

Лекція 2

Схема розробки цифрових фільтрів

1. Введення в цифрові фільтри

По суті, фільтр – це система або мережа, яка вибірково змінює форму сигналу (амплітудно-частотну або фазово-частотну характеристику). Основними цілями фільтрації є покращення якості сигналу (наприклад, усунення або зниження перешкод), вилучення з сигналів інформації або поділ кількох сигналів, об'єднаних раніше для, наприклад, ефективного використання доступного каналу зв'язку.

Цифровий фільтр – це математичний алгоритм, реалізований на апаратному та/або програмному рівні, який із заданою метою діє на вхідний і генерує вихідний цифровий сигнал. Терміном “цифровий фільтр” позначають певну апаратну або програмну процедуру, реалізацію алгоритму фільтрації. У цифрових фільтрах часто використовуються оцифровані аналогові сигнали або числа, які просто зберігаються в пам'яті комп'ютера і представляють деякі змінні.

Спрощена блок-схема цифрового фільтра реального часу з аналоговим входом та виходом наведена на рис. 1.



Рис. 1. Спрощена блок-схема цифрового фільтра реального часу з аналоговим вхідним та вихідним сигналами

Вузькосмуговий аналоговий сигнал періодично вибирається і конвертується в набір цифрових вибірок, $x(n)$, $n = 0, 1, \dots$. Цифровий процесор виконує фільтрацію, відображаючи вхідну послідовність $x(n)$ у вихідну $y(n)$ згідно з обчислювальним алгоритмом фільтра. ЦАП конвертує відфільтрований цифровим чином вихід в аналогові значення, які потім проходять аналогову фільтрацію для згладжування та усунення небажаних високочастотних компонентів.

Важливу роль цифровій обробці сигналів грають цифрові фільтри. У порівнянні з аналоговими фільтрами вони переважні в безлічі областей (наприклад, стиснення даних, біомедична обробка сигналів, обробка мови, обробка зображень, передача даних, цифрове аудіо, телефонне ехопридушення), так як мають ряд переваг.

- Цифрові фільтри можуть мати характеристики, які неможливо отримати на аналогових фільтрах, наприклад, дійсно лінійну фазову характеристику.
- На відміну від аналогових, продуктивність цифрових фільтрів не залежить від змін середовища, наприклад, коливань температури. Таким чином, цифрові фільтри не вимагають періодичного калібрування.
- Якщо фільтр побудований за допомогою програмованого процесора, його частотна характеристика може налаштовуватися автоматично (тому такі процесори широко застосовуються в адаптивних фільтрах).
- Один цифровий фільтр може обробляти кілька вхідних сигналів або каналів без дублювання апаратних блоків.
- Як фільтровані, так і нефільтровані дані можна зберегти для подальшого використання.
- Можна легко використовувати досягнення в галузі технологій НВІС і отримувати невеликі цифрові фільтри зі зниженою споживаною потужністю та нижчою ціною.
- На практиці точність, якої можна досягти при використанні аналогових фільтрів, обмежена; наприклад, загасання у смузі придушення не можна підняти вище 60-70 дБ (якщо використовувати стандартні аналогові компоненти). Точність цифрових фільтрів обмежена лише довжиною слова, що використовується.
- Продуктивність цифрових фільтрів однакова для всіх пристроїв серії.
- Цифрові фільтри можуть використовуватися за дуже низьких частот, характерних, наприклад, для багатьох біомедичних додатків, де застосовувати аналогові фільтри непрактично. Крім того, цифрові фільтри можуть використовуватися в великому діапазоні частот, для чого досить просто змінювати частоту дискретизації. Втім, у порівнянні з аналоговими цифрові фільтри мають і низку недоліків.
- *Обмеження швидкості.* Максимальна ширина смуги сигналів, які в реальному часі здатні обробити цифрові фільтри, значно вужча, ніж у аналогових фільтрів. У додатках реального часу процес перетворення "аналоговий-аналоговий" вводить обмеження по швидкості на продуктивність цифрового фільтра. Найвищу частоту дискретизації, з якою може працювати фільтр, обмежує час конвертації АЦП і час встановлення сигналу ЦАП. Крім того, швидкість роботи цифрового фільтра залежить від швидкості роботи використовуваного цифрового процесора і числа арифметичних операцій, які слід виконати в алгоритмі фільтрації, і підвищується, коли характеристика фільтра стає більш стислою.
- *Вплив кінцевої розрядності.* Цифрові фільтри схильні до шуму АЦП, що походить від квантування безперервного сигналу, і шуму округлення, який вводиться при обчисленнях. При використанні рекурсивних фільтрів високих

порядків накопичення шуму округлення може призвести до нестійкості фільтра.

– Значний час розробки та впровадження. Розробка та використання цифрових фільтрів, особливо використання апаратного забезпечення, можуть виконуватися набагато довше, ніж подібні процедури для аналогових фільтрів. У той же час, одного разу розроблене апаратне та/або програмне забезпечення може використовуватися в інших задачах цифрової обробки сигналів з незначною модифікацією або взагалі без змін. Якщо при проектуванні цифрових фільтрів доступна хороша комп'ютерна підтримка, це завдання буде дуже цікаво вирішувати, хоча для того, щоб ефективно та повно використовувати таку підтримку, потрібне певне вміння.

2. Типи цифрових фільтрів: КІХ- та БІХ-фільтри

Цифрові фільтри розділені на два великі класи: фільтри з нескінченною імпульсною характеристикою (БІХ-фільтри) і фільтри з кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ-фільтри). Фільтр кожного типу (у стандартній формі) можна подати через коефіцієнти його імпульсної характеристики $h(k)$ ($k = 0, 1, \dots$), як показано на рис. 2. Вхідний і вихідний сигнали фільтра пов'язані через операцію згортки, даний зв'язок наведено у формулі (1) для БІХ-фільтра і у формулі (2) для КІХ-фільтра.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (1)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \quad (2)$$

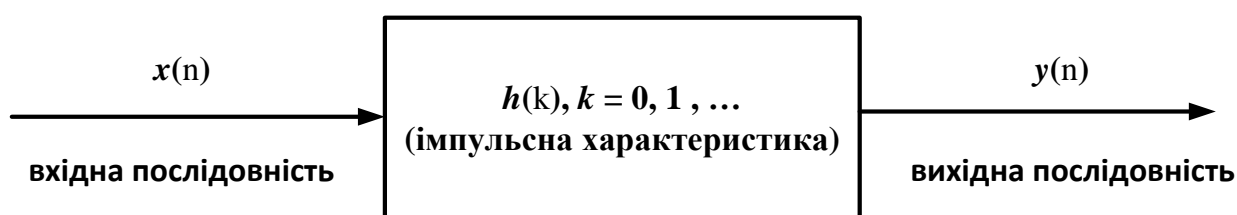


Рис. 2. Концептуальне подання цифрового фільтра

З даних рівнянь зрозуміло, що для БІХ-фільтрів імпульсна характеристика має нескінченну тривалість, тоді як для КІХ-фільтра вона кінцева, оскільки $h(k)$ для КІХ-фільтра може набувати всього N значень. Насправді обчислити вихід БІХ-фільтра з допомогою рівняння (1) неможливо, оскільки тривалість

імпульсного відгуку занадто велика (теоретично — нескінченна). Натомість рівняння БІХ-фільтрації переписується в рекурсивній формі

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) \quad (3)$$

де a_k та b_k - коефіцієнти фільтра. Таким чином, рівняння (2) і (3) - це різницеві рівняння КІХ- і БІХ-фільтрів відповідно. Дані рівняння (і зокрема значення $h(k)$ для КІХ-фільтра або a_k і b_k для БІХ-фільтра) використовуються в багатьох завданнях розробки фільтрів. В рівнянні (3) поточна вихідна вибірка $y(n)$ є функцією попередніх виходів, а також поточної та попередніх вхідних вибірок, тому БІХ-фільтр – це певною мірою система із зворотним зв'язком. Зробивши цей висновок, варто уважніше придивитися до рівняння для КІХ-фільтра, в якому поточна вихідна вибірка $y(n)$ залежить тільки від минулих та поточних вхідних значень. Якщо покласти всі b_k рівними нулю, рівняння (3) зводиться до рівняння (2).

У рівняннях (4, а і б) наведено альтернативні уявлення (через передавальні функції) КІХ- та БІХ-фільтрів відповідно, причому такі описи дуже зручні при оцінці частотних характеристик фільтрів.

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k} \quad (4,а)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \quad (4,б)$$

Фактори, що впливають на вибір з альтернатив, доступних розробнику цифрового фільтра на кожному етапі процесу проектування, значно залежать від того, до якого класу відноситься фільтр - з кінцевою або нескінченною імпульсною характеристикою. Отже, дуже важливо розрізняти ці класи, їх специфічні характеристики і, що ще важливіше, розуміти, фільтр якого типу вибрати

3. Вибір між КІХ- та БІХ-фільтрами

Вибір між КІХ- і БІХ-фільтрами залежить від відносних переваг обох типів.

1. КІХ-фільтри можуть мати строго лінійну фазову характеристику. Отже, фільтр не вводить фазового спотворення у сигнал, що важливо у багатьох сферах, наприклад, передачі даних, біомедицині, цифровій аудіо обробці або обробці зображень. Фазова характеристика БІХ-фільтрів є нелінійною, особливо на краях смуг.

2. КІХ-фільтри реалізовані нерекурсивно, тобто (що впливає безпосередньо з формули (2)) вони завжди стійкі. Гарантувати стійкість БІХ-фільтрів вдається не завжди.

3. Для реалізації фільтрів використовується обмежена кількість бітів. Практичні наслідки цього (наприклад, шум округлення та помилки квантування) значно менш суттєві для КІХ-фільтрів, ніж для БІХ-фільтрів.

4. Щоб отримати кінцеву імпульсну характеристику за допомогою фільтрів з різкими зрізами характеристики, потрібно більше коефіцієнтів, ніж для отримання нескінченної імпульсної характеристики. Отже, для реалізації запропонованої специфікації амплітудної характеристики з КІХ необхідно більше обчислювальної потужності та пам'яті, ніж для реалізації її з БІХ. Втім, ефективність КІХ-реалізацій можна значно підвищити, зігравши на обчислювальній швидкості БПФ і обробці при декількох швидкостях.

5. Аналогові фільтри легко перетворити на еквівалентні цифрові БІХ-фільтри, що задовольняють подібним специфікаціям. Для отримання КІХ-фільтрів таке перетворення неможливе, оскільки для них не існує аналогових прототипів. Втім, отримувати довільні частотні характеристики на КІХ-фільтрах легше.

6. Взагалі, синтез КІХ-фільтрів алгебраїчно складніший, якщо не використовувати комп'ютерну підтримку розробки.

7. БІХ-фільтри рекурентні. Це означає, що, пропустивши через фільтр один і той же сигнал, але з "зворотним ходом часу", ми отримаємо, взагалі кажучи, різні результати. Якщо для мови тимчасова анізотропія природна, то, наприклад, для зображення вже ні, тому БІХ-фільтри мають ряд обмежень щодо застосування. Враховуючи наведені міркування, загальний принцип вибору між КІХ та БІХ можна сформулювати у такий спосіб.

– Використовувати БІХ, якщо єдиними важливими вимогами є характеристика з різкими зрізами і висока пропускна здатність, оскільки БІХ-фільтри (особливо ті, в яких використані еліптичні характеристики) потребують визначення меншої кількості коефіцієнтів, ніж КІХ-фільтри.

– Використовувати КІХ, якщо кількість коефіцієнтів фільтрів не дуже велика і, зокрема, якщо потрібно, щоб фазове спотворення не було або було малим. Крім того, архітектури новітніх процесорів ЦОС пристосовані до КІХ-фільтрації, мало того, деякі з них спеціально розроблені для КІХ-фільтрів.

Приклад 6.1

Нижченаведені передавальні функції представляють два різних фільтри, що задовольняють ідентичним специфікаціям амплітудно-частотної характеристики.

1.

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

де

$$b_0 = 0,0981819,$$

$$b_1 = 0,9274777,$$

$$b_2 = 0,4981819,$$

$$a_1 = -0,6744878,$$

$$a_2 = -0,3633482.$$

2.

$$H(z) = \sum_{k=0}^{11} h(k) z^{-k}$$

де

$$h(0) = 0,54603280 \times 10^{-2} = h(11),$$

$$h(1) = -0,45068750 \times 10^{-1} = h(10),$$

$$h(2) = 0,69169420 \times 10^{-1} = h(9),$$

$$h(3) = -0,55384370 \times 10^{-1} = h(8),$$

$$h(4) = -0,63428410 \times 10^{-1} = h(7),$$

$$h(5) = 0,57892400 \times 10^0 = h(6).$$

Для кожного фільтра

а) визначте, чи є він КІХ- або БІХ-фільтром;

б) подайте операцію фільтрації у вигляді блок-схеми та запишіть відповідні різницеві рівняння;

в) визначте та прокоментуйте обчислювальну складність та вимоги до пам'яті.

Рішення

6.1 а. Фільтри 1 і 2 є відповідно БІХ- та КІХ-фільтром.

6.1 б. Блок-схема фільтра представлена 1 на рис. 3 а. Відповідний набір рівнянь має вигляд

$$w(n) = x(n) - a_1 w(n-1) - a_2 w(n-2),$$

$$y(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1) + b_2 w(n-2).$$

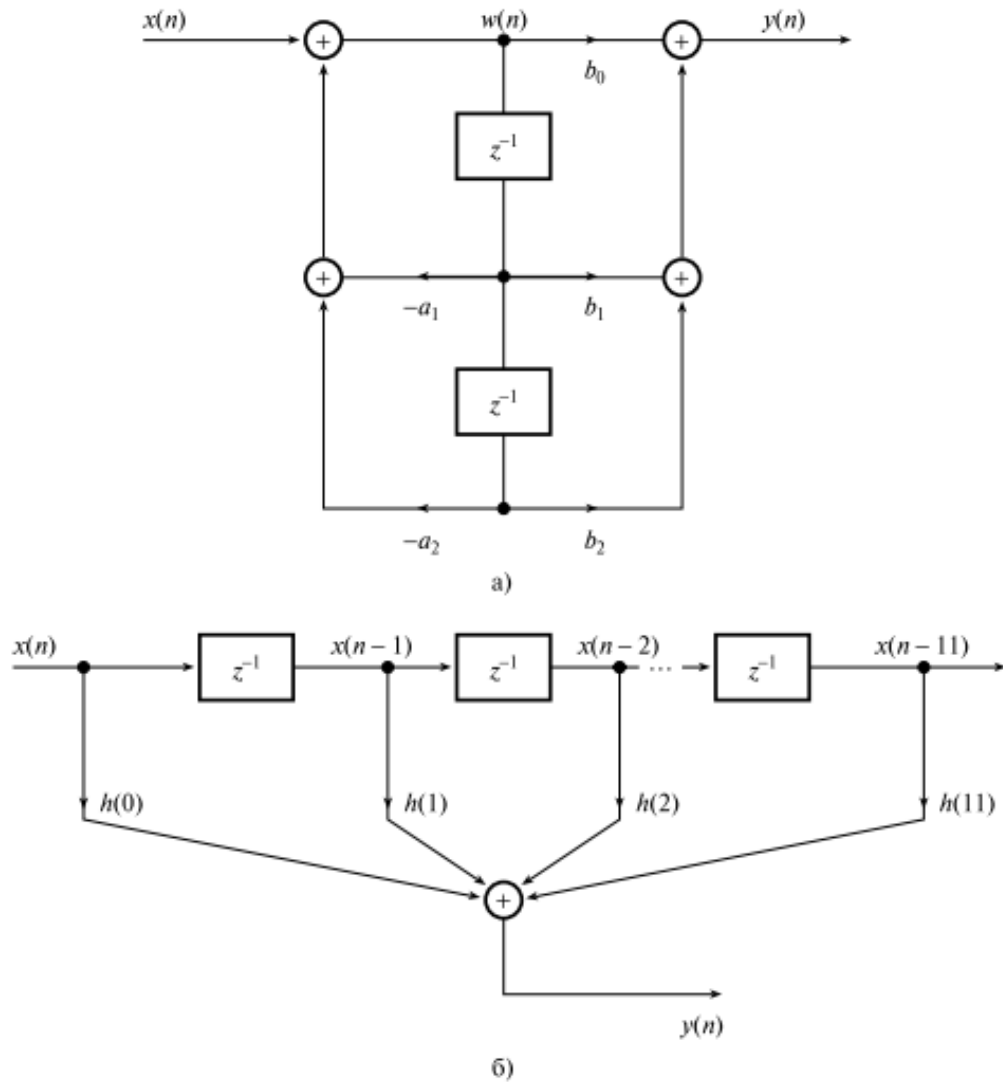


Рис. 3. Блок-схема БІХ-фільтра прикладу 1 – а; блок-схема КІХ-фільтра з прикладу 1 – б)

Блок-схема 2 фільтра представлена на рис. 6.3 б. Відповідне різницеве рівняння виглядає так:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{11} h(k)x(n - k).$$

6.1 в. Вивчаючи два різницеві рівняння, отримуємо такі вимоги до обсягу обчислень та пам'яті.

	КІХ	БІХ
Число операцій множення	12	5
Число операцій додавання	11	4
Кількість комірок пам'яті (коефіцієнти та дані)	24	8

Очевидно, що БІХ-фільтри економніші, ніж КІХ-фільтри, як з точки зору

необхідних обчислень, так і з точки зору вимог до пам'яті. Втім, можна ще додатково врахувати симетрію коефіцієнтів КІХ-фільтрів і вважати більш ефективними КІХ-фільтри (щоправда, тільки з погляду очевидної простоти реалізації). Ще один момент, який варто відзначити у зв'язку з отриманими результатами: при однакових специфікаціях амплітудної характеристики кількість коефіцієнтів КІХ-фільтра (в даному прикладі – 12) зазвичай у шість разів перевищує порядок (найвищий ступінь z у знаменнику) передавальної функції БІХ-фільтра (У цьому прикладі – 2).

4. Етапи розробки фільтра

Розробка цифрового фільтра відбувається у п'ять етапів.

1. Специфікація вимог до фільтру.
2. Обчислення відповідних коефіцієнтів фільтра.
3. Подання фільтра відповідною структурою.
4. Аналіз впливу кінцевої розрядності на продуктивність фільтра.
5. Реалізація фільтра на програмному та/або апаратному рівні.

Названі п'ять етапів який завжди незалежні; крім того, вони не завжди розташовуються у вказаному порядку. Фактично існують методи, які дозволяють об'єднати другий етап та деякі аспекти третього та четвертого. Підхід, викладений у даній лекції, - це просте покрокове керівництво, що гарантує успішну структуру. Щоб отримати ефективний фільтр, іноді доводиться проводити цей процес у кілька ітерацій, особливо, якщо специфікації не є цілком певними (як зазвичай і буває), або розробник бажає досліджувати альтернативні структури. Детальний опис названих п'яти етапів наводиться нижче.

4.1. Специфікація вимог

Специфікація вимог включає специфікації:

1) характеристик сигналів (тип джерела та одержувача сигналу, інтерфейс введення-виведення, швидкість передачі даних та ширина смуги, найвища частота, що становить практичний інтерес);

2) характеристик фільтра (бажана амплітудна та/або фазова характеристика і те, наскільки дані вимоги суворі, швидкість роботи та режими фільтрації (реальний або модельний час));

3) принципу реалізації (наприклад, як комп'ютерної програми мовою високого рівня або як системи ЦОС на базі процесора, тут же виконується вибір процесора сигналів);

4) інших вимог до структури (наприклад, вартість фільтра). Розробник може мати достатньо інформації, щоб повністю визначити фільтр на початкових етапах, але спрощення процесу розробки слід сформулювати максимальну

кількість вимог.

Хоча перелічені вище вимоги уточнюються залежно від конкретної задачі, деяким аспектам п. 2 варто приділити особливу увагу. Характеристики цифрових фільтрів часто задаються в частотній області. Для частотно-вибіркових фільтрів, таких як фільтри нижніх частот та смугові фільтри, специфікації часто формулюються у вигляді схем допусків. Приклад подібної схеми фільтра нижніх частот наведено на рис. 4. Заштриховані горизонтальні лінії позначають межі допустимих відхилень. У смузі пропускання амплітудна характеристика має пікове відхилення δ_p , а смузі придушення – максимальне відхилення δ_s .

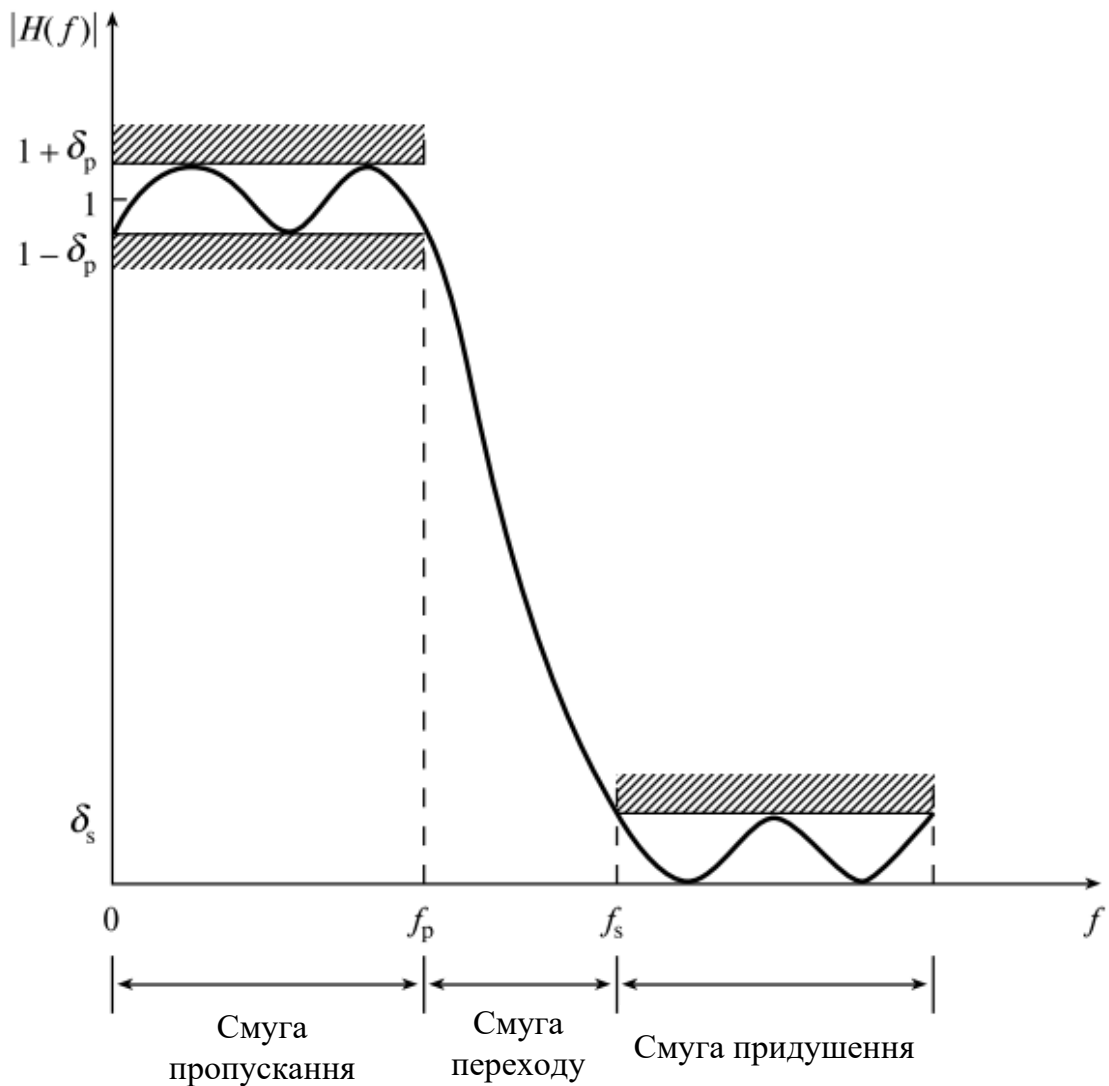


Рис. 4. Схема допусків для фільтра нижніх частот

Ширина лінії переходу визначає, наскільки різким є характеристика фільтра. У цій області амплітудна характеристика монотонно зменшується від смуги

пропускання до смуги придушення. Інтерес представляють такі ключові параметри:

δ_p - відхилення в смузі пропускання;

δ_s - відхилення в смузі придушення;

f_p - гранична частота смуги пропускання;

f_s - гранична частота смуги придушення.

Граничні частоти найчастіше представляються у нормованій формі, тобто. як частка частоти дискретизації (f/F_s), але часто більш змістовними є специфікації, у яких використовуються стандартні одиниці частоти (герці чи кілогерці). Відхилення у смузі пропускання та смузі придушення можуть виражатися як звичайні числа або децибелах, коли вони виражають нерівномірність у смузі пропускання та згасання у смузі придушення відповідно. Отже, мінімальне згасання смуги придушення A_s і максимальна нерівномірність у смузі пропускання A_p в децибелах записуються наступним чином (для КИХ-фільтрів):

$$A_s \text{ (згасання в смузі придушення)} = -20 \lg \delta_s, \quad (5,a)$$

$$A_p \text{ (нерівномірність у смузі пропускання)} = 20 \lg(1 + \delta_p). \quad (5,b)$$

При специфікації фазової характеристики цифрових фільтрів у багатьох випадках досить зазначити, що фазове спотворення істотно чи бажана лінійна фазова характеристика. У той же час, в деяких додатках, де фільтри використовуються для вирівнювання або компенсації фазової характеристики системи або як фазообертачі, фазову характеристику слід задавати.

Приклад 6.2

Потрібно спроектувати смуговий КИХ-фільтр, що відповідає наступній специфікації частотної характеристики:

смуга пропускання	0,18-0,33 (нормована);
ширина смуги переходу	0,04 (нормована);
відхилення у смузі придушення	0,001;
відхилення у смузі пропускання	0,05.

1. Сформуйте схему допусків цього фільтра.

2. Виразіть граничні частоти смуги пропускання фільтра у стандартних одиницях (кілогерці), припускаючи, що частота дискретизації дорівнює 10 кГц, а відхилення у смузі придушення та смузі пропускання виражено в децибелах.

Рішення

1. Схема допусків фільтра подано на рис. 6.5.

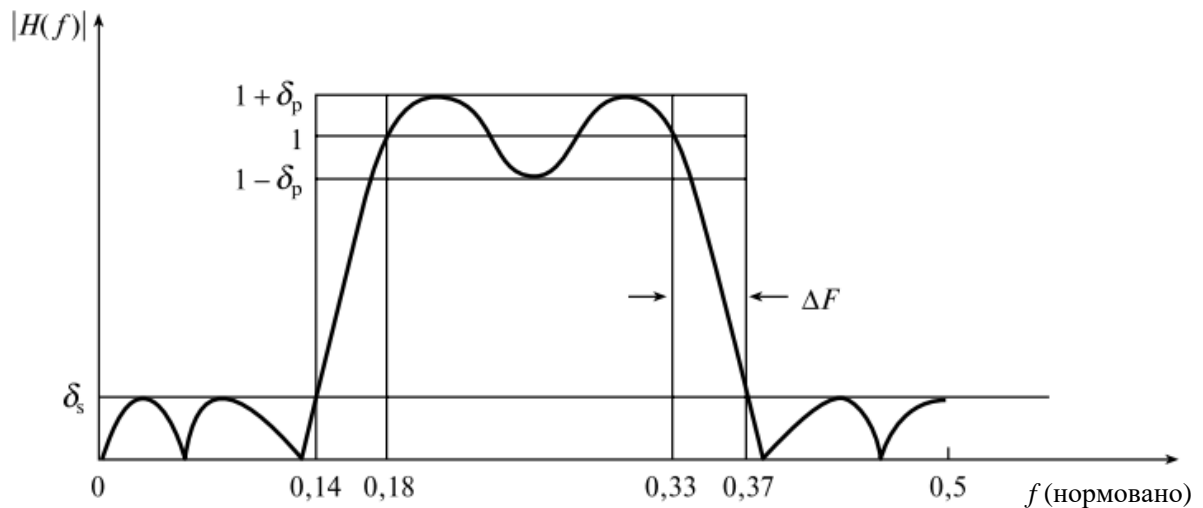


Рис. 6.5. Схема допусків смугового фільтра з прикладу 6.2

2. Граничні частоти смуги пропускання при частоті дискретизації 10 кГц і відхилення в смузі придушення та смузі пропускання представлені нижче.

Смуга пропускання	1,8-3,3 кГц.
Смуга придушення	0-1,4 кГц та 3,7-5 кГц.
Згасання в смузі придушення	- 20 lg (0,001) = 60 дБ.
Нерівномірність у смузі пропускання	- 20 lg (1 + 0,05) = 0,42 дБ.

4.2. Розрахунок коефіцієнтів

На цьому етапі вибирається один з методів апроксимації і обчислюються значення коефіцієнтів $h(k)$ (для КІХ-фільтра) або a_k і b_k (для БІХ-фільтра), за яких задовольняються умови, принципи визначення яких представлені у п. 4.1. Метод обчислення коефіцієнтів фільтра залежить від цього, до якого класу належить фільтр – КІХ або БІХ.

Обчислення коефіцієнтів БІХ-фільтра традиційно ґрунтується на перетворенні характеристик відомих аналогових фільтрів у характеристики еквівалентних цифрових. При цьому використовуються два основні підходи: метод інваріантного перетворення імпульсної характеристики і метод білінійного перетворення. При використанні методу інваріантного перетворення імпульсної характеристики після оцифрування аналогового фільтра зберігається імпульсна характеристика початкового аналогового фільтра, але не зберігається амплітудно-частотна характеристика. Внаслідок внутрішнього накладання цей метод не підходить для фільтрів верхніх частот або режекторних фільтрів. Білінійний метод, з іншого боку, забезпечує дуже ефективні фільтри і добре підходить для обчислення коефіцієнтів частотно-вибіркових фільтрів. В результаті можна створювати цифрові фільтри з відомими класичними характеристиками, такими як фільтри Баттерворта, Чебишева або еліптичні. Цифрові фільтри, отримані методом білінійного

перетворення, будуть, у загальному випадку, мати таку ж амплітудну характеристику, як і аналогові, але інші властивості у часовій області. У даний час доступні ефективні комп'ютерні програми обчислення коефіцієнтів фільтрів, в яких використовується білінійний метод, і в яких потрібно лише задати потрібні параметри фільтра. Метод інваріантного перетворення імпульсної характеристики хороший при моделюванні аналогових систем, але для частотно-вибіркових БІХ-фільтрів краще використовувати білінійний метод.

В якості альтернативної схеми обчислення коефіцієнтів БІХ-фільтрів застосовується ще метод розміщення нулів і полюсів - простий шлях обчислення коефіцієнтів дуже простих фільтрів. У той же час, для фільтрів з хорошою амплітудною характеристикою даний метод використовувати не рекомендується, оскільки в ньому фігурує перебір положень нулів і полюсів.

Коефіцієнти КІХ-фільтрів також можна обчислити кількома різними способами. Є три методи: вирізання (зважування), частотної вибірки та оптимальний (алгоритм Паркса-Мак-Кліллана (Parks-McClellan)). Метод зважування надає дуже простий і гнучкий спосіб очищення коефіцієнтів КІХ-фільтра, але не дозволяє розробнику адекватно управляти параметрами фільтра. Найпривабливішою рисою методу частотної вибірки є те, що він допускає рекурсивну реалізацію КІХ-фільтрів, що може бути обчислювально вигідно. У той же час, цьому методу бракує гнучкості в плані керування або завдання параметрів фільтрів. В даний час у промисловості широко використовується оптимальний метод ((у сукупності з доповнювальною його ефективною та простою у використанні програмою), який в більшості випадків дає необхідний КІХ-фільтр. Отже, при проектуванні таких фільтрів спочатку варто випробувати оптимальний метод, якщо конкретний додаток не передбачає використання іншого методу.

Підсумуємо: існує кілька методів обчислення коефіцієнтів фільтрів, найбільш використовуваних з них перераховані нижче.

- Метод інваріантного перетворення імпульсної характеристики (БІХ).
- Білінійне перетворення (БІХ).
- Розміщення нулів та полюсів (БІХ).
- Метод зважування (КІХ).
- Частотна вибірка (КІХ).
- Оптимізаційні методи (КІХ).

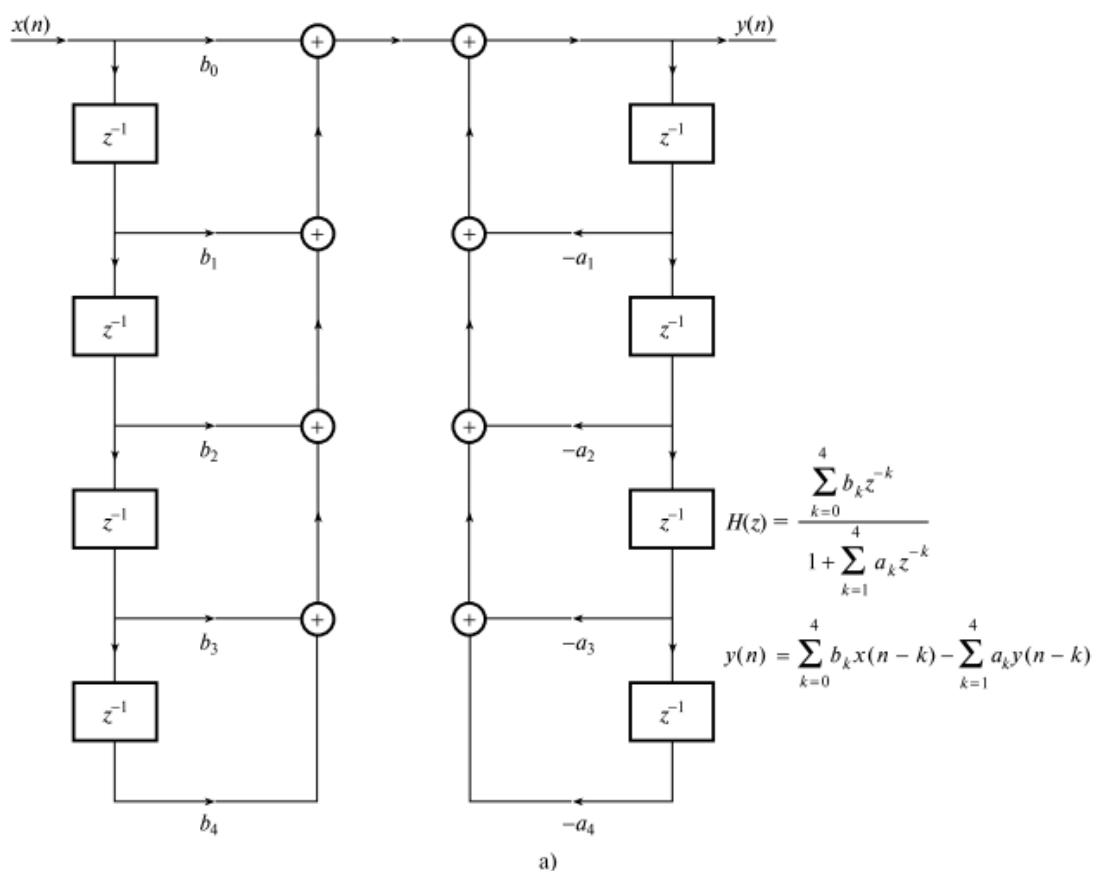
На вибір методу, що найбільше підходить для конкретного завдання, впливають кілька факторів, зокрема, критичні вимоги в специфікаціях. Взагалі, основним є вибір між КІХ та БІХ. Якщо наявність кінцевої імпульсної характеристики суттєво, то варто використовувати оптимальний метод, якщо ж

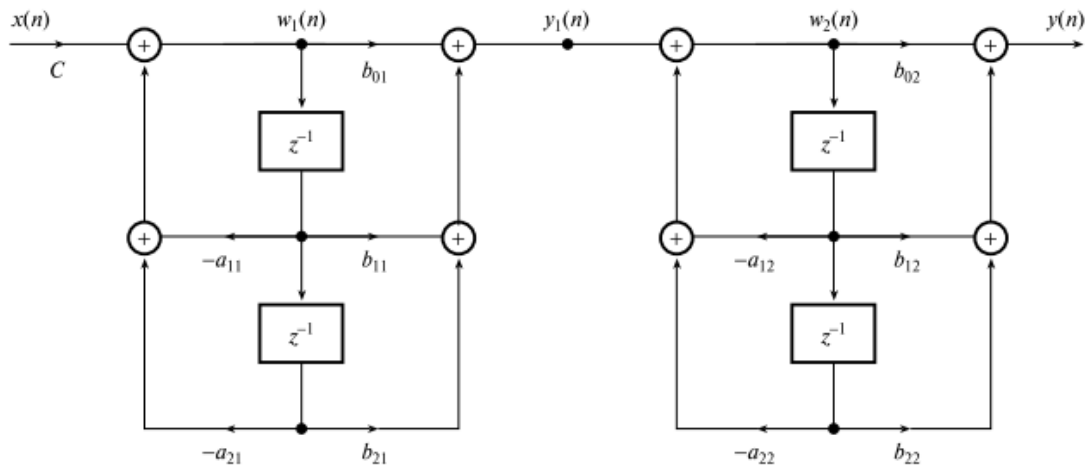
бажана нескінченна імпульсна характеристика, то в більшості випадків буде достатньо білінійного методу.

4.3. Подання фільтра відповідною структурою

Даний етап включає перетворення даної передавальної функції $H(z)$ у відповідну фільтруючу структуру. Для відображення структури фільтра часто використовуються блок-схеми або функціональні схеми, на яких для полегшення реалізації цифрового фільтра показується перебіг обчислень. Структура, що використовується, залежить від вибору КІХ- або БІХ-фільтра.

Для БІХ-фільтрів широко використовуються три структури - пряма, каскадна та паралельна форми. Пряма форма - це безпосереднє представлення передавальної функції БІХ-фільтра. У каскадній формі передавальна функція БІХ-фільтра (формула (4, б)) факторизується і виражається як добуток ланок другого порядку. У паралельній формі $H(z)$ розкладається (з використанням елементарних дробів) у суму ланок другого порядку. Як ілюстрації (і навіть для порівняння) на рис. 6 наведено блок-схему БІХ-фільтра четвертого порядку, представленого в прямій, каскадній та паралельній формах. На рисунку також вказано відповідний набір передавальних функцій та різницевих рівнянь, що описують структуру фільтра.

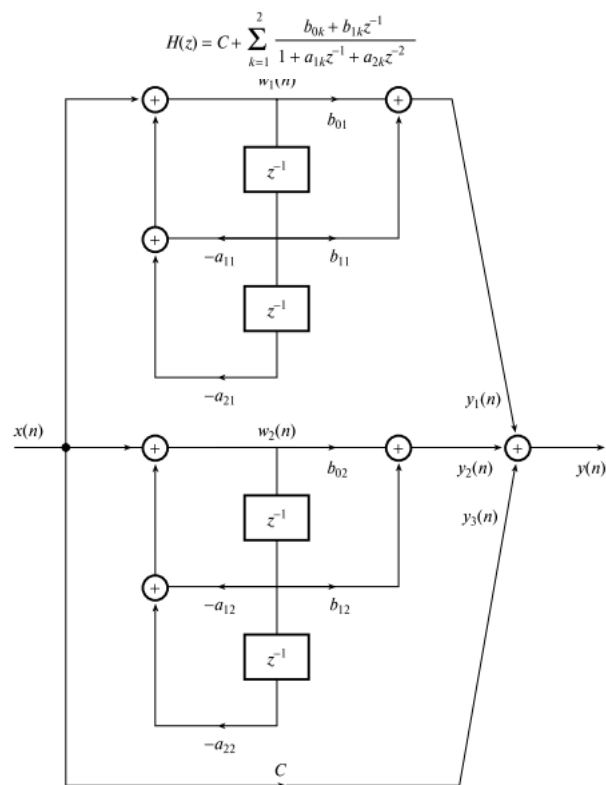




$$H(z) = C \prod_{k=1}^2 \frac{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}$$

$$\begin{aligned} w_1(n) &= Cx(n) - a_{11}w_1(n-1) - a_{21}w_1(n-2) \\ y_1(n) &= b_{01}w_1(n) + b_{11}w_1(n-1) + b_{21}w_1(n-2) \\ w_2(n) &= y_1(n) - a_{12}w_2(n-1) - a_{22}w_2(n-2) \\ y(n) &= b_{02}w_2(n) + b_{12}w_2(n-1) + b_{22}w_2(n-2) \end{aligned}$$

б)



$$\begin{aligned} H(z) &= C + \sum_{k=1}^2 \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \\ w_1(n) &= x(n) - a_{11}w_1(n-1) - a_{21}w_1(n-2) \\ w_2(n) &= x(n) - a_{12}w_2(n-1) - a_{22}w_2(n-2) \\ y_1(n) &= b_{01}w_1(n) + b_{11}w_1(n-1) \\ y_2(n) &= b_{02}w_2(n) + b_{12}w_2(n-1) \\ y_3(n) &= Cx(n) \\ y(n) &= y_1(n) + y_2(n) + y_3(n) \end{aligned}$$

в)

Рис. 6. Пряма реалізація БІХ-фільтра четвертого порядку (а). Каскадна реалізація БІХ- фільтр четвертого порядку (б). Паралельна реалізація БІХ-фільтра четвертого порядку (в)

При розробці БІХ-фільтрів найбільш широко використовуються паралельна і каскадна структури, оскільки вони надають простіші алгоритми фільтрації і менш чутливі до ефектів реалізації з використанням кінцевого числа бітів, ніж фільтри з прямою структурою. Останні в подібних випадках дуже вразливі, тому їх слід уникати за всяку ціну.

Для КІХ-фільтрів, навпаки, найбільш використовуваною є пряма структура (рис. 7, а), оскільки її простіше всього реалізувати. У такій формі КІХ-фільтр іноді називається лінією затримки з відводами (tapped delay line) або трансверсальним фільтром. Крім того, ще використовуються дві інші структури: структура частотної вибірки та схема швидкої згортки (рис. 7, б, в). У порівнянні з трансверсальною структурою, реалізація за схемою частотної вибірки може бути обчислювально більш ефективною, оскільки вона вимагає розрахунку меншого числа коефіцієнтів. Однак її буває не так просто реалізувати, і вона може вимагати більше пам'яті. При швидкій згортці використовуються обчислювальні переваги швидкого перетворення Фур'є (БПФ), і вона особливо приваблива у ситуаціях, коли додатково потрібно обчислити спектр сигналу.

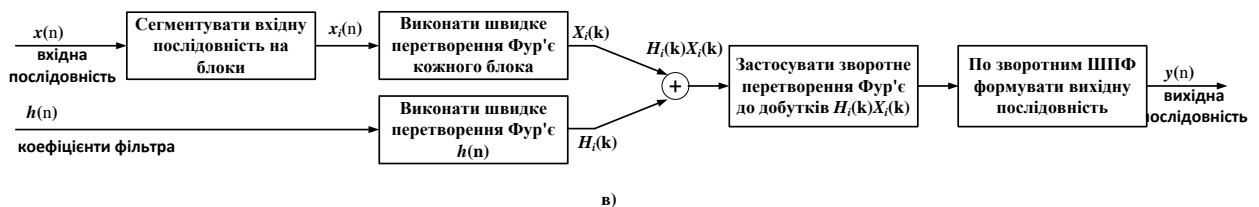
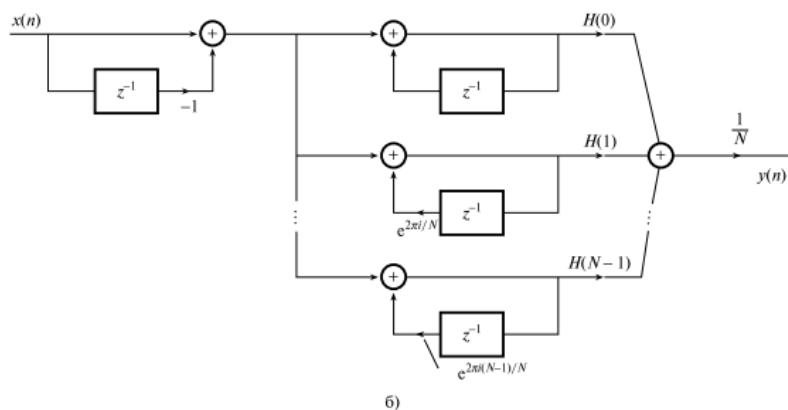
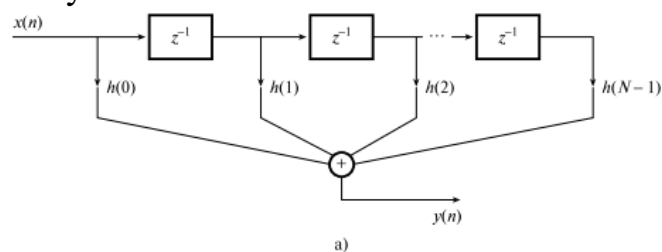


Рис. 7. Структури реалізації КІХ-фільтрів: а) трансверсальний фільтр (пряма структура); б) реалізація частотної вибірки; в) схема швидкої згортки

Існує безліч інших практичних структур цифрових фільтрів, але більшість з них популярні тільки в певних сферах. Приклад - гратчаста структура, яка використовується у сферах обробки мовлення та лінійного передбачення. Гратчаста структура може використовуватися для подання як КІХ-, так і БІХ-фільтрів, і в стандартній формі вона характеризується єдиним входом та парою виходів, як показано на рис. 8 а. Виведена з неї гратчаста структура, що описує N-точковий КІХ-фільтр, показана на рис. 8 б, а структура, призначена для БІХ-фільтра другого порядку з усіма заданими полюсами (тобто такого, для якого вказані тільки коефіцієнти знаменника), представлена на рис. 8, в. Більш детально гратчаста структура описана у прикладі 5.

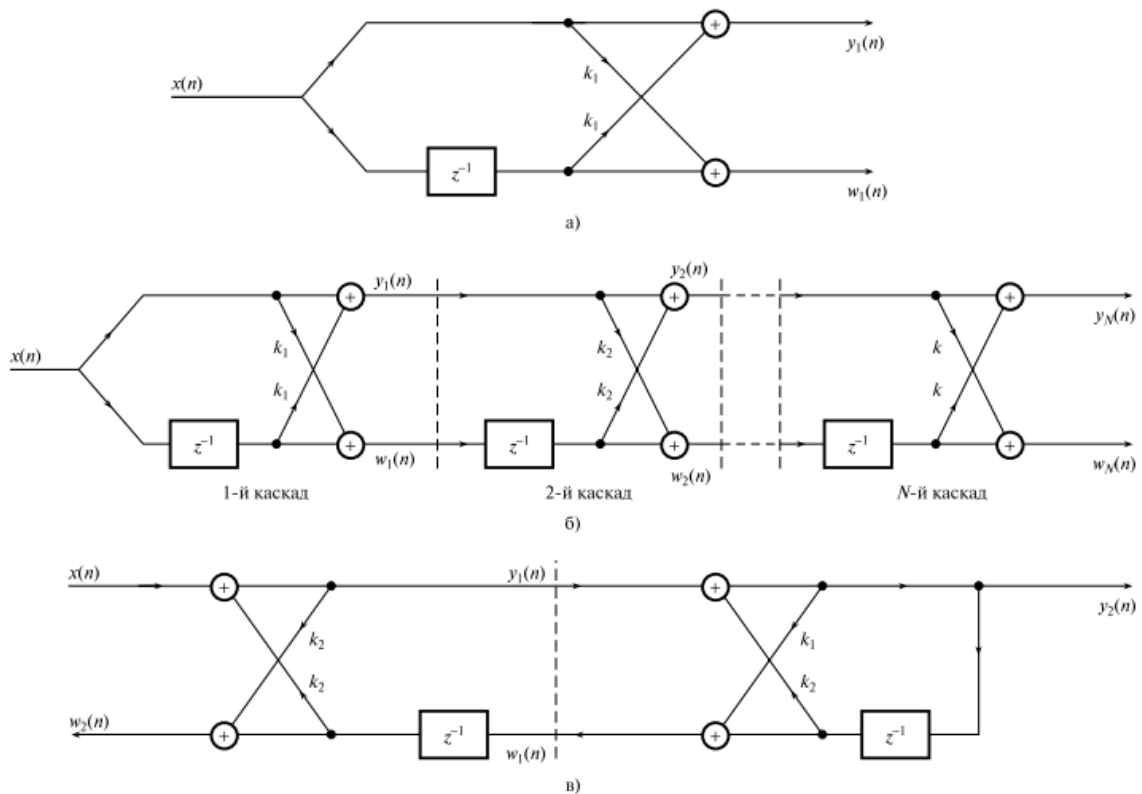


Рис. 8. Стандартна гратчаста структура (а). N-каскадний КІХ-фільтр з гратчастою структурою (б). Двокаскадна гратчаста структура БІХ-фільтра із заданими всіма полюсами (в)

Підсумуємо. КІХ - та БІХ-фільтри зазвичай реалізуються з наступними структурами:

- трансверсальна (пряма структура) (КІХ);
- частотна вибірка (КІХ);
- швидка згортка (КІХ);
- пряма форма (БІХ);

- каскадна (БІХ);
- паралельна (БІХ);
- ґратчаста (КІХ або БІХ).

Для даного фільтра вибір між структурами залежить від наступних факторів:

- 1) яка потрібна характеристика (кінцева чи нескінченна);
- 2) простота реалізації;
- 3) наскільки структура чутлива до ефектів кінцевої розрядності.

Більш детально структури реалізації КІХ- та БІХ-фільтрів описані у наступних лекціях.

4.4. Аналіз впливу кінцевої розрядності

Етапи апроксимації та реалізації припускають роботу з нескінченною або дуже високою точністю. У той самий час, у реальних реалізаціях часто потрібно представити коефіцієнти фільтра кінцевим числом бітів (зазвичай від 8 до 16 біт), крім того, арифметичні операції, зазначені в різницевих рівняннях, виконуються з використанням арифметики кінцевої точності.

Вплив кінцевого числа бітів проявляється у зниженні продуктивності фільтра, і в деяких випадках фільтр може стати нестійким. Розробник повинен проаналізувати дані ефекти і вибрати відповідну довжину слова (тобто число бітів) для представлення коефіцієнтів фільтра, змінних фільтра (тобто вхідних та вихідних вибірок) та виконання арифметичних операцій у фільтрі.

Перелічимо основні джерела погіршення продуктивності фільтра.

– *Квантування сигналу на вході-виході.* Зокрема, шум АЦП внаслідок квантування вхідних вибірок сигналу - це істотна величина.

– *Квантування коефіцієнтів.* Даний фактор призводить до спотворення частотних характеристик КІХ- та БІХ-фільтрів та можливої нестійкості БІХ-фільтрів.

– *Помилки заокруглення.* Використання для фільтрації арифметики кінцевої точності дає результати, представлення яких потребує додаткових бітів. Якщо результати квантуються до допустимої довжини слова (часто для цього використовується заокруглення), виникає шум заокруглення. Внаслідок цього можливі такі небажані наслідки, як нестійкість БІХ-фільтрів.

– *Переповнення.* Цей ефект проявляється, коли результат додавання перевищує дозволену довжину слова. Це призводить до невірних вихідних вибірок та можливої нестійкості БІХ-фільтрів.

Ступінь погіршення фільтра залежить від:

- 1) довжини слова і типу арифметики, що використовується для фільтрації;
- 2) методу квантування коефіцієнтів фільтра і змінних до вибраних розмірів;
- 3) структури фільтра.

Знаючи ці фактори, розробник може оцінити вплив кінцевої розрядності на продуктивність фільтра і при необхідності вжити заходів.

Залежно від того, як потрібно реалізувати фільтр, деякі ефекти можуть бути незначними. Наприклад, якщо фільтр реалізується як програма мовою високого рівня, яку запускать на потужному комп'ютері, помилки квантування коефіцієнтів і округлення несуттєві. При обробці в реальному часі для подання вхідних та вихідних сигналів, коефіцієнтів фільтра та результатів арифметичних операцій використовуються слова кінцевої довжини (зазвичай 8, 12 та 16 біт). У цих випадках практично завжди необхідно проаналізувати вплив квантування на продуктивність фільтра.

4.5. Реалізація фільтра

Обчисливши коефіцієнти фільтра, обравши відповідну структуру реалізації і переконавшись, що погіршення фільтра, викликане оцифровкою коефіцієнтів і змінних фільтра в слова обраної довжини, прийнятне, різницеве рівняння потрібно втілити на апаратному чи програмному рівні. Незалежно від вибраного методу, вихід фільтра для кожної вибірки повинен обчислюватися згідно з різницевим рівнянням (передбачається реалізація в часовій області).

Як випливає з різницевих рівнянь (формули (2) і (3)), обчислення $y(n)$ (виходу фільтра) включає тільки множення, додовання/віднімання та затримку. Отже, для реалізації фільтра потрібні такі основні складові:

- пам'ять (наприклад, ПЗП) для зберігання коефіцієнтів фільтра;
- пам'ять (така як ОЗП) для зберігання поточних та попередніх входів та виходів, тобто

$\{x(n), x(n-1), \dots\}$ і $\{y(n), y(n-1), \dots\}$;

- апаратний або програмний помножувач (помножувачі);
- суматор чи схема арифметичної логіки.

Розробник забезпечує дані базові складові та гарантує, що вони відповідним чином налаштовані під потрібну програму. Спосіб конфігурування компонентів безпосередньо пов'язаний з тим, у якому часі буде проводитися обробка (в реальному або модельному (пакетна обробка)). При обробці у модельному часі всі дані вже зберігаються на якомусь пристрої, що запам'ятовує. Така ситуація, наприклад, характерна для додатків, де потрібно отримати деякі експериментальні дані, а потім їх проаналізувати. У таких випадках фільтр часто реалізується мовою високого рівня та запускається на універсальному комп'ютері, де всі основні складові вже налаштовані. Таким чином, обробку в моделі можна описати як виключно програмну реалізацію (хоча розробник може побажати ввести в процес додаткові апаратні засоби для збільшення швидкості обробки).

При обробці в реальному часі від фільтра потрібно або

1) працювати за наявності вхідної вибірки $x(n)$ і видавати вихідну вибірку $y(n)$ перед надходженням наступної вхідної вибірки (тобто в межах міжвибіркового інтервалу), або

2) працювати з вхідним блоком даних (використовуючи, наприклад, метод ШПФ) для отримання вихідного блоку протягом часу, пропорційного довжині блоку. Фільтрація у реальному часі може вимагати швидкого та специфічного апаратного забезпечення, якщо частота дискретизації дуже висока або якщо необхідний фільтр високого порядку. Для більшості програм роботи з аудіочастотами буде достатньо процесорів ЦОС, подібних до DSP56000 (Motorola) або TMS320C25 (Texas Instruments), які, до речі, допускають достатню гнучкість реалізації. У цих процесорах вже вмонтовані всі необхідні базові блоки, включаючи апаратні помножувачі. У деяких додатках привабливу альтернативну реалізацію можна отримати на стандартних 8- або 16-бітових мікропроцесорах, таких як процесори сімейств Motorola 6800 або 68000. Крім блоків обробки сигналів розробник може також, в залежності від типу джерела та одержувача даних, вводити в фільтр відповідні інтерфейси введення-виведення (наприклад, при аналого-цифровому перетворенні) з цифровим апаратним забезпеченням.

5. Приклади

Приклад 6.3

Розглянути п'ять основних етапів проектування цифрових фільтрів, використовуючи для ілюстрації відповіді наступне завдання.

Для придушення у реальному часі шуму фізіологічної природи потрібен цифровий фільтр, який повинен задовольняти наступним специфікаціям амплітудної характеристики:

смуга пропускання	0-10 Гц;
смуга пригнічення	20-64 Гц;
частота дискретизації	128 Гц;
максимальне відхилення у смузі пропускання	<0,036 дБ;
згасання у смузі придушення	>30 дБ

Інші важливі вимоги:

1) гармонійний зв'язок компонентів різних внутрішньо-смугових сигналів спотворюється мінімально;

2) фільтрація є частиною більшого процесу, тому час, доступний для проведення фільтрації, обмежений;

3) фільтр потрібно реалізувати з використанням процесора ЦОС TMS32010 (Texas Instruments), аналоговий вхід оцифровується до 12 біт.

Рішення

Необхідний фільтр розроблений і на даний час використовується у певному біомедичному проекті, що включає обробку сигналів. Нижче

наводиться тільки коротке обговорення процесу розробки, докладне дослідження розглянемо пізніше, де повністю опишемо методи проектування КІХ-фільтрів.

1. *Специфікація вимог.* Як розглядалося вище, розробник повинен вказати точне призначення та вимоги до робочих характеристик фільтра плюс усі важливі обмеження. У цьому прикладі все це вже зроблено.

2. *Обчислення відповідних коефіцієнтів.* Для того щоб задовольнити вимоги мінімального спотворення та обмеженого часу обробки, слід використовувати КІХ-фільтр з лінійною фазовою характеристикою, коефіцієнти якого отримані оптимальним методом.

3. *Вибір структури фільтра.* Якщо потрібно використовувати процесор TMS32010, найбільш ефективної реалізації можна досягти з трансверсальною структурою.

4. *Аналіз впливу кінцевої розрядності.* Оскільки буде використовуватись процесор TMS32010, для ефективності слід використовувати арифметику з фіксованою комою, причому кожен коефіцієнт представляється 16 бітами (після округлення). Погіршення КІХ-фільтра може статися після квантування вхідного сигналу та коефіцієнтів через помилки округлення та переповнення, тому слід перевірити, чи достатньо вибраної довжини слова. Аналіз впливу кінцевої довжини слова у разі показує, що вхідний шум квантування і відхилення від частотної характеристики внаслідок квантування коефіцієнтів несуттєві. Для зменшення помилок округлення до несуттєвого рівня використовується 2-бітовий накопичувач TMS32010, за допомогою якого проводиться підсумовування добутків коефіцієнтів і вибірок, причому округляються тільки остаточні суми. Щоб уникнути переповнення, кожна

величина перед квантуванням до 16 біт має ділитися на $\sum_{k=0}^{N-1} |h(k)|$.

5. *Реалізація.* На цьому етапі потрібно спроектувати та налаштувати апаратний модуль на базі TMS32010 (якщо він ще не готовий) з необхідними інтерфейсами вводу-виводу. Крім того, слід записати для TMS32010 програму обробки протоколу введення-виводу та обчислити вихід фільтра

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \text{ кожного нового входу } x(n).$$

Приклад 6.4

Аналоговий фільтр потрібно перетворити на еквівалентний цифровий, який працюватиме з частотою 256 Гц. Передатна функція аналогового фільтра має вигляд

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

1. Обчисліть відповідні коефіцієнти фільтра.

2. Припускаючи, що цифровий фільтр буде реалізований з використанням каскадної структури, зобразіть відповідну блок-схему реалізації та виведіть різницеві рівняння.

3. Повторіть пункт 2 для паралельної структури.

Рішення

1. Для збереження амплітудної характеристики аналогового фільтра під час обчислення коефіцієнтів використовувався білінійний метод. Застосовуючи білінійне перетворення до аналогової передавальної функції, отримуємо наступну передатну функцію:

$$H(z) = \frac{0,1432(1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3})}{1 - 0,1801z^{-1} + 0,3419z^{-2} - 0,0165z^{-3}}.$$

2. При каскадній реалізації $H(z)$ факторизується з використанням елементарних дробів:

$$H(z) = 0,1432 \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,1307z^{-1} + 0,3355z^{-2}} \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0,0490z^{-1}}.$$

Подання фільтра як блок-схеми дано на рис. 9, відповідний набір різницевих рівнянь наводиться нижче.

$$\begin{aligned} w_1(n) &= 0,1432x(n) + 0,1307w_1(n-1) - 0,3355w_1(n-2), \\ y_1(n) &= w_1(n) + 2w_1(n-1) + w_1(n-2), \\ w_2(n) &= y_1(n) + 0,049w_2(n-1), \\ y_2(n) &= w_2(n) + w_2(n-1). \end{aligned}$$

3. При паралельній реалізації $H(z)$ виражається через елементарні дроби

$$H(z) = \frac{1,2916 - 0,08407z^{-1}}{1 - 0,131z^{-1} + 0,3355z^{-2}} + \frac{7,5268}{1 - 0,049z^{-1}} - 8,6753.$$

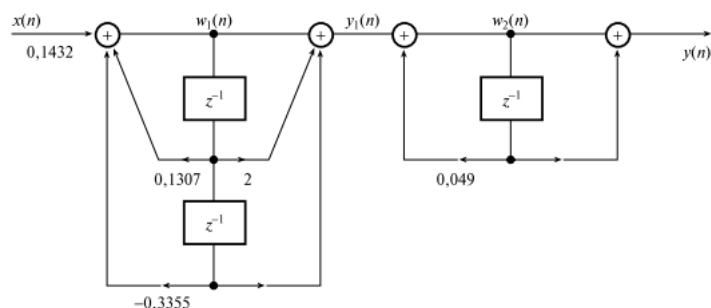


Рис. 9 Блок-схема фільтра при каскадній реалізації

Схема паралельної реалізації показано на рис. 10, відповідний набір різницевих рівнянь наводиться нижче.

$$w_1(n) = x(n) + 0,131w_1(n-1) - 0,3355w_1(n-2),$$

$$y_1(n) = 1,2916w_1(n) - 0,08407w_1(n-1),$$

$$w_2(n) = x(n) + 0,049w_2(n-1),$$

$$y_2(n) = 7,5268w_2(n),$$

$$y_3(n) = -8,6753x(n),$$

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) + y_3(n).$$

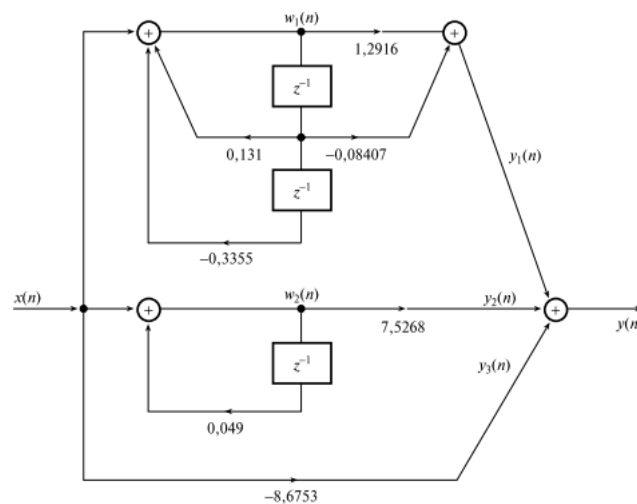


Рис. 10 Блок-схема фільтра при паралельній реалізації

Приклад 6.5

Передатна функція КІХ-фільтра записується таким чином:

$$H(z) = 1 - 1,3435z^{-1} + 0,9025z^{-2}.$$

Зобразити блок-схему реалізації для кожного з наступних випадків:

- 1) трансверсальна структура;
- 2) двокаскадна гратчаста структура.

Для гратчастої структури обчислити значення коефіцієнтів.

Рішення

1. За допомогою передавальної функції отримуємо схему трансверсальної структури, представлену на рис. 11.

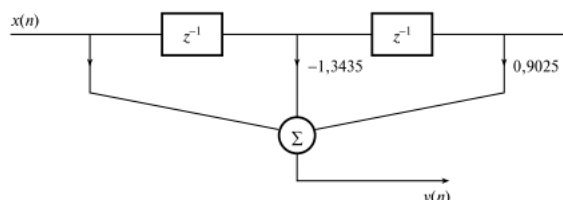


Рис. 11 Схеми трансверсальної структури

Вхід та вихід трансверсальної структури пов'язані наступним співвідношенням:

$$y(n) = x(n) + h(1)x(n - 1) + h(2)x(n - 2). \quad (6)$$

2. Двокаскадна гратчаста структура фільтра представлена на рис. 12.

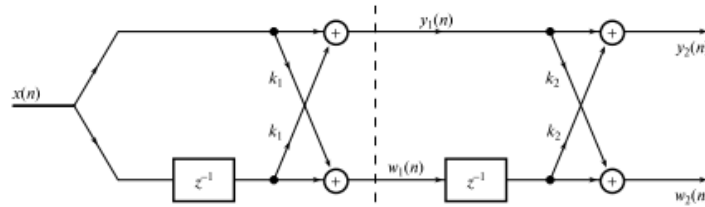


Рис. 12. Двокаскадна гратчаста структура

Вихід структури в такий спосіб пов'язані з входом:

$$\begin{aligned} y_2(n) &= y_1(n) + k_2 w_1(n - 1) = \\ &= x(n) + k_1(1 + k_2)x(n - 1) + k_2 x(n - 2), \end{aligned} \quad (7)$$

$$w_2(n) = k_2 x(n) + k_1(1 + k_2)x(n - 1) + x(n - 2).$$

Порівнюючи формули (6) та (7, а) та прирівнюючи коефіцієнти, отримуємо

$$k_1 = \frac{h(1)}{1 + h(2)}, \quad k_2 = h(2).$$

Отже

$$k_2 = 0,9025 \text{ и } k_1 = -1,3435 / (1 + 0,9025) = -0,7062.$$

Звернемо увагу на те, що коефіцієнти функцій $y_2(n)$ і $w_2(n)$ (рівняння (7, а і б)) ідентичні, за винятком того, що один записаний у зворотному порядку. Дана особливість характерна для КІХ-фільтрів з гратчастою структурою. Детально гратчаста структура, у тому числі рекурсивні схеми перетворення коефіцієнтів КІХ- та БІХ-фільтрів у коефіцієнти еквівалентних гратчастих структур, описана в різних книгах.