

Властивість симетрії - це необхідна умова наявності лінійної фазової характеристики. Для фільтра типу 1 середній коефіцієнт має найбільше значення.

При поставленій задачі з фіксованими межами смуг розробник може потрібним чином вирівняти коливання в смузі пропускання та загасання в смузі придушення, використовуючи вагові коефіцієнти та N .

Таблиця 7. Коефіцієнти імпульсної характеристики оптимальних фільтрів (приклад 6)

$$\begin{aligned}
 H(1) &= -0,15346380E-01 = H(41) \\
 H(2) &= -0,57805500E-04 = H(40) \\
 H(3) &= 0,50234820E-02 = H(39) \\
 H(4) &= 0,12667060E-01 = H(38) \\
 H(5) &= 0,21082060E-01 = H(37) \\
 H(6) &= 0,27764180E-01 = H(36) \\
 H(7) &= 0,30053620E-01 = H(35) \\
 H(8) &= 0,25869350E-01 = H(34) \\
 H(9) &= 0,14445660E-01 = H(33) \\
 H(10) &= -0,31893230E-02 = H(32) \\
 H(11) &= -0,24161370E-01 = H(31) \\
 H(12) &= -0,44207120E-01 = H(30) \\
 H(13) &= -0,58574530E-01 = H(29) \\
 H(14) &= -0,63185570E-01 = H(28) \\
 H(15) &= -0,55754610E-01 = H(27) \\
 H(16) &= -0,36546910E-01 = H(26) \\
 H(17) &= -0,85400990E-02 = H(25) \\
 H(18) &= 0,23083860E-01 = H(24) \\
 H(19) &= 0,52013800E-01 = H(23) \\
 H(20) &= 0,72248070E-01 = H(22) \\
 H(21) &= 0,79516810E-01 = H(21)
 \end{aligned}$$

	Смуга 1	Смуга 2	Смуга 3
Нижня межа смуги	0,00000000	0,06000000	0,10330000
Верхня межа смуги	0,03000000	0,07330000	0,50000000
Шукане значення	0,00000000	1,00000000	0,00000000
Ваговий коефіцієнт	10,00000000	3,00000000	10,00000000
Амплітуда коливань	0,028891690	0,096305620	0,028891690
Нерівномірність, дБ	-30,784510000	0,798631800	-30,784510000

Екстремальні частоти

0,0000000 0,0208333 0,0300000 0,0600000 0,1033000
 0,1122285 0,1308297 0,1538951 0,1777045 0,2015139
 0,2260674 0,2506209 0,2759184 0,3004719 0,3257694
 0,3503229 0,3756204 0,4001739 0,4254714 0,4500249
 0,4753224 0,5000000

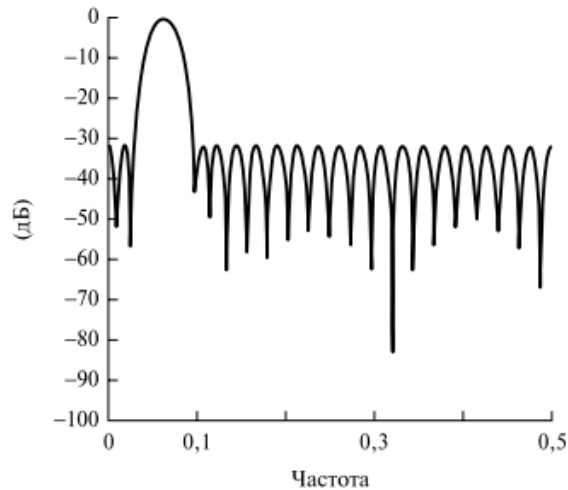


Рис. 13. Частотна характеристика фільтра (нормована шкала частот)

Приклад 7

Потрібний цифровий вузькосмуговий режекторний КІХ-фільтр, що відповідає таким специфікаціям:

частота режекції	1,875 кГц,
придушення на частоті режекції	>60 дБ,
межі смуги пропускання	1,575 і 2,175 кГц,
нерівномірність у смузі пропускання	<0,01 дБ,
частота дискретизації	7,5 кГц,
кількість коефіцієнтів	61.

Для отримання коефіцієнтів КІХ-фільтра, що задовольняє наведену специфікацію, використовуйте оптимальний метод.

Рішення

Фільтр має три смуги. Нормовані частоти трьох смуг і відхилення записуються наступним чином:

нижня смуга пропускання	від 0 до 0,21,
частота режекції	0,25,
верхня смуга пропускання	від 0,29 до 0,5,
відхилення у смузі пропускання	$0,00115 (20\lg(1 + \delta_p))$,
відхилення у смузі придушення	$0,001 (-20\lg \delta_s)$.

Вагові коефіцієнти смуг дорівнюють 1; 1,1519; 1 (з відношення δ_p / δ_s).

Результати зведені в табл. 8 та рис. 14. При режекції смуга придушення складається з єдиної частоти.

Таблиця 8. Коефіцієнти імпульсної характеристики оптимального фільтра
(приклад 7)

$H(1) =$	$0,12743640E - 02$	$= H(61)$
$H(2) =$	$0,26730640E - 05$	$= H(60)$
$H(3) =$	$-0,23681110E - 02$	$= H(59)$
$H(4) =$	$-0,17416350E - 05$	$= H(58)$
$H(5) =$	$0,43428480E - 02$	$= H(57)$
$H(6) =$	$0,53579250E - 05$	$= H(56)$
$H(7) =$	$-0,71570240E - 02$	$= H(55)$
$H(8) =$	$-0,49028620E - 05$	$= H(54)$
$H(9) =$	$0,10897540E - 01$	$= H(53)$
$H(10) =$	$0,89629280E - 05$	$= H(52)$
$H(11) =$	$-0,15605960E - 01$	$= H(51)$
$H(12) =$	$-0,85508990E - 05$	$= H(50)$
$H(13) =$	$0,21226410E - 01$	$= H(49)$
$H(14) =$	$0,12250150E - 04$	$= H(48)$
$H(15) =$	$-0,27630130E - 01$	$= H(47)$
$H(16) =$	$-0,11091200E - 04$	$= H(46)$
$H(17) =$	$0,34579770E - 01$	$= H(45)$
$H(18) =$	$0,13800660E - 04$	$= H(44)$
$H(19) =$	$-0,41774130E - 01$	$= H(43)$
$H(20) =$	$-0,11560390E - 04$	$= H(42)$
$H(21) =$	$0,48832790E - 01$	$= H(41)$
$H(22) =$	$0,12787590E - 04$	$= H(40)$
$H(23) =$	$-0,55359840E - 01$	$= H(39)$
$H(24) =$	$-0,90065860E - 05$	$= H(38)$
$H(25) =$	$0,60944450E - 01$	$= H(37)$
$H(26) =$	$0,88997300E - 05$	$= H(36)$
$H(27) =$	$-0,65232190E - 01$	$= H(35)$
$H(28) =$	$-0,38167120E - 05$	$= H(34)$
$H(29) =$	$0,67925720E - 01$	$= H(33)$
$H(30) =$	$0,27041150E - 05$	$= H(32)$
$H(31) =$	$0,93115220E + 00$	$= H(31)$

	Смуга 1	Смуга 2	Смуга 3
Нижня межа смуги	0,00000000	0,25000000	0,29000000
Верхня межа смуги	0,21000000	0,25000000	0,50000000
Шукане значення	1,00000000	0,00000000	1,00000000
Ваговий коефіцієнт	1,00000000	1,15190000	1,00000000
Амплітуда коливачь	0,000978727	0,000849663	0,000978727
Нерівномірність, дБ	0,008496785	-61,41499000	0,008496785

Екстремальні частоти

0,0000000	0,0161290	0,0322580	0,0483871	0,0645161
0,0806451	0,0962701	0,1123991	0,1280241	0,1431450
0,1582660	0,1728829	0,1864918	0,1980845	0,2066530
0,2100000	0,2500000	0,2900000	0,2930243	0,3020971
0,3136902	0,3272994	0,3414128	0,3565342	0,3721596
0,3877850	0,4034105	0,4195400	0,4356695	0,4517990
0,4679285	0,4840580			

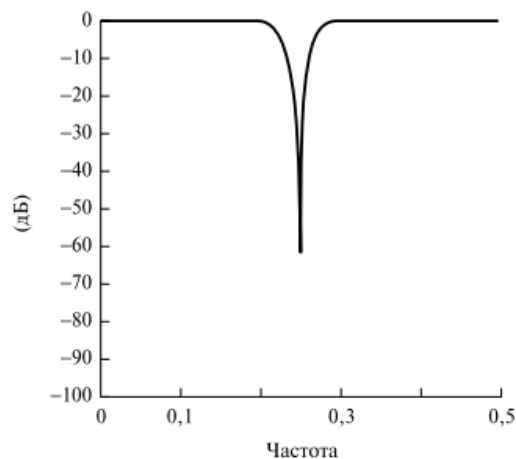


Рис.14. Характеристика фільтру (нормована шкала частот)

Приклад 8

При розробці фільтру важливо, щоб розробник розумів, як взаємодіють параметри, щоб за необхідності скористатися відповідними компромісами. Даний приклад допомагає досліджувати вплив параметрів δ_p , δ_s , W та вивчити різні можливості вибору.

Потрібен КІХ-фільтр з лінійною фазовою характеристикою, що пригнічує шум фізіологічної природи. Фільтр передбачається використовувати як частину великої ЦОС-системи реального часу, тому кількість коефіцієнтів слід максимально скоротити. Характеристики фільтру повинні відповідати наступним специфікаціям

нерівномірність у смузі пропускання	<0,026 дБ,
смуга придушення	>30 дБ,
край смуги пропускання	10 Гц,
край смуги придушення	<20 Гц,
частота дискретизації	128 кГц.

Рішення

Нормовані граничні частоти, нерівномірність характеристики у смузі пропускання та смузі придушення записуються наступним чином:

край смуги пропускання	0,078,
край смуги придушення	<0,15625,
максимальне відхилення у смузі пропускання	<0,003,
відхилення у смузі придушення	>0,0316.

Оскільки більшість специфікацій фільтру – змінні, очевидно, існуватиме ціла

низка можливих рішень. Отже, необхідно знайти найкраще рішення.

Підставляючи наведені вище значення рівняння (14), отримуємо, що $N > 25,6$ (найменше можливе значення N). Потім для кожного значення N в діапазоні 25-37 обчислюється гранична частота смуги придушення f_s , що задовольняє специфікаціям:

$$f_s = f_p + \Delta f,$$

де f_s і f_p – граничні частоти смуги придушення та смуги пропускання, а Δf – ширина смуги переходу, яка визначається наступним чином ($\Delta \max = 20-10 \text{ Гц} = 10 \text{ Гц}$):

$$\Delta f = \frac{N - 1}{2f(\delta_p, \delta_s)} \left[1 + \frac{4f(\delta_p, \delta_s)D_\infty(\delta_p, \delta_s) - 1}{(N - 1)^2} \right]^{1/2}.$$

На рис. 15 представлено простір рішень (над кривою), який обмежений частотою смуги придушення в 20 Гц і $N = 26$ і 37. Як відповідне рішення вибрано значення 27. Непарне значення N є кращим, оскільки так час затримки фільтра, виміряний в кількості вибірок, буде цілим. Використані такі параметри: смуга пропускання - від 0 до 0,078, смуга придушення - від 0,1523885 до 0,5 (тобто від 19 до 64 Гц). Для смуг пропускання та придушення обрані відповідно вагові коефіцієнти 10,5 та 1. Отримані в результаті коефіцієнти фільтра та параметри наведені у табл. 9. З параметрів фільтра видно, що специфікація задовольняється.

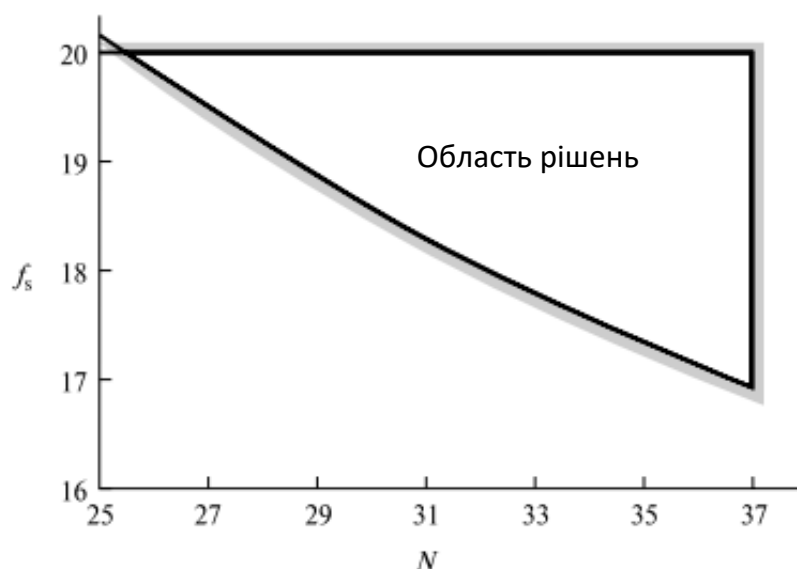


Рис. 15. Залежність положення краю смуги придушення від довжини фільтра з вказаним діапазоном можливих рішень

Таблиця 9. Коефіцієнти імпульсної характеристики оптимального фільтра (приклад 7.8)

	Смуга 1	Смуга 2
Нижня межа смуги	0 000000000	0,152388500
Верхня межа смуги	0,078000000	0,500000000
Шукане значення	1,000000000	0,000000000
Ваговий коефіцієнт	10,500000000	1,000000000
Амплітуда коливань	0,002604177	0,02734386
Нерівномірність, дБ	0,022589730	-31,262770000

Екстремальні частоти

0,0089286	0,0468750	0,0691964	0,0780000	0,1523885
0,1668974	0,1981473	0,2338614	0,2706916	0,3086379
0,3465842	0,3845305	0,4235928	0,4615391	0,5000000

7. Метод частотної вибірки

Метод частотної вибірки дозволяє розробляти нерекурсивні КІХ-фільтри, до яких входять як звичайні частотно-вибіркові фільтри (фільтри нижніх частот, верхніх частот, смугові), так і фільтри з довільною частотною характеристикою. Унікальна перевага методу частотної вибірки полягає в тому, що він допускає рекурсивні реалізації КІХ-фільтрів, що дозволяє отримувати ефективні фільтри. За деяких умов можна навіть розробити рекурсивні КІХ-фільтри, коефіцієнти яких – цілі числа, що зручно, якщо припустимі лише примітивні арифметичні операції (це справедливо, наприклад, для систем, реалізованих на стандартних мікропроцесорах).

7.1. Нерекурсивні фільтри частотної вибірки

Припустимо, що потрібно отримати коефіцієнти КІХ-фільтра, частотна характеристика якого зображена на рис. 16 а. Для початку можна взяти N вибірок частотної характеристики в точках kF_s/n , $k = 0,1,\dots, N - 1$. Коефіцієнти фільтра $h(n)$ можна отримати, застосувавши зворотне ДПФ до частотних вибірок:

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{i(2\pi/N)nk} \quad (16)$$

де $H(k)$, $k = 0,1,\dots, N - 1$ — вибірки ідеальної чи цільової частотної характеристики.

Можна показати (див. приклад 9), що для фільтрів з лінійною фазовою

характеристикою та парно-симетричною імпульсною характеристикою можна записати (якщо N – парне)

$$h(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=1}^{N/2-1} 2H|(k)| \cos[2\pi k(n - \alpha) / N] + H(0) \right] \quad (17)$$

де $\alpha = (N - 1) / 2$. Якщо N – непарне, верхньою межею суми є $(N - 1) / 2$. Фільтр, що виходить, матиме частотну характеристику, яка в точності збігається з вихідною характеристикою в моменти вибірки. У той самий час, для різних моментів вибірки характеристики можуть відрізнятись (рис. 16, в). Для отримання хорошої апроксимації частотної характеристики потрібно взяти достатню кількість частотних вибірок.

Альтернативний фільтр (фільтр типу 2), побудований за принципом частотної вибірки, виходить, якщо вибірки брати в точках

$$f_k = (k + 1/2)F_s / N, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (18)$$

Дві схеми частотної вибірки порівнюються на рис. 17. При даній специфікації фільтра обидва методи дадуть відмінні частотні характеристики. Завдання розробника - визначити, який фільтр краще підходить для поставленого завдання.

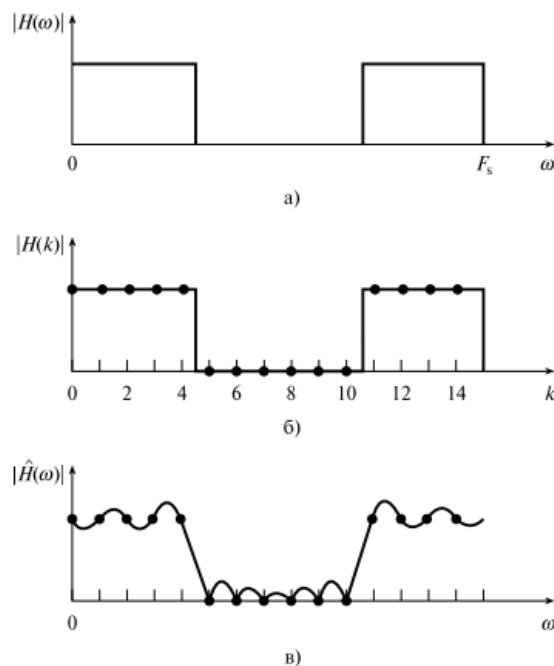


Рис. 16. Поняття частотної вибірки: а) частотна характеристика ідеального фільтра нижніх частот; б) вибірки ідеального фільтра нижніх частот; в) частотна характеристика фільтра нижніх частот, виведена з частотних вибірок

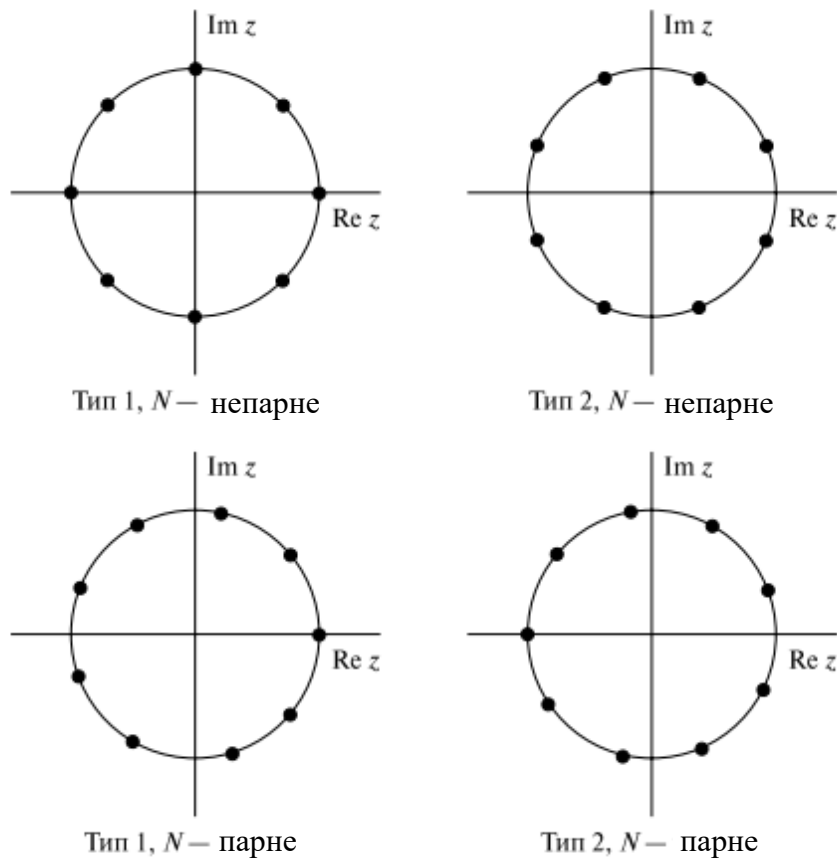


Рис. 17. Чотири можливі структури вибірки для двох типів фільтрів (зображені на комплексній площині)

Приклад 9

1. Покажіть, що коефіцієнти імпульсної характеристики КІХ-фільтра з лінійною фазовою характеристикою, парно-симетричними коефіцієнтами при N - парному можна виразити так:

$$h(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=1}^{N/2-1} 2H(k) \cos[2\pi k(n - \alpha) / N] + H(0) \right]$$

де $\alpha = (N - 1) / 2$ і $N(k)$ – вибірки частотної характеристики фільтра, взяті в точках kF_s / N .

2. Потрібно, щоб КІХ-фільтр нижніх частот задовольняв наступним специфікаціям:

смуга пропускання	0-5 кГц,
частота дискретизації	18 кГц,
довжина фільтра	9.

Отримайте коефіцієнти фільтра за допомогою методу частотної вибірки.

Рішення

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{i(2\pi/N)nk} = \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |H(k)| e^{-i2\pi\alpha k/N} e^{i2\pi kn/N} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |H(k)| e^{i2\pi(n-\alpha)/N} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |H(k)| \cos[2\pi(n-\alpha)/N] + i \sin[2\pi(n-\alpha)/N] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |H(k)| \cos[2\pi(n-\alpha)/N], \end{aligned} \quad (20)$$

оскільки $h(n)$ – цілком дійсна функція. У важливому окремому випадку лінійної фазової характеристики $h(n)$ буде симетричною, так що можна записати

$$h(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N/2-1} 2|H(k)| \cos[2\pi(n-\alpha)/N] + H(0) \right] \quad (21)$$

Якщо N – непарне, верхня межа суми – $(N-1)/2$.

2. Ідеальна частотна характеристика зображено на рис. 18 а. Частотні вибірки беруться у точках kF_s/N , тобто. з інтервалом $18/9 = 2$ кГц. Отже, частотні вибірки представлені наступним чином:

$$|H(k)| = 1, k = 0,1,2$$

$$0, k = 3,4$$

Використовуючи рівняння (21) з верхньою межею $(N-1)/2$ та частотні вибірки, отримуємо коефіцієнти імпульсної характеристики (табл. 10).

За допомогою програми обчислення коефіцієнтів КІХ-фільтра за даними значеннями частотних вибірок отримуємо частотну характеристику фільтра, наведену на рис. 18, б. Видно, що фільтр має погану амплітудну характеристику, що викликано різким переходом смуги пропускання (де $|H(k)| = 1$) в смугу придушення (де $|H(k)| = 0$).

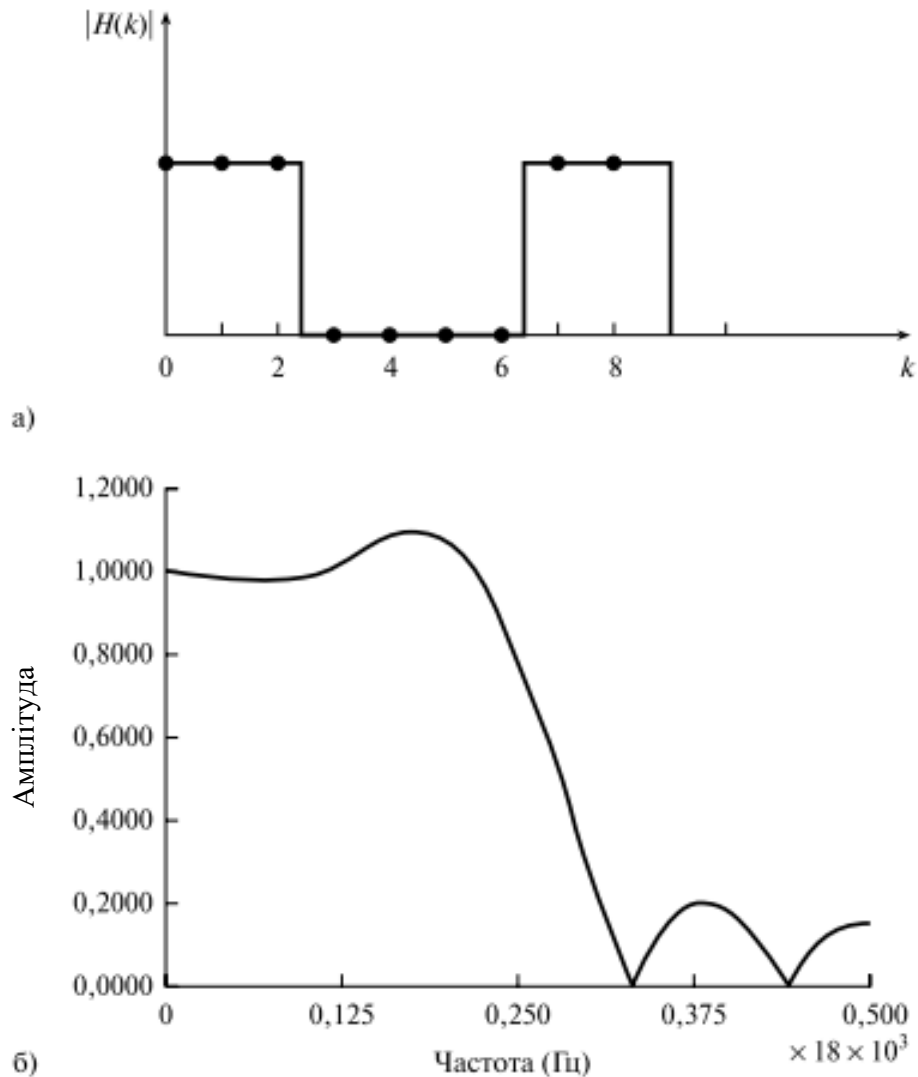


Рис. 18. Ідеальна частотна характеристика, на якій показані точки вибірки (а).
Частотна характеристика фільтру, побудованого за принципом частотної вибірки (б)

Таблиця 10. Нерекурсивні коефіцієнти КІХ-фільтра з прикладу 9

$h[0] =$	$7,2522627e - 02$	$= h[8]$
$h[1] =$	$-1,1111111e - 01$	$= h[7]$
$h[2] =$	$-5,9120987e - 02$	$= h[6]$
$h[3] =$	$3,1993169e - 01$	$= h[5]$
$h[4] =$	$5,5555556e - 01$	$= h[4]$

7.2. Рекурсивні фільтри частотної вибірки

Фільтри частотної вибірки в рекурсивній формі значно вигідніше обчислювально, ніж фільтри в нерекурсивній формі, якщо значна кількість частотних вибірок має нульові значення. Можна показати, що передатну функцію КІХ-фільтра $H(z)$ можна так записати в рекурсивному вигляді:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{2\pi ik/N} z^{-1}} = H_1(z)H_2(z), \quad (23)$$

де

$$H_1(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N}$$

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{2\pi ik/N} z^{-1}}.$$

Таким чином, очевидно, що в рекурсивній формі $H(z)$ можна розглядати як каскад із двох фільтрів: гребінчастого фільтра $H_1(z)$, який має N нулів, рівномірно розподілених на одиничному колі, та суми N фільтрів з одним полюсом $H_2(z)$. Нулі гребінчастого фільтра та полюси однополюсних фільтрів збігаються на одиничному колі в точках $z_k = e^{1\pi k/N}$. Отже, нулі компенсують полюси, і оскільки $H(z)$ немає полюсів, то це – кінцева імпульсна характеристика (КІХ).

На практиці кінцева довжина слова призводить до того, що полюси $H_2(z)$ розташовуються не точно на одиничному колі, так що вони вже не зрівноважуються нулями і $H(z)$ стає потенційно нестійкою нескінченною імпульсною характеристикою (БІХ). Проблем стійкості можна уникнути, дискретизуючи $H(z)$ на колі радіуса r , який трохи менше одиниці. У цьому випадку передатна функція стає такою:

$$H(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - r e^{2\pi ik/N} z^{-1}}. \quad (24)$$

Взагалі, частотні вибірки $H(k)$ це комплексні величини. Отже, безпосередня реалізація рівняння (23) або (24) вимагатиме комплексної арифметики. Щоб уникнути цього ускладнення, скористаємося симетрією, властивою частотній характеристиці будь-якого КІХ-фільтра з дійсною імпульсною характеристикою $h(n)$. Можна показати, що для звичайного частотно-вбіркового фільтра з лінійною фазовою характеристикою (парно-симетрична імпульсна характеристика) рівняння (24) можна подати у вигляді

$$H(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \times \left[\sum_{k=1}^M \frac{|H(k)| 2 \cos(2\pi k\alpha/N) - 2r \cos[2\pi k(1 + \alpha)/N] z^{-1}}{1 - 2r \cos(2\pi k/N) z^{-1} + r^2 z^{-2}} + \frac{H(0)}{1 - z^{-1}} \right], \quad (25)$$

де $\alpha = (N - 1)/2$. При непарному N $M = (N - 1)/2$, при парному N $M = N/2 - 1$.
 Діаграма реалізації рівняння (25) наведено на рис. 19.

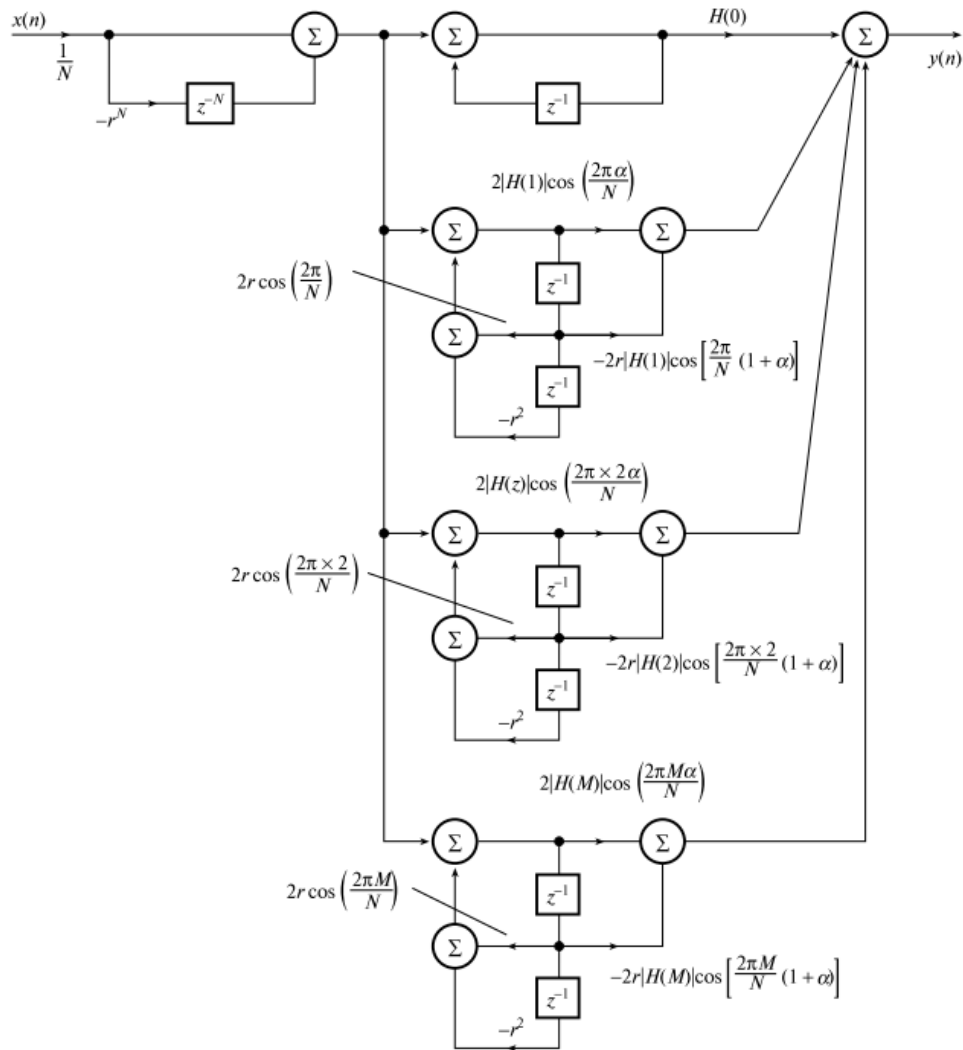


Рис. 19. Діаграма реалізації фільтра частотної вибірки

7.3. Метод частотної вибірки: висновки

Етап 1. Задати ідеальну або бажану частотну характеристику, загасання в смузі придушення та межі смуг цільового фільтра.

Етап 2. Виходячи зі специфікації, вибрати фільтр частотної вибірки першого (вибірки беруться з інтервалом kF_s / N або другого типу (вибірки беруться з інтервалом $(k + 1/2)F_s / N$).

Етап 3. Використовувати специфікацію (етап 1) та таблиці розробки для визначення N , числа частотних вибірок ідеальної частотної характеристики, M , числа вибірок у смузі переходу, ширини смуги переходу, числа частотних вибірок у смузі пропускання і T_i , значень вибірок у смузі переходу ($i = 1, 2, \dots, M$)

Етап 4. Використовувати відповідне рівняння для розрахунку коефіцієнтів

фільтра. Замість етапів 2 та 4 можна використовувати комп'ютерну програму з реалізацією генетичного алгоритму.

7.4. Порівняння методу зважування, оптимального методу та методу частотної вибірки

Оптимізаційні методи - це простий і ефективний шлях обчислення коефіцієнтів КІХ-фільтра. Хоча метод дозволяє повністю контролювати специфікацію фільтра, необхідною вимогою є програмна підтримка розробки фільтра. Для більшості додатків оптимальний метод дає фільтри з хорошими амплітудними характеристиками при розумних значеннях N . Метод особливо гарний розробки трансформаторів і диференціаторів Гільберта. При використанні для розробки цих пристроїв інших методів будуть отримані великі помилки апроксимації.

Якщо програмна підтримка оптимального методу відсутня або амплітуди коливань характеристики в смузі пропускання та смузі придушення рівні, можна скористатися методом вирізання. Цей метод дуже простий у застосуванні та інтуїтивно зрозумілий. У той самий час, оптимальний метод часто пропонує більш економне рішення з погляду числа коефіцієнтів фільтра. Крім того, метод вирізання не дозволяє розробнику строго керувати частотами зрізу або нерівномірністю в смузі пропускання або придушення.

Тільки метод частотної вибірки, який допускає і рекурсивну, і нерекурсивну реалізацію КІХ-фільтра, і цей метод варто використовувати, коли передбачається, що такі реалізації, як рекурсивний підхід, будуть обчислювально економними. Фільтр з цілими коефіцієнтами слід застосовувати тільки якщо обов'язкова примітивна арифметика і простота програмування (наприклад, програмування на асемблері на стандартному мікропроцесорі). У таких випадках завжди слід перевіряти, чи прийнятна в результаті погана амплітудна характеристика. Метод частотної вибірки дозволяє легко розробляти фільтри із довільними амплітудно-частотними характеристиками. У той самий час цей метод дозволяє суворо контролювати становище граничних частот чи нерівномірність у смузі пропускання і залежить від наявності таблиць розробки, хоча ще можна використовувати комп'ютерну програму підтримки розробки.

7.5. Вплив кінцевої розрядності на цифрові КІХ-фільтри

На практиці цифрові КІХ-фільтри часто реалізуються на основі процесорів ЦОС (наприклад, TMS320C50 від Texas Instruments), алгоритмічних чіпів ЦОС, розроблених для КІХ-фільтрації (таких як A100 від INMOS). Якщо ж потрібна висока швидкість, використовуються стандартні блоки помножувачів, елементів пам'яті, суматорів та контролерів (наприклад, сімейство PDSP1600 від Plessey). У цих випадках кількість бітів, що використовуються для представлення вхідних даних фільтра, коефіцієнтів фільтра та виконання арифметичних операцій, повинна бути мінімальною для ефективного

використання та зниження вартості цифрового фільтра. Проблеми, викликані використанням кінцевого числа бітів, називаються ефектами кінцевої розрядності й у загальному випадку призводять до зниження продуктивності фільтра.

Існує чотири механізми впливу кінцевої розрядності на продуктивність цифрових КІХ-фільтрів.

1. Шум АЦП. Це звичний шум квантування АЦП, який є присутнім, коли на вхід фільтра подається аналоговий сигнал. Шум АЦП обмежує максимально досяжне відношення. Вплив цього фактора можна знизити, використавши додаткові біти, що узгоджуються з власним шумом сигналу, та/або застосувавши метод обробки при кількох швидкостях для поліпшення відношення сигнал-шум.

2. Помилки квантування коефіцієнтів. Походять від представлення коефіцієнтів фільтра кінцевим числом бітів. Наслідком є модифікація бажаної частотної характеристики. У смузі придушення фільтра, наприклад, цей чинник обмежує максимально можливе згасання, тобто допускає передачу додаткових сигналів. Пряме вирішення цієї проблеми - використовувати достатню кількість бітів для представлення коефіцієнтів фільтра. У той самий час, для мінімізації довжини слова, що використовується у коефіцієнтах, можна застосувати методи оптимізації, направлені на ефективний вибір коефіцієнтів.

3. Помилки округлення під час квантування результатів арифметичних операцій. Ці помилки можуть з'являтися, наприклад, при відкиданні молодших розрядів перед запам'ятовуванням результату множення (що автоматично доводиться робити через кінцеву розрядність використовуваного процесора). Названі помилки знижують відношення сигнал-шум. Щоб зменшити їх, округлення можна використовувати після підсумовування добутоків, яке виконується з подвійною довжиною. Ступінь помилки залежить від типу використовуваної арифметики та структури фільтра.

4. Арифметичне переповнення. Виникає, коли часткові суми чи вихід фільтра перевищують дозволена довжину слова системи. По суті, у разі переповнення вихідна вибірка буде неправильною (зазвичай це зміна знака). Щоб зменшити переповнення або уникнути його, можна масштабувати коефіцієнти фільтра, розділивши кожен коефіцієнт на множник, щоб вихідна вибірка фільтра ніколи не перевищувала дозволена довжину слова. Очевидно, що таке рішення можливе за рахунок зниження відношення сигнал-шум.

7.5.1. Помилки квантування коефіцієнтів

Коефіцієнти фільтра, отримані будь-яким методом апроксимації, наприклад, методом вирізання або оптимальним (заміна Ремеза (Remez exchange)), зазвичай дуже точні до певних знаків у десятковому записі. Для реалізації фільтра коефіцієнти необхідно представити фіксованим числом бітів, і часто це число визначається довжиною слова використовуваного процесора. Наприклад,

якщо для реалізації фільтра використовується один із 16-бітових процесорів ЦОС, то логічно уявити кожен коефіцієнт фільтра 16 біт. У той же час, якщо зробити так, автоматично вводиться помилка, яка призводить до відхилення частотної характеристики фільтра з кінцевою довжиною слова бажаної частотної характеристики. У деяких випадках це відхилення означає, що фільтр не задовольняє початковій специфікації.

Приклад 10

Визначте вплив квантування через округлення до 8 біт на коефіцієнти наступного фільтра:

згасання у смузі придушення	> 90 дБ,
нерівномірність у смузі пропускання	< 0,002 дБ,
край смуги пропускання	3,375 кГц,
край смуги придушення	5,625 кГц,
частота дискретизації	20 кГц,
кількість коефіцієнтів	45.

Рішення

Використовуємо програму *optimal.c* наступним входом:

число коефіцієнтів фільтра	45,
крайові частоти	0; 0,16875; 0,28125; 0,5,
вагові коефіцієнти	1; 7,28.

Коефіцієнти фільтра до та після округлення до 8 біт перераховані в табл. 11. Відповідні частотні характеристики зображено на рис. 20.

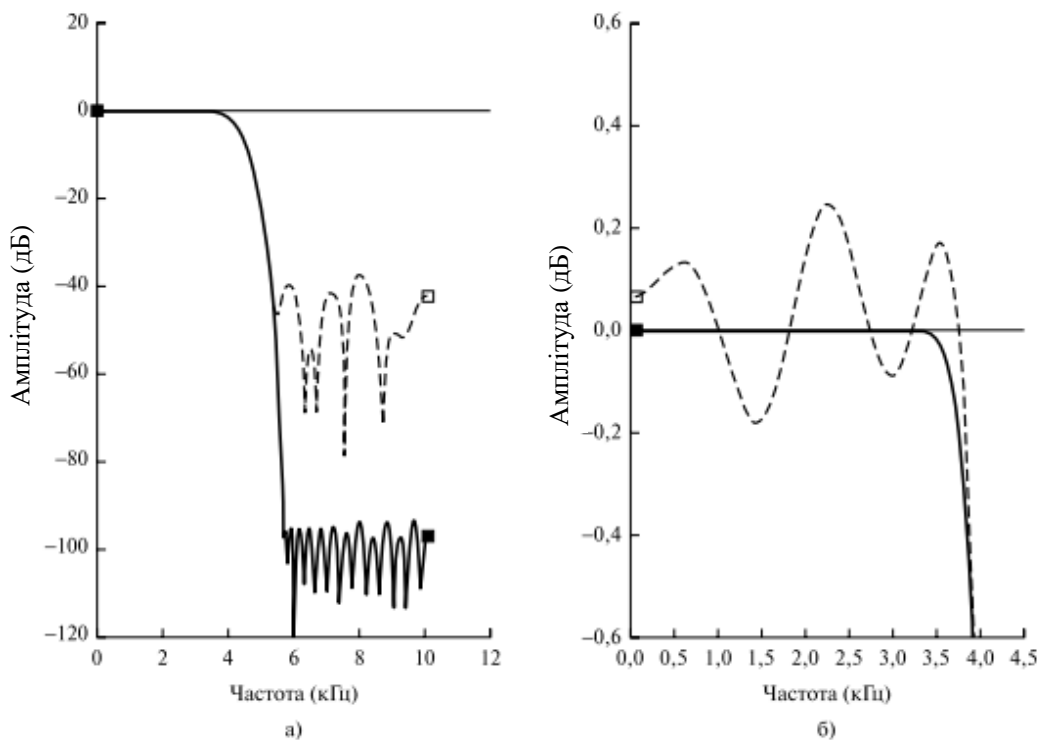


Рис. 20. Вплив квантування коефіцієнтів (приклад 10) (а). Смуга пропускання (■ — неквантована характеристика, □ — квантована) (б)

Таблиця 111. Коефіцієнти фільтра до та після квантування до 8 біт

$h(n)$	$h_q(n)$
-1,05023e - 04	0,00000e + 00
-1,25856e - 04	0,00000e + 00
3,07141e - 04	0,00000e + 00
6,79484e - 04	0,00000e + 00
-2,89029e - 04	0,00000e + 00
-1,77474e - 03	0,00000e + 00
4,08318e - 04	0,00000e + 00
3,43482e - 03	0,00000e + 00
2,66515e - 03	0,00000e + 00
-5,00314e - 03	-7,81250e - 03
-7,30591e - 03	-7,81250e - 03
5,09712e - 03	7,81250e - 03
1,48422e - 02	1,56250e - 02
-1,40255e - 03	0,00000e + 00
-2,49785e - 02	-2,34375e - 02
-9,39383e - 03	-7,81250e - 03
3,64568e - 02	3,90625e - 02
3,28505e - 02	3,12500e - 02
-4,72008e - 02	-4,68750e - 02
-8,52427e - 02	-8,59375e - 02
5,48855e - 02	5,46875e - 02
3,10921e - 01	3,12500e - 01
4,42322e - 01	4,45212e - 01
3,10921e - 01	3,12500e - 01
5,48855e - 02	5,46875e - 02
-8,52427e - 02	-8,59375e - 02
-4,72008e - 02	-4,68750e - 02
3,28505e - 02	3,12500e - 02
3,64568e - 02	3,90625e - 02
-9,39383e - 03	-7,81250e - 03
-2,49785e - 02	-2,34375e - 02
-1,40255e - 03	0,00000e + 00
1,48422e - 02	1,56250e - 02
5,09712e - 03	7,81250e - 03
-7,30591e - 03	-7,81250e - 03
-5,00314e - 03	-7,81250e - 03
2,66515e - 03	0,00000e + 00
3,43482e - 03	0,00000e + 00
4,08318e - 04	0,00000e + 00
-1,77474e - 03	0,00000e + 00
-2,89029e - 04	0,00000e + 00
6,79484e - 04	0,00000e + 00
3,07141e - 04	0,00000e + 00
-1,25856e - 04	0,00000e + 00
-1,05023e - 04	0,00000e + 00

Видно, що після квантування мінімальне згасання у смузі придушення дорівнює 36 дБ, погіршення спостерігається більш ніж на 58 дБ. Вочевидь, що у цьому прикладі подання коефіцієнтів потрібні слова, які більше 8 біт.

Вплив помилок коефіцієнтів проявляється у відхиленні частотної характеристики від бажаної форми. Дане відхилення в граничному випадку може означати, що фільтр не відповідає специфікації. У конкретній задачі розробки фільтра відповідну довжину слова можна визначити, отримавши частотні характеристики для різних розмірів коефіцієнтів. За цими даними визначається мінімальна кількість бітів, необхідна для задоволення специфікації. Крім того, суттєву інформацію про розробку фільтрів з кінцевою довжиною слова можна отримати, аналізуючи помилки, що вводяться при квантуванні коефіцієнтів.

Квантований і неквантований коефіцієнти, $h_q(n)$ і $h(n)$, відповідно пов'язані співвідношенням

$$h_q(n) = h(n) + e(n), n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (42)$$

де $e(n)$ – помилка між квантованими і неквантованими коефіцієнтами. У частотній області формулу (42) можна переписати наступним чином:

$$H_q(\omega) = H(\omega) + E(\omega), \quad (43)$$

де $E(\omega)$, помилка бажаної частотної характеристики, виражається так: -

$$E(\omega) = \sum_{m=0}^{N-1} e(m) \exp(-i\omega m),$$

а $H_q(\omega)$ і $H(\omega)$ – частотні характеристики фільтрів із квантованими та неквантованими коефіцієнтами відповідно. Схематичне подання рівнянь (42) та (43) дано відповідно на рис. 21, а б. Бачимо, що фізично $e(n)$ можна розглядати як імпульсну характеристику іншого фільтра, сполученого паралельно з потрібним фільтром. У частотній області вплив помилки коефіцієнтів представляється паразитною функцією передачі, що подається паралельно з передавальною функцією дуже точного фільтра. Метою розробника є обмеження амплітуди помилки $E(\omega)$, щоб частотна характеристика реального фільтра задовольняла специфікації.

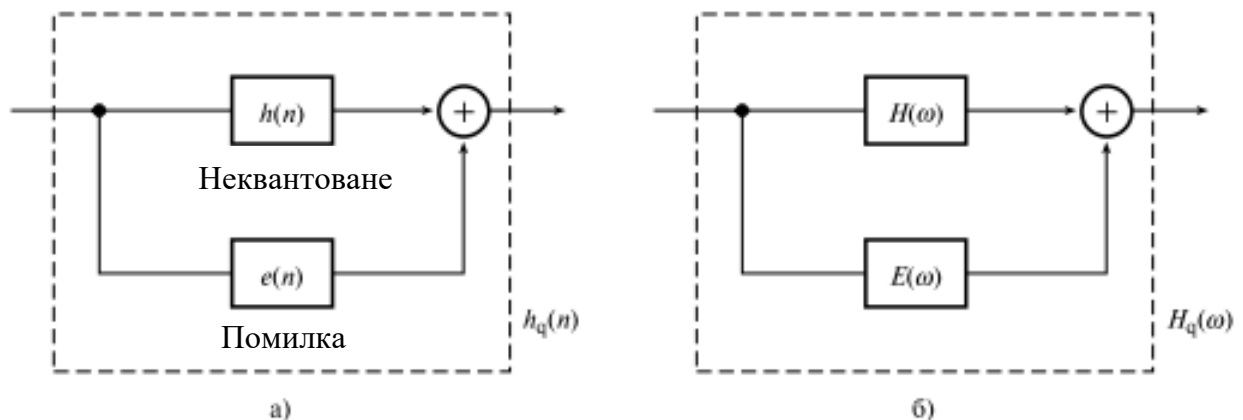


Рис. 21. Квантування коефіцієнтів: а) вплив на коефіцієнти імпульсної характеристики; б) вплив на частотну характеристику фільтра

Для частотно-виборчих фільтрів (фільтри нижніх частот, верхніх частот, смугові, режекторні) були отримані вирази меж помилок частотної характеристики. Дані межі можна використовувати для визначення відповідної довжини коефіцієнтів даного фільтра. Крім того, межі корисні при оцінці довжин коефіцієнтів адаптивних КІХ-фільтрів, оскільки апріорі точні

характеристики таких фільтрів невідомі.

Для КІХ-фільтра, реалізованого у прямій формі, з квантуванням через округлення найчастіше використовуються такі межі:

$$|E(\omega)| = N2^{-B}, \quad (44,а)$$

$$|E(\omega)| = 2^{-B}(N/3)^{1/2}, \quad (44,б)$$

$$|E(\omega)| = 2^{-B}[(N \ln N)/3]^{1/2}, \quad (44,в)$$

де B – число бітів, що представляють кожен коефіцієнт, а N - довжина фільтра. Межа (44 а) – це абсолютна верхня межа, виведена в припущенні найгіршої ситуації, так що вона надмірно песимістична. Межі (44 б) і (44 в) являють собою статистичні межі і можуть дати більш точну оцінку помилок частотної характеристики і довжини коефіцієнтів. При виведенні статистичних меж передбачалося, що помилки квантування $e(n)$ рівномірно розподілені і мають нульове середнє.

Очевидно, що основним наслідком квантування коефіцієнтів є можливе збільшення максимальної нерівномірності у смузі пропускання та зниження максимального загасання у смузі придушення. Існують практичні процедури, що дозволяють врахувати ці ефекти при обчисленні коефіцієнтів фільтрів. По суті, при цьому специфікації неквантованих фільтрів відображаються в новий набір специфікацій, який використовується для отримання коефіцієнтів, причому після квантування коефіцієнтів задовольняються початкові специфікації.

Фільтр, отриманий у результаті такого перетворення, може бути оптимальним. Цей факт ініціював розробку методів оптимізації для отримання коефіцієнтів КІХ-фільтрів з кінцевою довжиною слова, таких як алгоритми змішаного цілісного програмування. Нові підходи призводять до значного зменшення довжин слів, що використовуються для представлення коефіцієнтів, порівняно з простим округленням, але пошук відповідних коефіцієнтів часто включає значні обчислювальні витрати вже за N помірно великих. Практично використовувати одну з меж (44) з метою оцінки кількості бітів, необхідних для представлення коефіцієнтів. Необхідна довжина слова зазвичай на 1-4 біт більше цього значення, а точна величина визначається при вивченні частотної характеристики, що відповідає довжинам слів у цьому діапазоні.

7.5.2. Помилки округлення

Нагадаємо, що різницеве рівняння КІХ-фільтра виглядає так:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) \quad (46)$$

де кожна змінна представляється кінцевим числом бітів. Як правило, вхідні та вихідні вибірки $x(n-m)$ і $y(n)$ представляються 12 біт кожна, а коефіцієнти представляються 16 біт у форматі доповнення до двох.

З рівняння (46) видно, що вихід фільтра це сума добутків $h(m)$ і $x(n-m)$. Після кожного множення добуток містить більше бітів, ніж $h(m)$ або $x(n-m)$ окремо. Наприклад, якщо 12-бітовий вхід множиться на 16-бітовий коефіцієнт, результат розміром 28 біт потрібно квантувати до колишніх 16 біт, якщо, наприклад, далі його потрібно занести в пам'ять, або до 12 біт, якщо потім його потрібно подати на вихід ЦАП. Квантування призводить до помилок, вплив яких подібний до впливу шуму АЦП, але іноді проявляється більш значно. Зазвичай у разі квантування результату арифметичної операції чи а) результат усікається, тобто. залишаються лише старші біти і відкидаються молодші, чи б) результати округляються, тобто. вибираються старші біти, найбільш близькі до неокругленого результату. Для цього до результату додається половина молодшого розряду.

Помилки округлення можна мінімізувати, якщо точно представляти всі добутки в регістрах подвійної довжини, а результати округляти після отримання фінальної суми, тобто після обчислення $y(n)$. Цей підхід призводить до меншої помилки, ніж альтернативний метод округлення кожного добутку окремо до підсумовування.

7.5.3. Помилки переповнення

Переповнення відбувається коли сума двох чисел, зазвичай великих чисел одного знака, перевищує дозволена довжину слова. Значить, переповнення в контексті формули (46) може відбутися при додаванні двох добутків, $h(0)x(n)$ і $h(1)x(n-1)$.

Якщо остаточний вихід $y(n)$ узгоджується за розміром з даною довжиною слова, переповнення в часткових сумах несуттєво. Ця властивість є приємною особливістю арифметики з доповненням до двох. У той самий час, якщо вихід $y(n)$ не вміщується у дозволених межах, очевидно, що значення вихідної вибірки, поданої, наприклад, в ЦАП, буде неправильним, і таку ситуацію слід запобігти. Можна детектувати і коригувати переповнення, але витрати у разі можуть бути великими. Інша альтернатива – масштабувати коефіцієнти та/або вхідні дані, щоб уникнути переповнення або тримати його у певних рамках. Для масштабування коефіцієнтів можна використовувати один із таких підходів:

$$h(m) = \frac{h(m)}{\sum_{k=0}^{N-1} |h(k)|}, \quad (47)$$

$$h(m) = \frac{h(m)}{\left[\sum_{k=0}^{N-1} h^2(k) \right]^{1/2}} \quad (48)$$

Якщо використовувати перетворення (47), переповнення не відбудеться ніколи, але масштабування в такому вигляді часто зайве, оскільки розраховане на найбільший варіант переповнення, що на практиці майже нереально. Крім того, такий підхід вводить більший шум квантування коефіцієнтів, ніж метод з використанням перетворення (48), в якому передбачається, що переповнення відбувається час від часу.

Подібно до коефіцієнтів можна масштабувати вхідні дані, що часто призводить до поліпшення відношення сигнал-шум. Третій підхід - це масштабувати вхід і вихід так, щоб отримати найкраще можливе відношення сигнал-шум. Ефективним є масштабування з масштабом, що є ступенем двійки.

8. Висновки

Розробку цифрових фільтрів можна поділити на п'ять взаємозалежних етапів: специфікація фільтра, розрахунок коефіцієнтів, реалізація, аналіз помилок та реалізація фільтра в апаратній та/або програмній формі.

Специфікація фільтра залежить від програми, але повинна включати специфікацію амплітудної та/або фазової характеристики.

Розрахунок коефіцієнтів, власне, включає пошук значень $h(m)$, що відповідають специфікаціям. Найбільш поширені методи обчислення коефіцієнтів КІХ-фільтра: 1) вирізання; 2) частотна вибірка; 3) оптимальний метод. Метод зважування простий, але йому бракує гнучкості, особливо за наявності різних амплітуд коливань характеристики в смузі пропускання і забавки. Метод частотної вибірки чудово підходить для рекурсивної реалізації КІХ-фільтрів і в тих випадках, коли потрібні фільтри, відмінні від стандартних частотно-вибіркових фільтрів (нижніх частот, верхніх частот, смугових та режекторних). Оптимізаційний метод найбільш потужний і гнучкий.

Трьома найбільш поширеними структурами реалізації КІХ-фільтрів є трансверсальна, яка включає пряму згортку з використанням коефіцієнтів фільтра, структура частотної вибірки, яка безпосередньо пов'язана з обчисленням коефіцієнтів методом частотної вибірки, і структура швидкої згортки. Вибір структури залежить від застосування фільтра

На продуктивність КІХ-фільтрів великої довжини або з сильним загасанням у смузі придушення може впливати кінцева довжина слова, наприклад, частотні характеристики цих фільтрів можуть змінюватися після квантування коефіцієнтів. Відповідно, за допомогою характеристик таких фільтрів необхідно перевіряти, чи достатньо довгі слова використовуються, особливо якщо довжину слова припускається вибрати меншою, ніж 12 біт.

До реалізації фільтра зазвичай приступають після успішного завершення перших чотирьох етапів, і цей останній етап включає програмне кодування або апаратну реалізацію обраної структури.