Похідна складної функції

Знайти похідні функцій, скориставшись правилом $\mathbf{6^o}$:

95. $y=\sqrt{x^2+5}$.

$\ulcorner$ Поклавши $u=x^2+5$, маємо $y=\sqrt{u}$. Тому за правилом $\mathbf{6^o}$

$$y'=\underbrace{\left(\sqrt{u}\right)'}_{\substack{\textit{похідна зовнішньої}\\ \textit{функції по проміж-}\\ \textit{ному аргументу } u}}\cdot\underbrace{u'}_{\substack{\textit{похідна внут-}\\ \textit{рішньої функції}\\ \textit{по незалежній}\\ \textit{змінній } x}}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\left(x^2+5\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,.$$

Можна було б відразу продиференціювати функцію за правилом $\mathbf{6^o}$, не вводячи проміжний аргумент:

$$y'=\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}}_{\substack{\textit{похідна від квадрат-}\\ \textit{ного кореня із функції}}}\cdot\underbrace{2x}_{\substack{\textit{похідна від}\\ \textit{функції, що}\\ \textit{стоїть під}\\ \textit{коренем}}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,.\quad\lrcorner$$

96. $y=\sqrt[3]{x^4+\sin x}$.

$\ulcorner$ Поклавши $u=x^4+\sin x$, одержимо $y=\sqrt[3]{u}$. За правилом $\mathbf{6^o}$

$$y'=\left(\sqrt[3]{u}\right)'\cdot u'=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\cdot u'=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^4+\sin x\right)^2}}\left(x^4+\sin x\right)'=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^4+\sin x\right)^2}}\left(4x^3+\cos x\right)=\frac{4x^3+\cos x}{3\sqrt[3]{\left(x^4+\sin x\right)^2}}\,.\quad\lrcorner$$

97. $y=\left(5x^2+7x+2\right)^3$.

$\ulcorner$ Поклавши $u=5x^2+7x+2$, одержимо $y=u^3$. Надалі будемо писати так: $y=u^3$; $u=5x^2+7x+2$. За правилом $\mathbf{6^o}$:

$$y'=\left(u^3\right)'\cdot u'=3u^2\cdot u'=3\left(5x^2+7x+2\right)^2\left(5x^2+7x+2\right)'=$$

$$=3\left(5x^2+7x+2\right)^2\left(10x+7\right).\quad\lrcorner$$

98. $y=\sin 15x$.

$\ulcorner$ $y=\sin u$; $u=15x$.

$$y' = (\sin u)' \cdot u' = \cos u \cdot u' = \cos 15x\ (15x)' = \cos 15x \cdot 15 = 15\cos x\ . \quad \lrcorner$$

99. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x} \quad (x > 0)$.

$\ulcorner$ $y = \operatorname{arctg} u$; $u = \sqrt{x}$.

$$y' = (\operatorname{arctg} u)' \cdot u' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' = \frac{1}{1+x} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)} \ . \quad \lrcorner$$

103. $y = (1 + 2\operatorname{ctg} x)^4$.

$\ulcorner$ $$y' = 4(1+2\operatorname{ctg} x)^3 (1+2\operatorname{ctg} x)' = \underbrace{4(1+2\operatorname{ctg} x)^3}_{\text{похідна степеневої функції}} \underbrace{2\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}_{\text{похідна основи степеня}} =$$

$$= -8\frac{(1+2\operatorname{ctg} x)^3}{\sin^2 x} \ . \quad \lrcorner$$

107. $y = \ln(1+5x)$.

$\ulcorner$ $$y' = \frac{1}{1+5x} \cdot (1+5x)' = \frac{1}{1+5x} \cdot 5 = \frac{5}{1+5x} \ . \quad \lrcorner$$

108. $y = \operatorname{arctg} x^3$.

$\ulcorner$ $$y' = \frac{1}{1+\left(x^3\right)^2} \cdot \left(x^3\right)' = \frac{3x^2}{1+x^6} \ . \quad \lrcorner$$

117. $y = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\ulcorner$

$$y' = \frac{(\arccos x)'\sqrt{1-x^2} - \left(\sqrt{1-x^2}\right)'\arccos x}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} = \frac{-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} - \arccos x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2} =$$

$$= \frac{-1 + \dfrac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{x\arccos x - \sqrt{1-x^2}}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}} \ . \quad \lrcorner$$

119. $y = \ln\left(x^3 - 2x^2 + x\right)$.

$\ulcorner$ $$y' = \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} \cdot \left(3x^2 - 2 \cdot 2x + 1\right) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} \ . \quad \lrcorner$$

4. Диференціювання функцій, заданих неявно

Якщо кожному числу x з множини X ставиться у відповідність єдине число y так, що пара чисел $(x; y)$ задовольняє рівняння $F(x, y) = 0$, то кажуть, що *функцію* $y = f(x)$, $x \in X$, *задано неявно*.

Незважаючи на те, що рівняння $F(x, y) = 0$ не розв'язане відносно y, можна знайти похідну $y' = y'(x)$. Для цього потрібно:

1) обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$ продиференціювати по x, вважаючи, що y є функцією від x;
2) одержане рівняння розв'язати відносно y'.

Знайти похідні функцій, що задані неявно:

161. $5x + 3y - 7 = 0$.

1) Продиференціюємо по x обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x:

$$(5x)' + (3y)' - (7)' = (0)'$$
$$5 + 3y' = 0.$$

2) Розв'яжемо рівняння відносно y':

$$3y' = -5, \quad y' = -\frac{5}{3}.$$

162. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, де $a = const$.

1) Продиференціюємо по x обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x:

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3a(1 \cdot y + xy') = 0$$

(за правилом диференціювання складної функції $\left(y^3\right)' = 3y^2 y'$).

2) Розв'яжемо одержане рівняння відносно y':

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3ay - 3axy' = 0, \quad y^2 y' - axy' = ay - x^2,$$

$$y'\left(y^2 - ax\right) = ay - x^2, \quad y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

163. $\operatorname{arctg} y - y + x = 0$.

⌈ 1) Диференціюємо задане співвідношення, розглядаючи y як функцію від x:

$$(\operatorname{arctg} y)' - (y)' + (x)' = 0$$

$$\frac{1}{1+y^2}y' - y' + 1 = 0$$

(за правилом диференціювання складної функції $(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1+y^2} \cdot y'$).

2) Розв'язуємо рівняння відносно y':

$$\frac{y'}{1+y^2} - y' = -1, \quad y'\left(\frac{1}{1+y^2} - 1\right) = -1, \quad y' \cdot \frac{1-1-y^2}{1+y^2} = -1,$$

$$y'\left(-\frac{y^2}{1+y^2}\right) = -1, \quad y' = \frac{1+y^2}{y^2}. \ ⌋$$

164. $y \ln x = x \ln y$.

⌈ 1) При диференціюванні по x обох частин рівності скористаємося в лівій частині правилом похідної добутку, а в правій частині – як правилом похідної добутку, так і тим, що $\ln y$ є складною функцією від x:

$$(y)' \ln x + y(\ln x)' = (x)' \ln y + x(\ln y)'$$

$$y' \cdot \ln x + y \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot \ln y + x \cdot \frac{1}{y} \cdot y'$$

2) Розв'язуємо рівняння відносно y':

$$y' \ln x - y' \cdot \frac{x}{y} = \ln y - \frac{y}{x}, \quad y'\left(\ln x - \frac{x}{y}\right) = \ln y - \frac{y}{x},$$

$$y' \frac{y \ln x - x}{y} = \frac{x \ln y - y}{x}, \quad y' = \frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}. \ ⌋$$

165. $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

⌈ 1) Диференціюючи ліву і праву частини рівняння по x, одержуємо

$$3x^2+\frac{1}{y}y'-\left(2xe^y+x^2e^yy'\right)=0 .$$

2) Розв'язуємо рівняння відносно y':

$$3x^2+\frac{y'}{y}-2xe^y-x^2e^yy'=0 ,\quad y'\left(\frac{1}{y}-x^2e^y\right)=2xe^y-3x^2 ,$$

$$y'\cdot\frac{1-x^2ye^y}{y}=x\left(2e^y-3x\right),\quad y'=\frac{xy\left(2e^y-3x\right)}{1-x^2ye^y}. \quad \lrcorner$$

Диференціювання функцій, що задані параметрично

Нехай функція $y=f\left(x\right)$ задана параметрично

$$\begin{cases} x=\varphi\left(t\right) \\ y=\psi\left(t\right) \end{cases},\ t\ \text{– параметр},\ t\in T .$$

Її похідна обчислюється за формулою

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}, \tag{4}$$

де y' – похідна функції $y=f\left(x\right)$ (надалі цю похідну будемо позначати y'); y' – похідна функції y по змінній t; x_t' – похідна функції x по змінній t.

Обчислити похідні функцій, що задані параметрично:

181. $\begin{cases} x=\operatorname{tg}t \\ y=\sin t. \end{cases}$

$\ulcorner$ Маємо $x'_t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$, $y'_t=\cos t$. Ці значення похідних підставляємо у формулу (4): $y'=\dfrac{y'_t}{x_t}=\dfrac{\cos t}{\dfrac{1}{\cos^2 t}}=\cos^3 t$. $\lrcorner$

182. $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t \\ y=2\sin t-\sin 2t. \end{cases}$

$\ulcorner$ Маємо $x'_t=-2\sin t+\sin 2t\cdot 2=2\left(\sin 2t-\sin t\right)$,

$y'_t=2\cos t-\cos 2t\cdot 2=2\left(\cos t-\cos 2t\right)$. За формулою (4)

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2\left(\cos t - \cos 2t\right)}{2\left(\sin 2t - \sin t\right)} = \frac{\cos t - \cos 2t}{\sin 2t - \sin t} = \frac{2\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2}} = \operatorname{tg}\frac{3t}{2}$$

(тут використали формули $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$). ┘

183. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$, $t \neq -1$, ($a = const$).

┌ $$x'_t = \frac{3a\left(1+t^3\right) - 3at\cdot 3t^2}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{3a\left(1+t^3-3t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{3a\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2},$$

$$y'_t = \frac{3a\cdot 2t\left(1+t^3\right) - 3at^2\cdot 3t^2}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{3at\left(2+2t^3-3t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{3at\left(2-t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}.$$

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3at\left(2-t^3\right)\left(1+t^3\right)^2}{\left(1+t^3\right)^2 3a\left(1-2t^3\right)} = \frac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3}.$$ ┘

184. $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right) \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

┌ $$x'_t = \frac{2t}{1+t^2};\ y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^2\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)2t} = \frac{t}{2}.$$ ┘