Логарифмічне диференціювання

При обчисленні похідної від логарифма добутку, частки, степеня або кореня, для спрощення знаходження похідної роблять попереднє перетворення (див. Приклад 10(з)).

У ряді випадків для знаходження похідної доцільно задану функцію спочатку прологарифмувати (найчастіше мається на увазі натуральний логарифм). Потім знайти похідну від цього логарифма і по ній відшукати похідну від заданої функції. Такий прийом називається *логарифмічним диференціюванням.*

Метод логарифмічного диференціювання дозволяє легко знаходити похідні показово-ступеневих функцій виду

$$y=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)},$$

де $f(x)$ й $\varphi(x)$ – диференційовні функції аргументу x.

Приклад 1.

Знайти похідну функції $y=x^{\sin x}$.

Розв'язок.

Прологарифмуємо обидві частини функції й перетворимо вираз:

$\ln y=\ln\left(x^{\sin x}\right) \Rightarrow \ln y=\sin x\cdot\ln x$.

Тепер диференціюємо рівняння, як неявно задану функцію:

$$(\ln y)'=(\sin x\cdot\ln x)';$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=(\sin x)'\cdot\ln x+\sin x\cdot(\ln x)';$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x};$$

$$y'=y\cdot\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right);$$

Оскільки $y=x^{\sin x}$, то остаточно отримуємо:

$$y'=x^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

Диференціювання неявної функції

Якщо залежність між y і x задана в неявному вигляді рівнянням $F(x,\ y)=0$, то похідна y' визначається в такий спосіб:

1) диференціюються обидві частини рівняння, розглядаючи при цьому y, як функцію аргументу x;
2) отримане рівняння розв'язується відносно y'.

У результаті отримують вираз для похідної від неявної функції у вигляді:

$$y' = f(x, y).$$

Приклад 2.

Обчислити похідну функції $y = e^{-\frac{x}{y}}$.

Розв'язок.

Диференціюємо обидві частини рівняння й виражаємо y':

$$(y)' = \left(e^{-\frac{x}{y}}\right)';$$

$$y' = e^{-\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x' \cdot y - x \cdot y'}{y^2}\right);$$

$$y' = e^{-\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{y - x \cdot y'}{y^2}\right);$$

$$y' = e^{-\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} \cdot y'\right);$$

$$y' = -\frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{x}{y}} + \frac{x}{y^2} \cdot e^{-\frac{x}{y}} \cdot y';$$

$$y' - \frac{x}{y^2} \cdot e^{-\frac{x}{y}} \cdot y' = -\frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{x}{y}};$$

$$y' \cdot \left(1 - \frac{x}{y^2} \cdot e^{-\frac{x}{y}}\right) = -\frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{x}{y}};$$

$$y' = \frac{-\frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{x}{y}}}{1 - \frac{x}{y^2} \cdot e^{-\frac{x}{y}}}.$$

Щоб позбутися від багатоповерхового дробу у відповіді, помножимо чисельник і знаменник дробу, який отримали, на вираз $y^2 \cdot e^{\frac{x}{y}}$.

$$y' = -\frac{y^2 \cdot e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{x}{y}}\right)}{y^2 \cdot e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(1 - \frac{x}{y^2} \cdot e^{-\frac{x}{y}}\right)} = -\frac{y}{y^2 \cdot e^{\frac{x}{y}} - x}.$$

Диференціювання функцій, заданих параметрично

Якщо функція y від незалежної змінної x задана за допомогою допоміжної змінної (параметра) t: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то говорять, що функція задана параметрично і похідна y'_x визначається за формулою:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Приклад 3.

Знайти похідну y'_x, функції $\begin{cases} x = arctg\, t \\ y = \ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$.

Розв'язок.

Знаходимо похідні x і y від змінної t:

$$x'_t = \left(arctg\, t\right)' = \frac{1}{1+t^2};$$

$$y'_t = \left(\ln\left(1+t^2\right)\right)' = \frac{1}{1+t^2}\cdot\left(1+t^2\right)' = \frac{2t}{1+t^2};$$

Тоді: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{2t}{1+t^2} : \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{2t}{1+t^2}\cdot\dfrac{1+t^2}{1} = 2t$.