Правило 1. *Для того щоб знайти границю дробово-раціональної функції у випадку, коли при* $x \to x_0$ *чисельник і знаменник прямують до нуля (невизначеність* $\frac{0}{0}$*), потрібно скоротити дріб на* $(x - x_0)$ *і перейти до границі.*

Застосування правила 1 ґрунтується на розкладі чисельника та знаменника дробу на множники. Для цього можна скористатись, наприклад, формулами скороченого множення

$$x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2; \qquad \text{(a)}$$

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a); \qquad \text{(в)}$$

$$x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2) \qquad \text{(c)}$$

або формулою розкладу квадратного тричлена на множники

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \qquad \text{(d)}$$

де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$.

⌜ Скористатись формулою (1) у цьому випадку не можна, оскільки значення $x = 1$ не належить області визначення функції $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Для знаходження заданої границі застосуємо формулу скороченого множення $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3. \ \lrcorner$$

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 5x - 6}$.

⌜ Підстановкою значення $x = 1$ переконуємось, що маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Скористаємось правилом 1, для чого спочатку розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники.

Розглянемо рівняння $2x^2 + x - 3 = 0$. Його коренями є числа $x_1 = 1$ та $x_2 = -\frac{3}{2}$. Тому за формулою (d):

$$2x^2 + x - 3 = 2(x-1)\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right) = (x-1)(2x+3).$$

Аналогічно, розв'язавши рівняння $x^2 + 5x - 6 = 0$, одержимо $x_1 = 1$, $x_2 = -6$ та $x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+6)$.

Тому

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 5x - 6} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+6)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x+3}{x+6} = \frac{2 \cdot 1 + 3}{7 + 6} = \frac{5}{7}. \ \lrcorner$$

Правило 2. *Для того щоб знайти границю функції, яка є часткою двох ірраціональних функцій, у випадку, коли при* $x \to x_0$ *чисельник і знаменник прямують до нуля (невизначеність* $\frac{0}{0}$*), потрібно помножити чисельник та знаменник дробу на вираз спряжений до кожного ірраціонального виразу, скоротити після цього дріб на* $(x - x_0)$ *і перейти до границі.*

6. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+7} - 3}{x - 2}$.

⌜ При $x=2$ чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю, тобто маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Але розкрити її за правилом 1 немає можливості, оскільки чисельник дробу не є многочленом. Скористаємось основною властивістю дробу і помножимо чисельник та знаменник дробу на вираз $\sqrt{x+7}+3$, який є спряженим до чисельника. Одержимо

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-3^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+7-9}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1}{\sqrt{2+7}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}.$$

Зауважимо, що при множенні на спряжений вираз, ми розкрили дужки лише в чисельнику, перемноживши взаємно спряжені вирази за допомогою формули скороченого множення $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. У знаменнику ж ми дужки не розкривали, щоб зберегти множник $(x-2)$, на який потрібно скоротити дріб для розкриття невизначеності. ⌟

Правило 3. *Для обчислення границі частки двох многочленів при* $x\to\infty$ (*невизначеність типу* $\frac{\infty}{\infty}$) *потрібно поділити чисельник та знаменник дробу на найвищий степінь змінної, що зустрічається під знаком границі, та скористатись тим, що всі функції вигляду* $\frac{a}{x^n}$ $(a\in R,\ n\in N)$ *при* $x\to\infty$ *є нескінченно малими.*

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{4x^2-x}$.

⌜ Для обчислення цієї границі не можна застосувати правило (1). Арифметичну властивість про границю частки застосувати також не можна, оскільки не існує границь чисельника та знаменника. Дійсно (див. приклади 53, 54), при $x\to\infty$ чисельник та знаменник нескінченно великі. Тобто, ми маємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$.

Щоб розкрити дану невизначеність, поділимо чисельник та знаменник дробу на x^2 і одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{4x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\frac{1}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}4-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{2+0-0}{4-0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

У ході розв'язання скористались тим, що $\frac{1}{x}$ та $\frac{3}{x^2}$ є нескінченно малими при $x\to\infty$ (див. властивості нескінченно малих). ⌟

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2-3x+4}$.

⌜ Оскільки при $x\to\infty$ чисельник та знаменник дробу є нескінченно великими, маємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$, для розкриття якої скористаємось правилом 3: поділимо чисельник та знаменник на x^2 – найвищий степінь змінної:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2-3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}=\frac{0}{1}=0\,.$$ ⌟

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{x^2+4}$.

⌜ При $x\to\infty$ маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник та знаменник на найвищий степінь змінної x^3. Одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}.$$

Скористатись арифметичною властивістю про границю частки не можна, оскільки границя знаменника дорівнює нулю, тобто функція $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}$ є нескінченно малою. Але тоді функція $g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}$ є нескінченно великою. Границя чисельника дорівнює 2. Тому за властивістю нескінченно великих

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}=\infty\,.$$ ⌟

Перейдемо до обчислення границь пов’язаних з першою визначною границею:

(I) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\,.$$

13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$.

⌜ При $x\to0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Обчислимо цю границю двома способами.

1) Використовуючи (I) та властивості границь 1º б), 2º, одержуємо

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3x}=3\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot1=3\,.$$

2) Інший спосіб розв’язування цієї вправи грунтується на заміні змінної під знаком границі (див. властивість 2º).

Нехай $3x=y$. Тоді $y\to0$ при $x\to0$. Враховуючи, що $x=\frac{y}{3}$, маємо:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{\frac{y}{3}}=\lim_{y\to0}\frac{3\sin y}{y}=3\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=3\cdot1=3\,.$$

Ми скористались границею (I) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$, яка не залежить від позначення змінної, тобто

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1.$ ⌋

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

⌈ Зробимо заміну змінної $y=\arcsin x$, звідки $x=\sin y$ і $y\to 0$ при $x\to 0$. Тому, з урахуванням (I) та арифметичних властивостей границь, одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}=\frac{1}{1}=1.$$ ⌋

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

⌈ Скористаємось тим, що $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ та границею (I):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

Ми скористались властивостями 1º границь та правилом (1), згідно з яким $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=\dfrac{1}{\cos 0}=\dfrac{1}{1}=1.$ ⌋

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} 3x}{1-\cos 4x}$.

⌈ а) Аналогічно попередньому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{5x}{2x}\cdot\cos 2x\right]=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 2x=\frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\cos 0=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{1}\cdot 1=\frac{5}{2}.$$

б) Використаємо формули $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ і $\operatorname{tg} 3x=\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}$ та перейдемо від границі добутку до добутку границь:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg} 3x}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{2\sin^2\frac{4x}{2}\cdot\cos 3x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{(2x)^2}{\sin^2 2x}\cdot\frac{x\cdot 3x}{(2x)^2}\cdot\frac{1}{\cos 3x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3}{4\cos 3x}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}.$$ ⌋

Розглянемо обчислення границь, пов'язаних з другою визначною границею

(II.1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$,

(II.2) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\,.$$

Записи другої визначної границі у вигляді (II.1) та (II.2) еквівалентні. У цьому можна переконатись, здійснивши підстановку $\frac{1}{x}=y$ у кожній з цих границь. При розв'язанні вправ, пов'язаних з другою визначною границею, нам знадобиться наступна формула (наслідок формули (2)):

якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$ *та* $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$, *то*

$$\lim_{x\to x_0}\left[u(x)\right]^{v(x)}=\left[\lim_{x\to x_0}u(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)}, \qquad (3)$$

де під x_0 *розуміємо число або один із символів* ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Розглянемо спочатку прості вправи, пов'язані з застосуванням формули (3).

18. а) $\lim\limits_{x\to1}2^{\frac{3x}{x+2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}3^{\frac{2x}{x+3}}$.

⌜ а) $\lim\limits_{x\to1}2^{\frac{3x}{x+2}}=\left[\lim\limits_{x\to1}2\right]^{\lim\limits_{x\to1}\frac{3x}{x+2}}=2^{\frac{3\cdot1}{1+2}}=2^{\frac{3}{3}}=2$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}3^{\frac{2x}{x+3}}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}3\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+3}}=3^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{3}{x}}}=3^{\frac{2}{1}}=3^2=9$. ⌟

19. $\lim\limits_{x\to1}(3-x)^{\frac{2x}{x+3}}$.

⌜ $\lim\limits_{x\to1}(3-x)^{\frac{2x}{x+3}}=\left[\lim\limits_{x\to1}(3-x)\right]^{\lim\limits_{x\to1}\frac{2x}{x+3}}=[3-1]^{\frac{2\cdot1}{1+3}}=2^{\frac{2}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$. ⌟

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{\frac{2x+5}{x+1}}$.

⌜ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{\frac{2x+5}{x+1}}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5}{x+1}}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}}}=\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{2}{1}}=2^2=4$. ⌟

У подальшому не будемо щоразу робити заміну змінної у подібних випадках, а розумітимемо, що формули (II.1) та (II.2) виконуються і у випадку, коли у них під x розуміти довільну функцію, яка прямує відповідно до нуля чи до нескінченності при $x\to x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}=e \quad \text{(II.1')} \quad \text{та} \quad \lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e \quad \text{(II.2')}.$$

Ці узагальнення формул (II.1) та (II.2) дістаємо на основі границі суперпозиції функцій (властивість 2°).

Наприклад, будемо писати

$\lim\limits_{x\to1}\left(1+3(x-1)\right)^{\frac{1}{3(x-1)}}=e$ (оскільки $3(x-1)\to0$ при $x\to1$);

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+4x+5}{2x-3}}\right)^{\frac{x^2+4x+5}{2x-3}}=e$$

(оскільки $\dfrac{x^2+4x+5}{2x-3}=\dfrac{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}\to\infty$ при $x\to\infty$) тощо.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$.

⌜ Як і раніше, маємо невизначеність 1^∞. Перепишемо функцію, що стоїть під знаком границі так, щоб прийти до (II.2') і скористаємось формулою (2):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{\frac{-x}{2}\cdot\frac{2}{-x}\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{\frac{-x}{2}\cdot(-2)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{\frac{-x}{2}}\right]^{-2}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{-x}{2}}\right)^{\frac{-x}{2}}\right]^{-2}=e^{-2}.$$

Для побудови потрібного показника $\dfrac{-x}{2}$ ми помножили і поділили на нього показник функції x. Такий прийом у подальшому будемо використовувати часто. ⌟

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-3}$.

⌜ Знову маємо невизначеність 1^∞. Виділимо в основі цілу частину $\dfrac{2x+3}{2x+1}=\dfrac{(2x+1)+2}{2x+1}=1+\dfrac{2}{2x+1}$.

Зауважимо, що для виділення цілої частини можна також скористатись діленням многочлена на многочлен. Але у випадку невизначеності 1^∞ (коли відомо, що основа прямує до 1) зручним є формальний спосіб, який полягає у додаванні та відніманні 1. Проілюструємо його на нашому прикладі:

$$\frac{2x+3}{2x+1}=1+\frac{2x+3}{2x+1}-1=1+\left(\frac{2x+3}{2x+1}-1\right)=1+\frac{2x+3-(2x+1)}{2x+1}=1+\frac{2}{2x+1}.$$

Отже, для того щоб можна було скористатись формулою (II.2'), показником степеня має бути вираз $\dfrac{2x+1}{2}$ (обернений до $\dfrac{2}{2x+1}$). Тому помножимо і поділимо показник $x-3$ на $\dfrac{2x+1}{2}$ (від цього вираз $x-3$ не зміниться). Використовуючи формулу (3), одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}\cdot(x-3)}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-6}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{6}{x}}{2+\frac{1}{x}}}=e^1=e.$$

При знаходженні границі основи скористались формулою (II.2'), а при обчисленні границі показника – правилом 3.

Розглянемо інший спосіб розв'язання цієї вправи. Поділимо чисельник та знаменник дробу на $2x$ і одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{x-3}}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x-3}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3}}{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{3}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}\cdot\frac{3}{2}} \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{3} \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} \cdot 1}{1\cdot\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = e^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = e^{1} = e\,.$$

Оскільки перший спосіб є більш стандартним, його ми і будемо використовувати у подальшому. ⌋

23. $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{x}{x^2-9}}$.

⌈ При $x\to 3$: $(2x-5)\to 1$, $\frac{x}{x^2-9}\to\infty$. Тому подамо основу у вигляді $1+f(x)$:

$$2x-5 = 1+(2x-5)-1 = 1+(2x-5-1) = 1+(2x-6) = 1+2(x-3).$$

Зауважимо, що $2(x-3)\to 0$ при $x\to 3$. Перетворимо функцію під знаком границі так, щоб можна було використати формулу (II.1'). Враховуючи формулу (3), одержимо:

$$\lim_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{x}{x^2-9}} = \lim_{x\to 3}\left[\left(1+2(x-3)\right)^{\frac{1}{2(x-3)}}\right]^{\frac{2(x-3)\cdot x}{x^2-9}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to 3}\left(1+2(x-3)\right)^{\frac{1}{2(x-3)}}\right]^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x}{x+3}} = e^{\frac{2\cdot 3}{3+3}} = e^{1} = e\,. \quad ⌋$$