Загальне дослідження функцій

Загальне дослідження функцій доцільно виконувати за наступною ***схемою.***

1. Знаходимо область визначення функції і з'ясовуємо, чи має графік точки перетину з координатними осями. Досліджуємо функцію на парність та непарність.

2. Досліджуємо графік функції на наявність асимптот.

3. Знаходимо похідну 1-го порядку і критичні точки 1-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак y' на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 1-го роду.

4. Знаходимо похідну 2-го порядку і критичні точки 2-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак y'' на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 2-го роду.

5. Критичні точки 1-го та 2-го роду вказуємо на координатній прямій. В результаті область визначення буде розбита на інтервали. Будуємо таблицю, в якій у першому рядку записуємо ці інтервали та критичні точки.

Інтервали та критичні точки (x)	
y'	
y''	
y	

а) Використовуючи y' з'ясовуємо, на яких інтервалах функція зростає або спадає, та досліджуємо критичні точки 1-го роду на екстремуми.

б) Використовуючи y'', досліджуємо на інтервалах графік функції на опуклість та угнутість.

Результати досліджень в пунктах а) і б) заносимо до останнього рядка таблиці. Обчислюємо значення функції в точках екстремуму і знаходимо точки перегину.

6. Будуємо графік функції.

<u>Приклад 1.</u> Виконати загальне дослідження функції $y = 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ а) Область визначення функції – $D = (-\infty; +\infty)$.

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю Oy обчислимо значення функції у точці $x = 0$:

$$y(0) = 2 \cdot 0 - \frac{3}{4} \cdot 0^2 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Oy у точці $y = 0$, тобто проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю Ox слід розв'язати рівняння $y(x) = 0$:

$$2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 = 0, \quad x\left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2\right) = 0, \text{ звідки}$$

$$x = 0 \text{ або } 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 = 0.$$

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{273}}{4} \approx -6,4; \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{273}}{4} \approx 1,9.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точках $x_1 \approx -6,4$, $x_2 \approx 1,9$ та у точці $x = 0$ (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x)$.

$\boxed{2}$ Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Рівняння *похилих асимптот*

$$y = kx + b\,, \tag{1}$$

де

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x}\,, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} \big(y(x) - kx \big)\,, \tag{2}$$

якщо границі існують і скінченні.

Оскільки для заданої функції

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 \right) = \infty\,,$$

то похилих асимптот графік функції не має.

б) Пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y(x)$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = \infty\,. \tag{3}$$

Оскільки функція елементарна і областю визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

$\boxed{3}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right)' = 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\,.$$

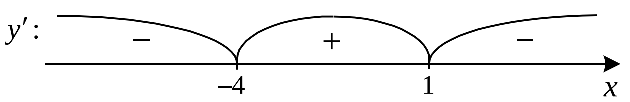
Критичні точки 1-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y' = 0$; б) y' не існує.

а) $y' = 0$: $\quad 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = 0$, або $\quad x^2 + 3x - 4 = 0$, звідки $x = -4$ та $x = 1$.

б) y' не існує: таких точок немає, оскільки похідна визначена при будь-якому $x \in D$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -4$, $x = 1$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах:



(наприклад, $y'(-6) = -25 < 0$, $y'(0) = 2 > 0$, $y'(2) = -3 < 0$).

$\boxed{4}$ Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right)' = -\frac{3}{2} - x\,.$$

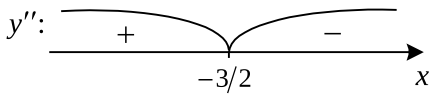
Критичні точки 2-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y'' = 0$; б) y'' не існує.

а) $y'' = 0$: $-\frac{3}{2} - x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$.

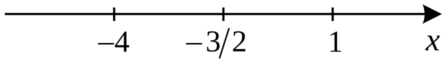
б) y'' не існує: таких точок немає.

Отже, маємо одну критичну точку 2-го роду $x=-\dfrac{3}{2}$.

Вказуємо критичну точку на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо чотири інтервали: $(-\infty;-4)$, $(-4;-1{,}5)$, $(-1{,}5;\ 1)$, $(1;+\infty)$.

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають y' та y'', використовуємо результати досліджень у пунктах $\boxed{3}$ та $\boxed{4}$.

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;-1{,}5)$	$-1{,}5$	$(-1{,}5;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	–	0	+		+	0	–
y''	+		+	0	–		–
y	↘ $\cup$	min $y(-4)=$ $=-9\frac{1}{3}$	↗ $\cup$	т. п. $y(-1{,}5)=$ $=-4\frac{1}{8}$	↗ $\cap$	max $y(1)=1\frac{1}{12}$	↘ $\cap$

Позначення:

↘ – функція спадає;

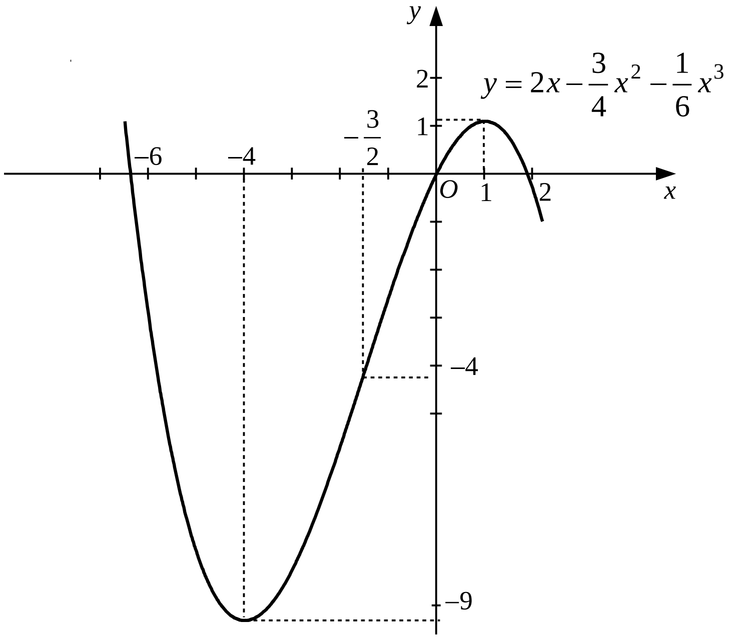
↗ – функція зростає;

$\bigcup$ – графік угнутий;

$\bigcap$ – графік опуклий;

т.п. – точка перегину графіка.

$\boxed{6}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$.



Приклад 2. Виконати загальне дослідження функції $y = \frac{x^4}{x^3+1} - \frac{1}{2}$.

$\boxed{1}$ а) Область визначення функції – $D = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

б) Графік перетинає вісь Oy у точці $y = -0,5$.

в) Знайдемо точки перетину графіка з віссю Ox :

$$\frac{x^4}{x^3+1} - \frac{1}{2} = 0, \quad \frac{2x^4 - x^3 - 1}{2(x^3+1)} = 0.$$

Звідси маємо рівняння $2x^4 - x^3 - 1 = 0$. Розклавши ліву частину на множники

$$2x^4 - x^3 - 1 = (x^4 - x^3) + (x^4 - 1) = x^3(x-1) + (x-1)(x+1)(x^2+1) =$$

$$= (x-1)(2x^3 + x^2 + x + 1),$$

знаходимо корінь $x = 1$. Можна показати, скориставшись графічним методом, що кубічне рівняння $2x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ має один дійсний корінь, який лежить на інтервалі $(-1; 0)$. Але оскільки знаходження коренів кубічного рівняння пов'язане з використанням громіздких формул, то обмежимось вказівкою однієї точки перетину графіка функції з віссю Oy – $x = 1$.

г) Функція ні парна, ні непарна.

$\boxed{2}$ Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Похилі асимптоти знаходимо за формулами (1), (2):

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^4}{x^3+1} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^3+1} - \frac{1}{2x} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^3}} - \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2x} =$$

$$= \frac{1}{1+0} - 0 = 1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x\left(x^3+1\right)}{x^3+1}-\frac{1}{2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x^3+1}-\frac{1}{2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^3}}-\frac{1}{2}=\frac{0}{0+1}-\frac{1}{2}=-0,5\,;$$

підставляємо k та b у формулу (1): $y=1\cdot x+\left(-0,5\right)=x-0,5$.

Отже, графік функції має похилу асимптоту $y=x-0,5$ при $x\to\pm\infty$.

б) Оскільки точка $x_0=-1$ не належить області визначення D заданої функції, то її графік може мати вертикальну асимптоту. Для цього розглянемо співвідношення (3): оскільки $\lim\limits_{x\to-1}\left(x^3+1\right)=0$, а $\lim\limits_{x\to-1}x^4=1\neq 0$, то

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}\right)=\infty\,.$$

Звідси випливає, що пряма $x=-1$ є вертикальною асимптотою.

$\boxed{3}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y'=\left(\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}\right)'=\left(\frac{x^4}{x^3+1}\right)'-\left(\frac{1}{2}\right)'=\frac{\left(x^4\right)'\left(x^3+1\right)-x^4\left(x^3+1\right)'}{\left(x^3+1\right)^2}-0=$$

$$=\frac{4x^3\left(x^3+1\right)-x^4\cdot 3x^2}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{x^6+4x^3}{\left(x^3+1\right)^2}\,.$$

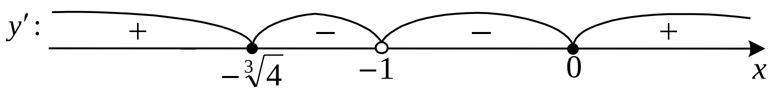
Критичні точки 1-го роду:

а) $y'=0$: $\dfrac{x^6+4x^3}{\left(x^3+1\right)^2}=0$, $x^3\left(x^3+4\right)=0$, звідки $x=0$, $x=-\sqrt[3]{4}$;

б) y' не існує: $\varnothing$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x=-\sqrt[3]{4}\approx-1{,}59$ та $x=0$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах (точка $x=-1$ виколота, оскільки не належить області визначення функції):



(наприклад, $y'(-2)=\dfrac{32}{49}>0$, $y'\left(-\sqrt[3]{2}\right)=-4<0$, $y'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{31}{49}<0$, $y'\left(1\right)=1>0$).

$\boxed{4}$ Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y''=\left(\frac{x^6+4x^3}{(x^3+1)^2}\right)'=\frac{\left(x^6+4x^3\right)'\left(x^3+1\right)^2-\left(x^6+4x^3\right)\left(\left(x^3+1\right)^2\right)'}{\left(\left(x^3+1\right)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(6x^5+12x^2\right)\left(x^3+1\right)^2-\left(x^6+4x^3\right)\left(x^3+1\right)3x^2}{\left(x^3+1\right)^4}=$$

$$=\frac{6x^2\left(x^3+1\right)\left[\left(x^3+2\right)\left(x^3+1\right)-\left(x^6+4x^3\right)\right]}{\left(x^3+1\right)^4}=$$

$$=\frac{6x^2\left(x^6+3x^3+2-x^6-4x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3}=\frac{6x^2\left(2-x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3}.$$

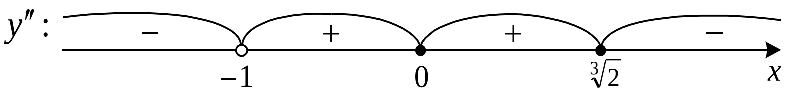
Критичні точки 2-го роду:

а) $y''=0$: $\dfrac{6x^2\left(2-x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3}=0$, $x^2\left(2-x^3\right)=0$, звідки $x=0$, $x=\sqrt[3]{2}$;

б) y'' не існує: $\varnothing$.

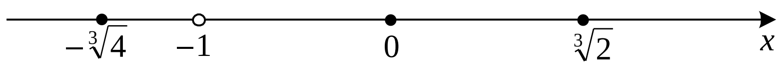
Отже, маємо дві критичні точки 2-го роду $x=0$ та $x=\sqrt[3]{2}\approx 1,26$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



(взяли, наприклад, на відповідних інтервалах точки -2, $-\frac{1}{2}$, 1, 2).

$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:

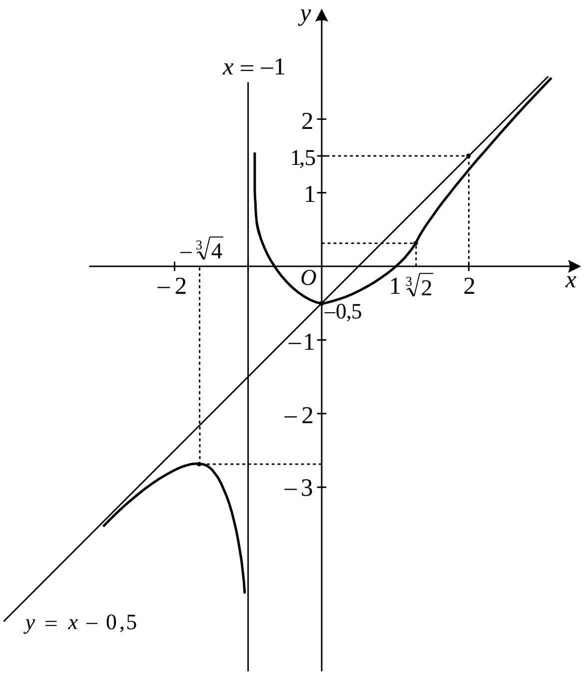


Отже, маємо п'ять інтервалів: $\left(-\infty,-\sqrt[3]{4}\right)$, $\left(-\sqrt[3]{4},-1\right)$, $\left(-1,0\right)$, $\left(0,\sqrt[3]{2}\right)$, $\left(\sqrt[3]{2},+\infty\right)$.

Заповнимо таблицю.

x	$\left(-\infty;-\sqrt[3]{4}\right)$	$-\sqrt[3]{4}$	$\left(-\sqrt[3]{4};-1\right)$	$\left(-1;0\right)$	0	$\left(0;\sqrt[3]{2}\right)$	$\sqrt[3]{2}$	$\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$
y'	+	0	−	−	0	+		+
y''	−		−	+	0	+	0	−
y	$\nearrow\ \cap$	max $y(-\sqrt[3]{4})\approx$ $\approx -2,62$	$\searrow\ \cap$	$\searrow\ \cup$	min $y(0)=-0,5$	$\nearrow\ \cup$	т.п. $y(\sqrt[3]{2})\approx$ $\approx 0,34$	$\nearrow\ \cap$

$\boxed{6}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$.



Приклад 3. Виконати загальне дослідження функції $y = \sqrt[3]{x^2}\, e^{\frac{2x}{3}}$.

$\boxed{1}$ а) Область визначення функції – $D = (-\infty; +\infty)$.

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю Oy обчислимо значення функції у точці $x = 0$:

$$y(0) = \sqrt[3]{0^2} \cdot e^{\frac{2\cdot 0}{3}} = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Oy у точці $y = 0$, тобто проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю Ox Слід розв’язати рівняння $y(x) = 0$:

$$\sqrt[3]{x^2}\, e^{\frac{2x}{3}} = 0 \text{ або } \sqrt[3]{x^2} = 0. \text{ Звідси } x = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точці $x = 0$ (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x)$.

$\boxed{2}$ Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) для знаходження похилих асимптот розглянемо окремо два випадки: $x \to -\infty$ та $x \to +\infty$:

Якщо $x \to +\infty$, маємо за формулами (2):

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}\, e^{\frac{2x}{3}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2x}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(e^{\frac{2x}{3}}\right)'}{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{3} e^{\frac{2x}{3}}}{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to\infty} 2x^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2x}{3}} = \infty.$$

отже, похилих асимптот при $x \to +\infty$ графік функції не має.

Якщо $x \to -\infty$, маємо

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}\,e^{\frac{2x}{3}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{2x}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{2x}{3}}}=0.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^2}e^{\frac{2x}{3}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^{-\frac{2x}{3}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'}{\left(e^{-\frac{2x}{3}}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{-2}{3}e^{-\frac{2x}{3}}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{2x}{3}}}=0\,.$$

Отже, за формулою (1) при $x\to-\infty$ похилою асимптотою є пряма $y=0$.

б) Оскільки функція елементарна і областю визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

3 Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y'=\left(\sqrt[3]{x^2}e^{\frac{2x}{3}}\right)'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\cdot e^{\frac{2x}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}e^{\frac{2x}{3}}=\frac{2e^{\frac{2x}{3}}\left(1+x\right)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

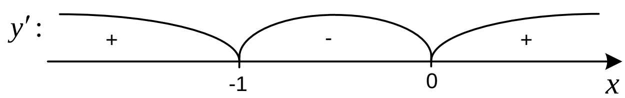
Критичні точки 1-го роду:

а) $y'=0$: $2e^{\frac{2x}{3}}\left(1+x\right)=0$, або $1+x=0$, звідки $x=-1$.

б) y' не існує: $\sqrt[3]{x}=0$, звідки $x=0$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x=-1$, $x=0$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах:



(наприклад, $y'(-6)\approx 0{,}03>0$, $y'(-0{,}5)\approx -0{,}3<0$, $y'(2)\approx 6{,}02>0$).

4 Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y''=\left(\frac{2e^{\frac{2x}{3}}\left(1+x\right)}{3\sqrt[3]{x}}\right)'=\frac{e^{\frac{2x}{3}}\left(4x^2+8x-2\right)}{9\sqrt[3]{x^4}}.$$

Критичні точки 2-го роду:

а) $y''=0$: $4x^2+8x-2=0$.

Корені квадратного рівняння:

$$x_1=\frac{-8-\sqrt{96}}{8}=-\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right);\qquad x_2=\frac{-8+\sqrt{96}}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{6}-1.$$

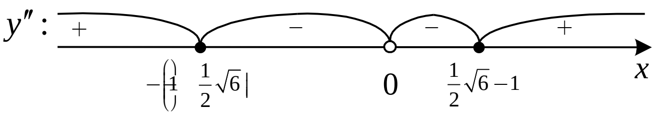
б) y'' не існує: $\sqrt[3]{x^4}=0$, звідки $x=0$.

Отже, маємо три критичних точки 2-го роду

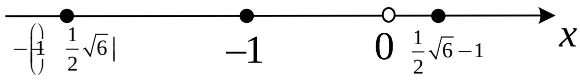
$$x_1 = \frac{-8-\sqrt{96}}{8} = -\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) \approx -2,2;, \quad x_2 = 0\,,$$

$$x_3 = \frac{-8+\sqrt{96}}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1 \approx 0,2.$$

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо п'ять інтервалів: $\left(-\infty; -1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$, $\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}; -1\right)$, $(-1;\ 0)$, $\left(0; \frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1; +\infty\right)$.

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають y' та y'', використовуємо результати досліджень у пунктах $\boxed{3}$ та $\boxed{4}$.

x	$\left(-\infty; -1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$	$-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}$	$\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}; -1\right)$	-1
y'	+		+	0
y''	+	0	-	
y	↘ ∪	т.п. $y\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) \approx 0,4$	↗ ∩	max $y(-1) \approx 0,5$

Продовження таблиці

$(-1;0)$		0	$\left(0; \frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{6}-1$	$\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1; +\infty\right)$
-		не	+		+
-		не	–	0	+
↘ ∩		min $y(0) = 0$	↗ ∩	т.п. $y\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right) \approx 0,4$	↗ ∪

$\boxed{6}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$.